

Кривые и поверхности в компьютерной графике

URL: <http://www.school30.spb.ru/cgsg/cgc/>

E-mail: CGSG@yandex.ru

- явный способ (explicit curves)

$$y = f(x)$$

$$y = \sin(x)$$

- неявный способ (implicit)

$$f(x, y) = 0$$

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

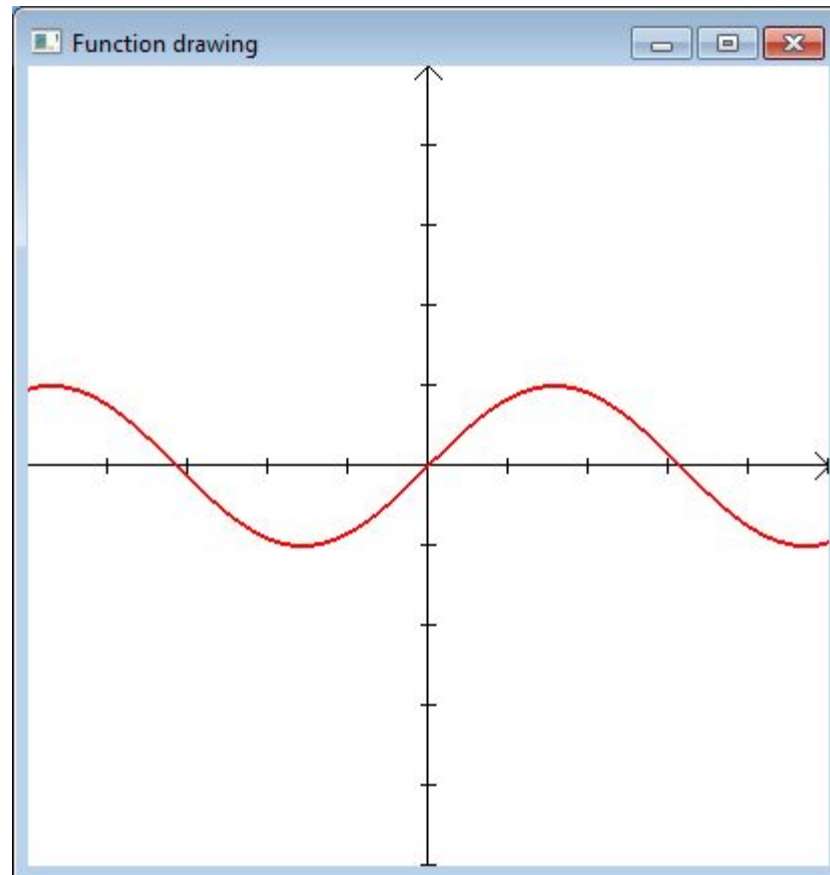
- Параметрический способ (parametric curves)

$$\begin{cases} x = f_x(t) \\ y = f_y(t) \end{cases}, t \in [a, b]$$

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi)$$

```

x = MinX;
MoveTo (x, F (x) );
while (x <= MaxX)
{
    LineTo (x, F (x) );
    x = x + Step;
}
    
```



 $y = \sin(x)$

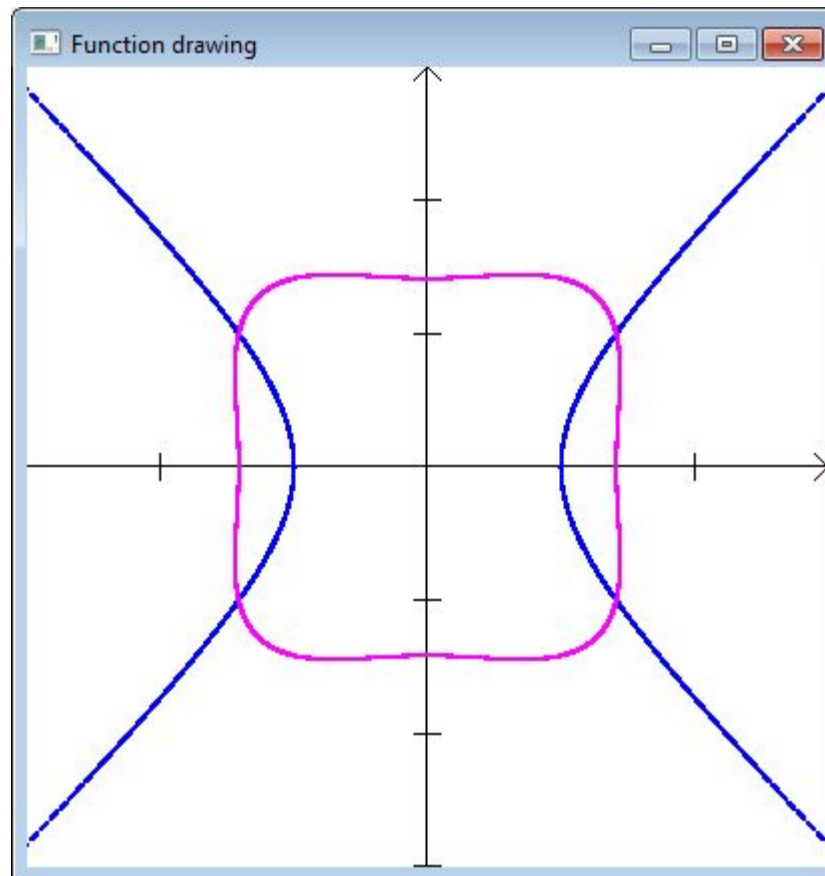
```

y = MinY;
while (y <= MaxY)
{
  x = MinX;
  while (x <= MaxX)
  {
    f = F(x, y);

    if (f > -EPS && f < EPS)
      SetPixel(x, y);

    x = x + Step;
  }
  y = y + StepY;
}

```

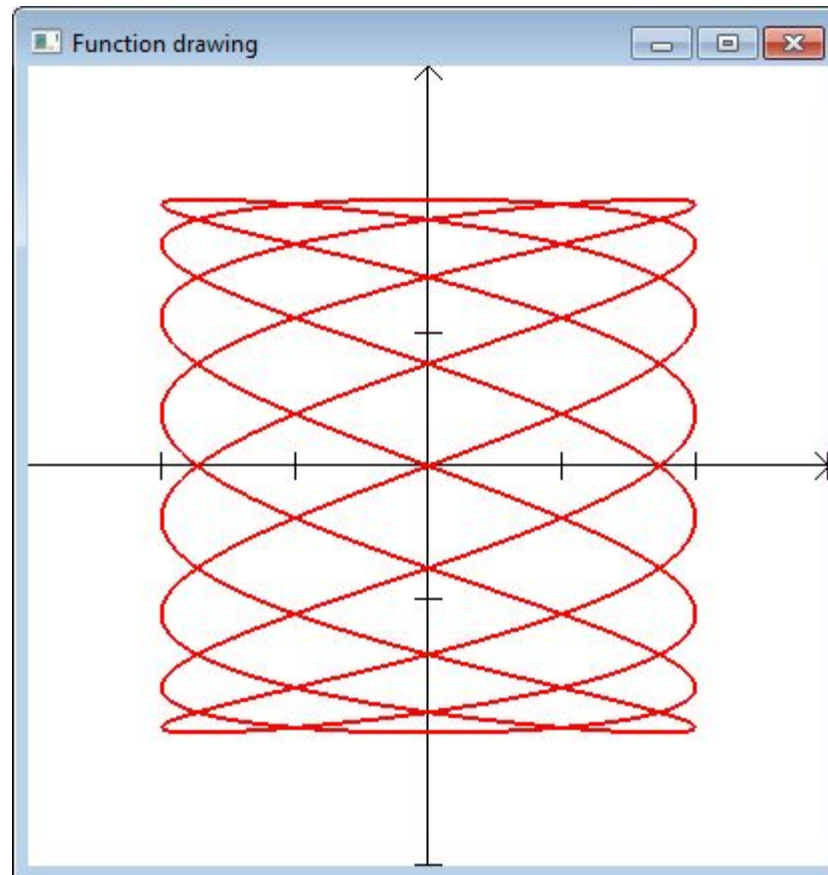


— $x^2 - y^2 - 1 = 0$

— $x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2 = 0$

```

t = A;
x = Fx(t);
y = Fy(t);
MoveTo(x, y);
while (t <= B)
{
    x = Fx(t);
    y = Fy(t);
    LineTo(x, y);
    t = t + Step;
}
    
```



$$\begin{cases} f_x(t) = 2 \cdot \sin(8 \cdot t) \\ f_y(t) = 2 \cdot \sin(3 \cdot t) \end{cases}$$

- Линейные кривые Безье
 - Линейная интерполяция между концевыми точками

$$B = P_0 \cdot (1 - t) + P_1 \cdot t$$

$$t \in [0, 1]$$



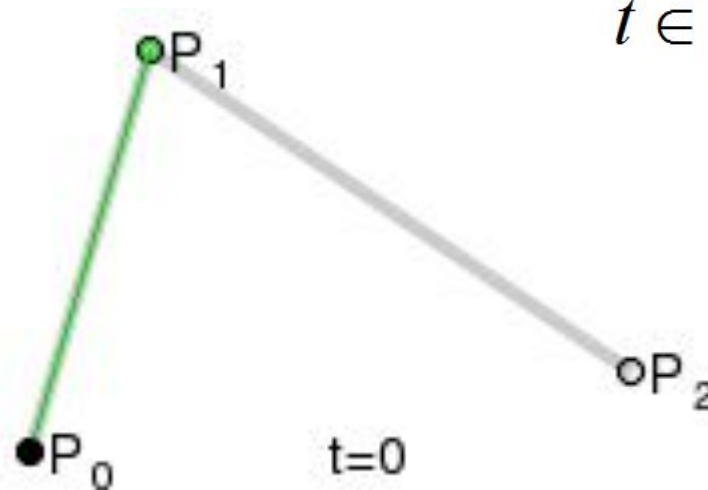
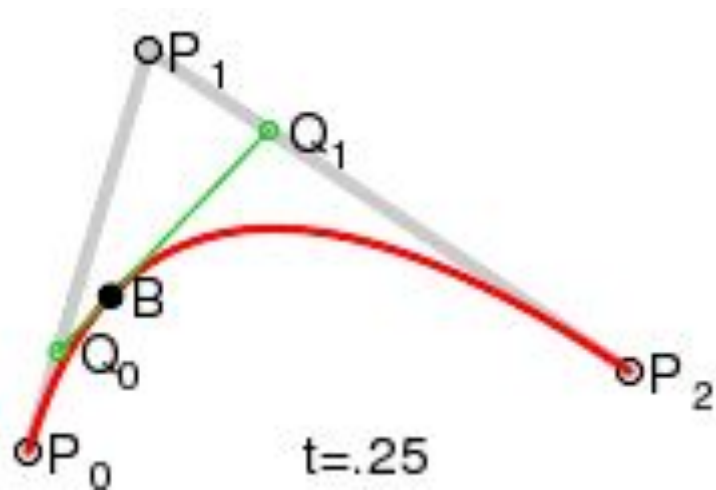
- Квадратичные кривые Безье
 - Композиция нескольких линейных кривых:

$$Q_1 = P_0 \cdot (1-t) + P_1 \cdot t$$

$$Q_2 = P_1 \cdot (1-t) + P_2 \cdot t$$

$$B = Q_0 \cdot (1-t) + Q_1 \cdot t = P_0 \cdot (1-t)^2 + 2 \cdot P_1 \cdot (1-t) \cdot t + P_2 \cdot t^2$$

$$t \in [0, 1]$$



- Кубические кривые Безье

$$Q_0 = P_0 \cdot (1-t) + P_1 \cdot t$$

$$Q_1 = P_1 \cdot (1-t) + P_2 \cdot t$$

$$Q_2 = P_2 \cdot (1-t) + P_3 \cdot t$$

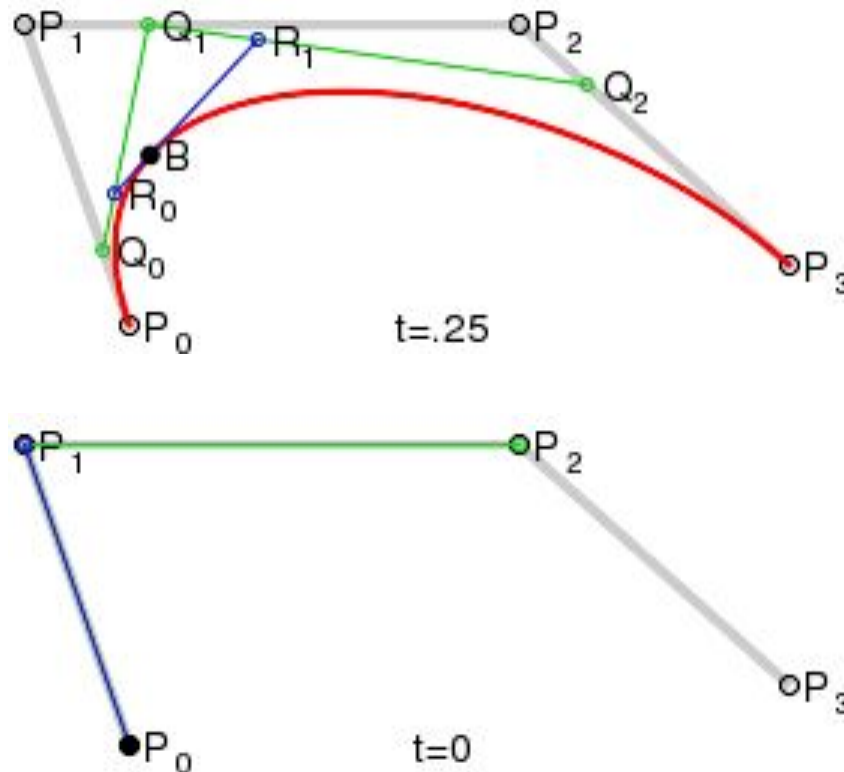
$$R_0 = Q_0 \cdot (1-t) + Q_1 \cdot t$$

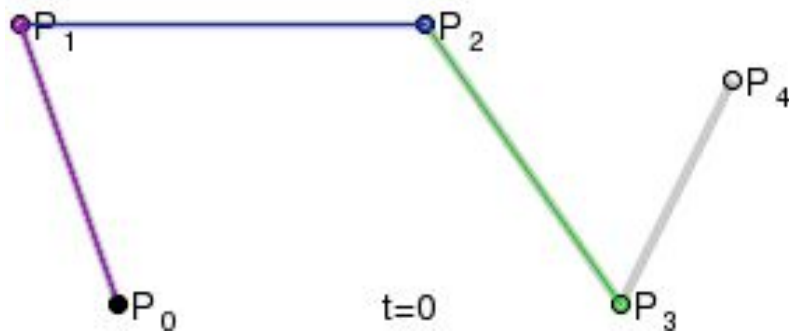
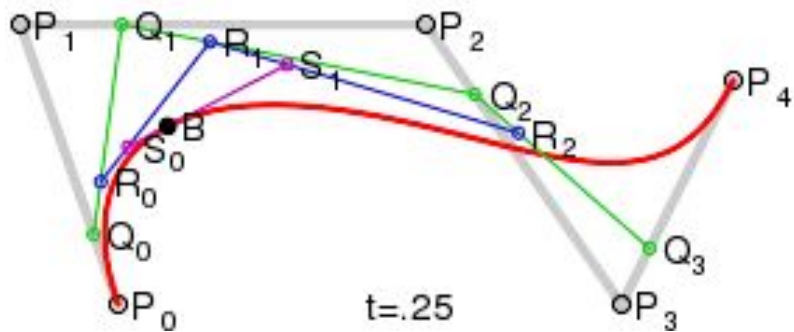
$$R_1 = Q_1 \cdot (1-t) + Q_2 \cdot t$$

$$B = R_0 \cdot (1-t) + R_1 \cdot t =$$

$$= P_0 \cdot (1-t)^3 + 3 \cdot P_1 \cdot (1-t)^2 \cdot t + 3 \cdot P_2 \cdot (1-t) \cdot t^2 + P_3 \cdot t^3$$

$$t \in [0, 1]$$





- В общем случае:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n P_i \cdot \mathbf{b}_{i,n}(t)$$

$$\mathbf{b}_{i,n}(t) = C_n^i \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i}$$

полином Бернштейна

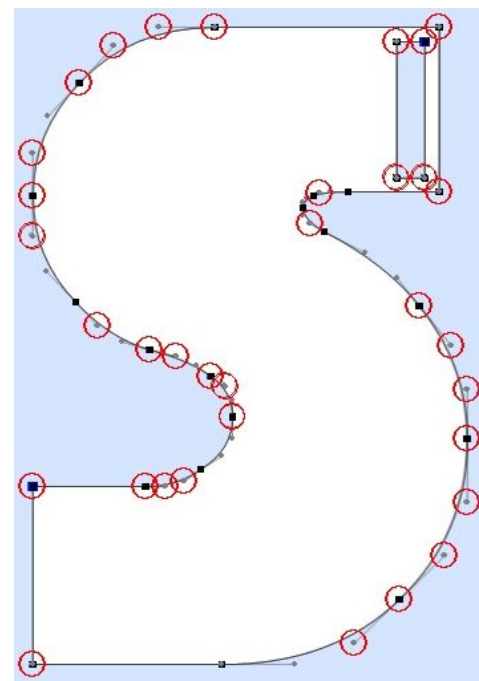
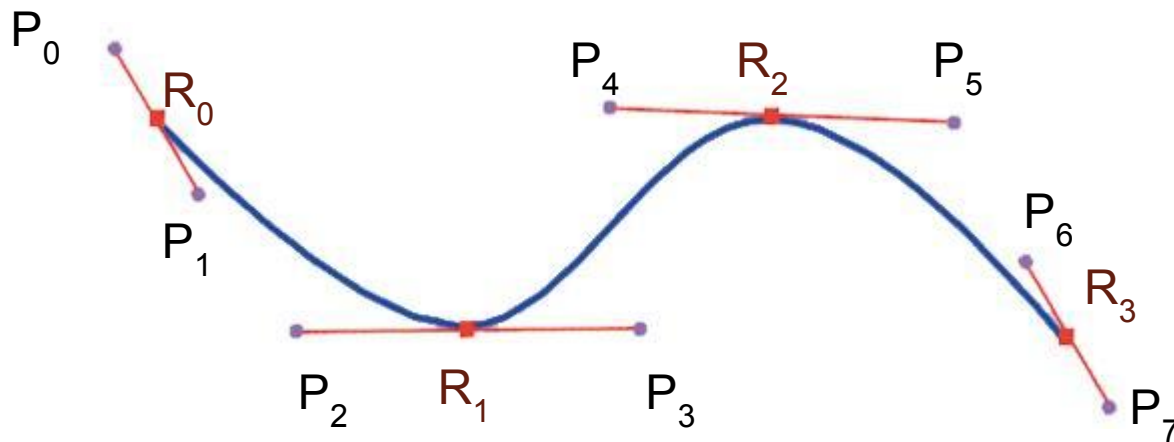
$$C_n^i = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

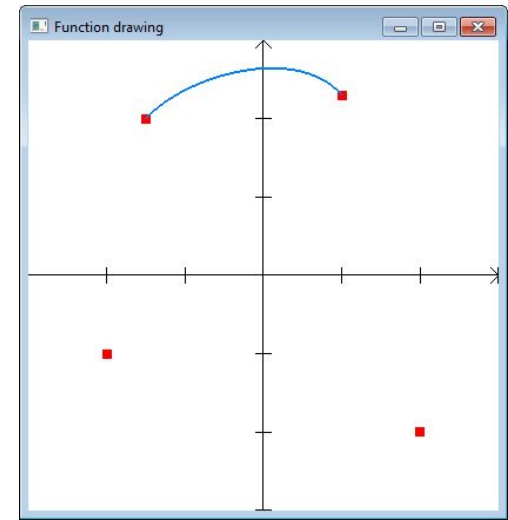
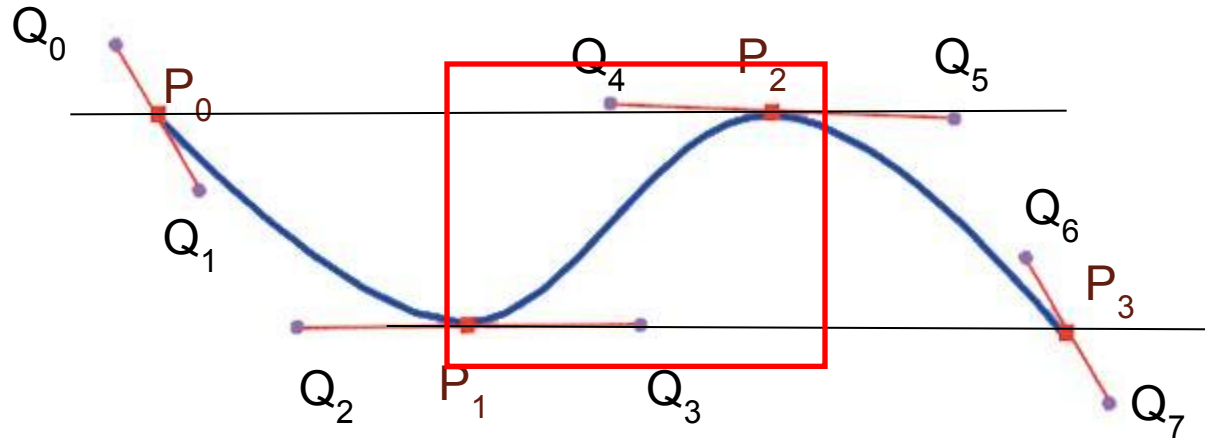
число Сочетаний

$$\begin{aligned}
 B(t) &= P_0 \cdot (1-t)^3 + 3 \cdot P_1 \cdot (1-t)^2 \cdot t + 3 \cdot P_2 \cdot (1-t) \cdot t^2 + P_3 \cdot t^3 = \\
 &= t^3 \cdot (-P_0 + 3 \cdot P_1 - 3 \cdot P_2 + P_3) + t^2 \cdot (3 \cdot P_0 - 6 \cdot P_1 + 3 \cdot P_2) + \\
 &\quad t \cdot (-3 \cdot P_0 + 3 \cdot P_1) + P_0 =
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot M_B \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

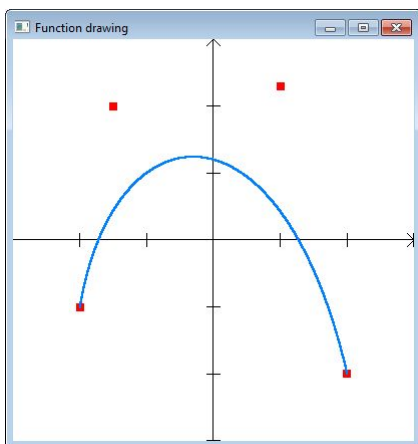




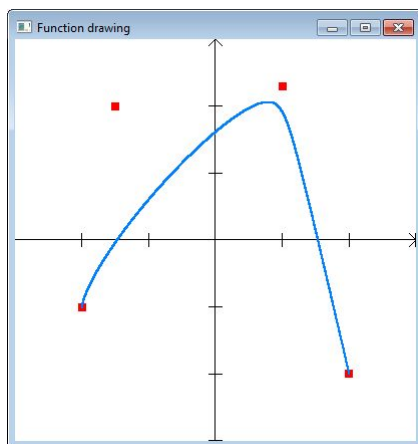
- Сплайны Катмула-Рома:

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

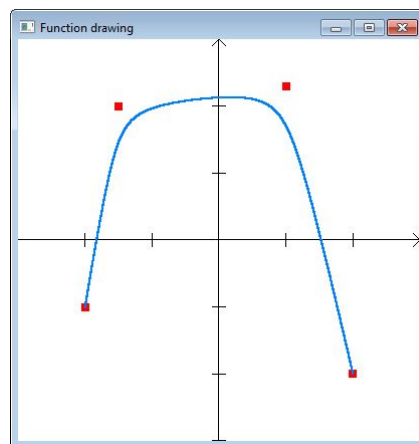
$$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i P_i \cdot \mathbf{b}_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i \cdot \mathbf{b}_{i,n}(t)}, \quad 0 \leq t \leq 1$$



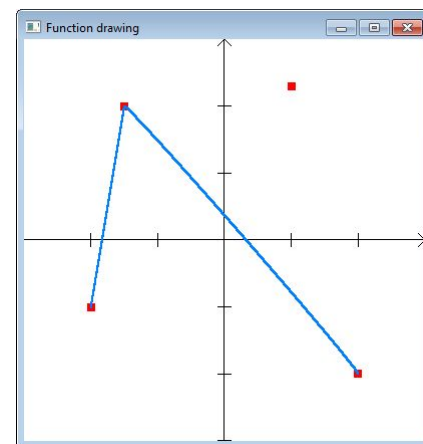
$w=(1, 1, 1, 1)$



$w=(1, 1, 10, 1)$



$w=(1, 30, 30, 1)$



$w=(1, 1000, 1, 1)$

- Кокс и де Бур:

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} P_i \cdot N_{i,k}(t), \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max}, \quad 2 \leq k \leq n+1$$

$$N_{i,1} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \leq t \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

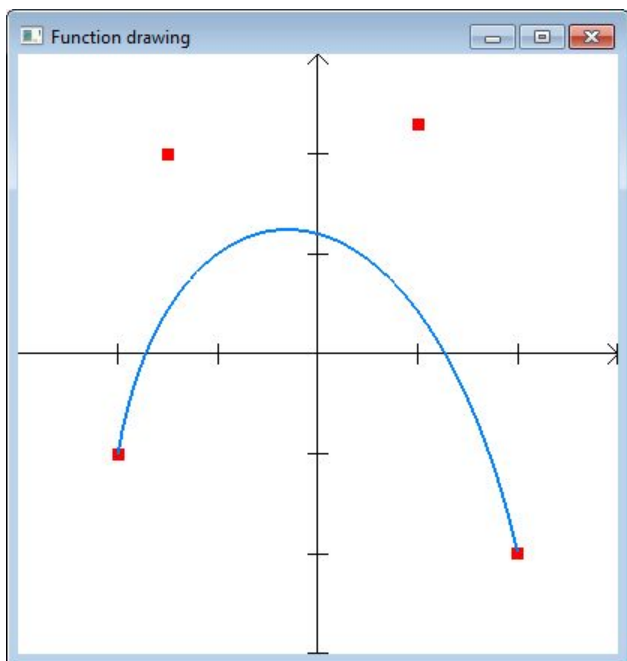
$$N_{i,k} = \frac{(t - x_i) \cdot N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t) \cdot N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}},$$

полагаем $\frac{0}{0} = 1$

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_{n+k+1}] \text{ - узловой вектор}$$

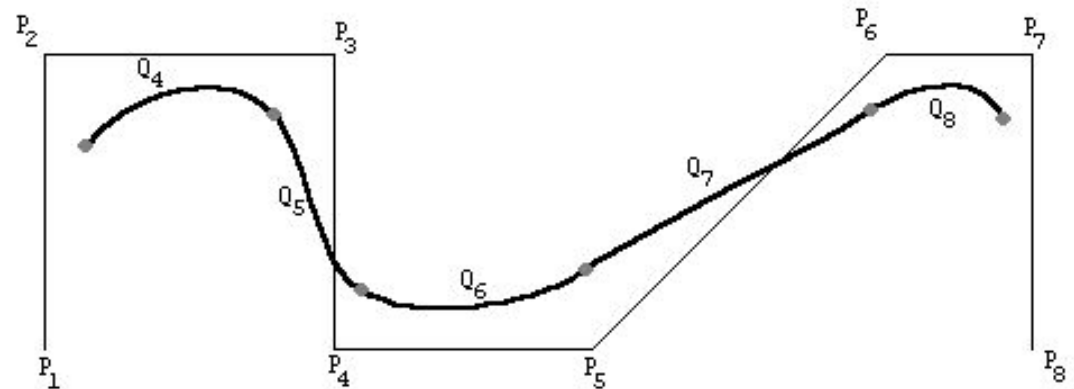
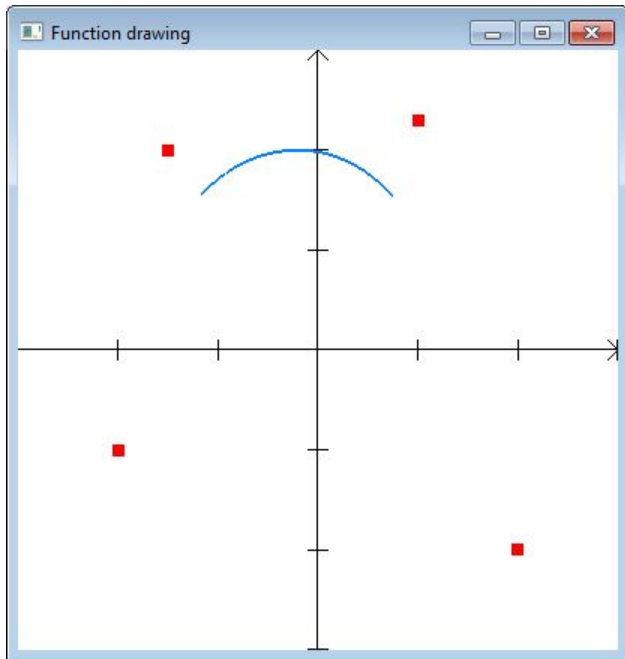
- Кубическая кривая Безье:

$$x = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$



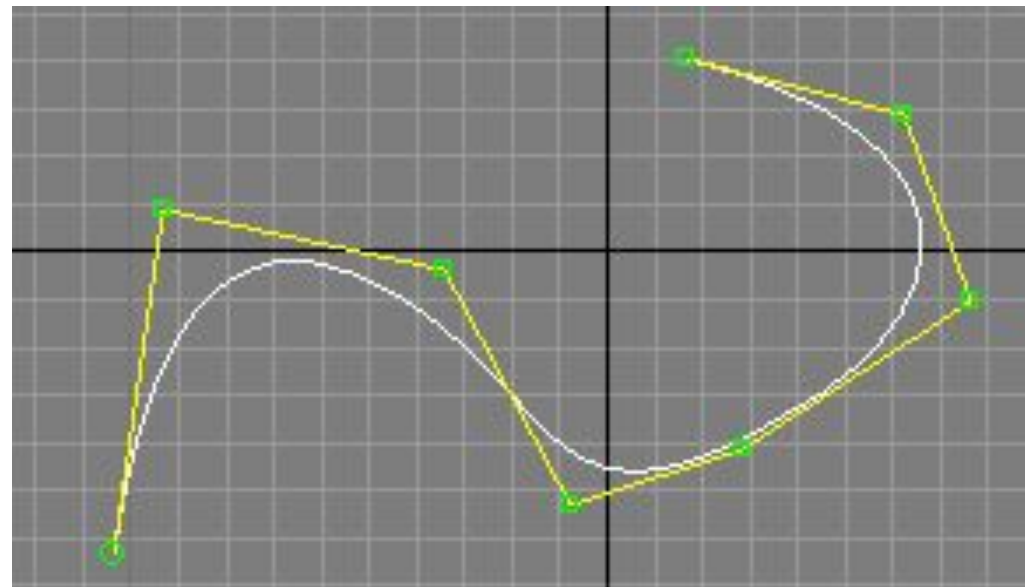
- Униформный кубический B-spline

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_i \\ P_{i+1} \\ P_{i+2} \\ P_{i+3} \end{bmatrix}$$



- NURBS

$$P(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} w_i P_i \cdot N_{i,k}(t)}{\sum_{i=1}^{n+1} w_i \cdot N_{i,k}(t)}$$



- ЯВНЫЙ СПОСОБ

$$z = f(x, y)$$

- НЕЯВНЫЙ СПОСОБ

$$f(x, y, z) = 0$$

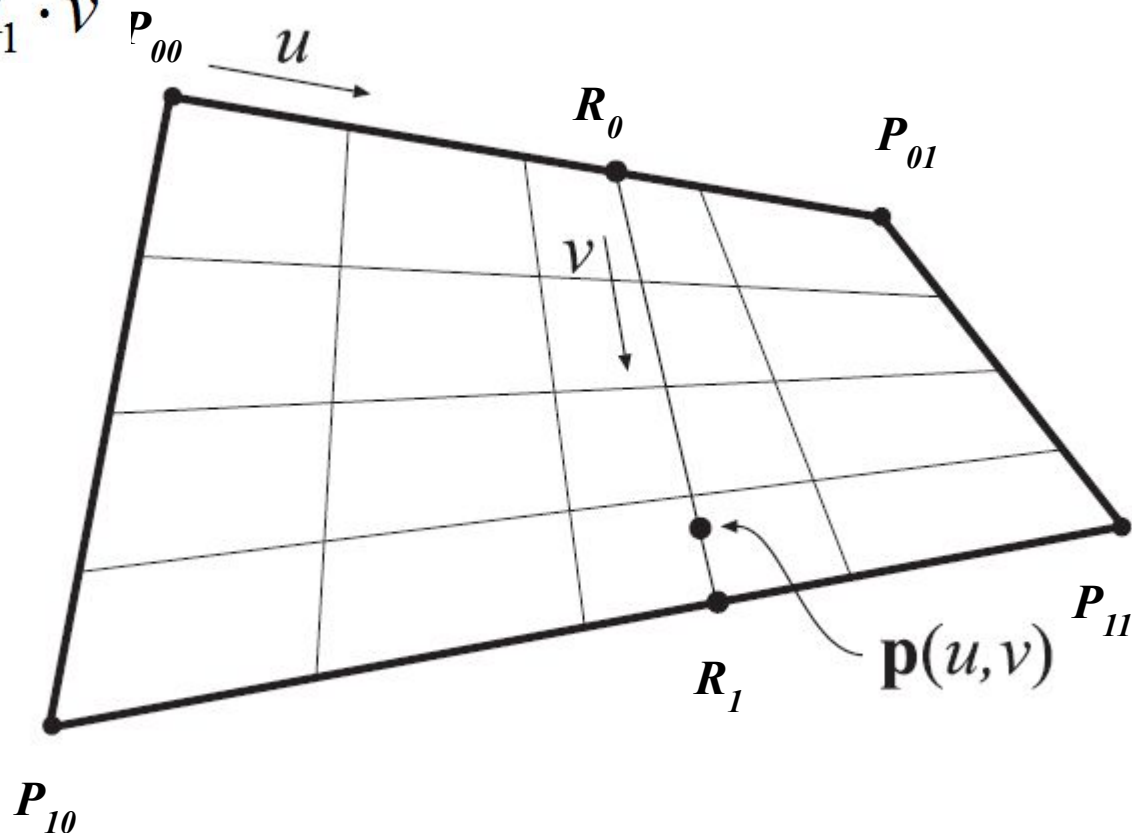
- ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ

$$\vec{P} = \vec{F}(u, v)$$

$$R_0 = P_{00} \cdot (1 - u) + P_{01} \cdot u$$

$$R_1 = P_{10} \cdot (1 - u) + P_{11} \cdot u$$

$$P(u, v) = R_0 \cdot (1 - v) + R_1 \cdot v$$

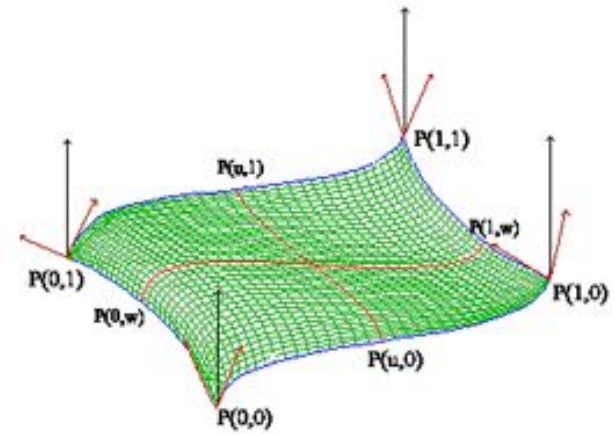


- Граничные кривые:

$$P(u,0), P(u,1), P(0,v) \text{ и } P(1,v)$$

- Билинейно смешиваем (учитывая повторение угловых точек):

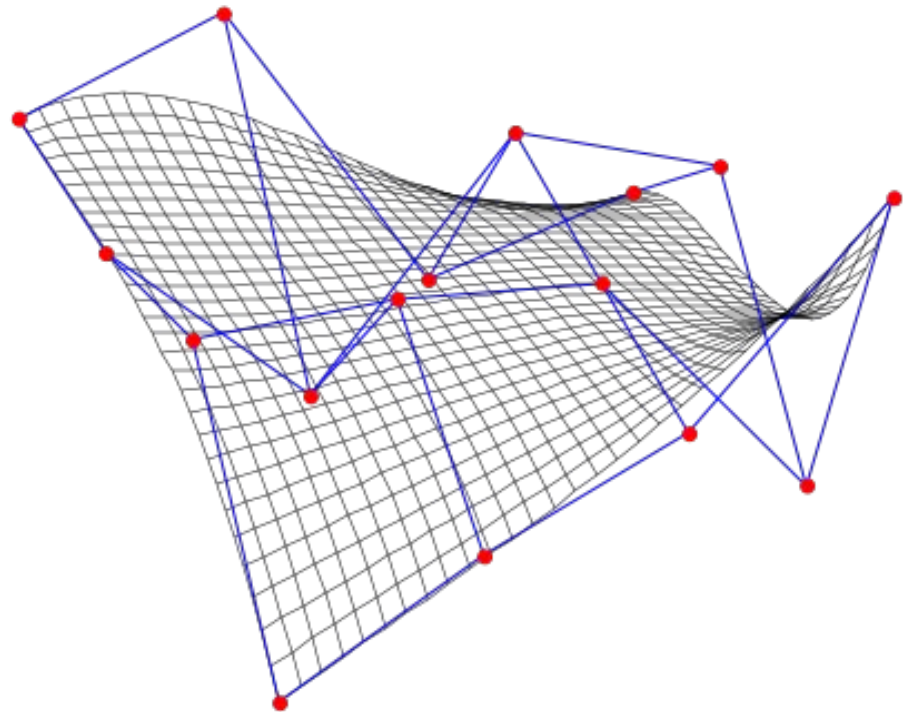
$$\begin{aligned}
 Q(u,v) = & P(u,0) \cdot (1-v) + P(u,1) \cdot v + \\
 & P(0,v) \cdot (1-u) + P(1,v) \cdot u \\
 & - P(0,0) \cdot (1-u) \cdot (1-v) - P(0,1) \cdot (1-u) \cdot v \\
 & - P(1,0) \cdot u \cdot (1-v) - P(1,1) \cdot u \cdot v
 \end{aligned}$$



$$B(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} \cdot \mathbf{b}_{j,m}(u) \cdot \mathbf{b}_{i,n}(v), \quad u, v \in [0, 1]$$

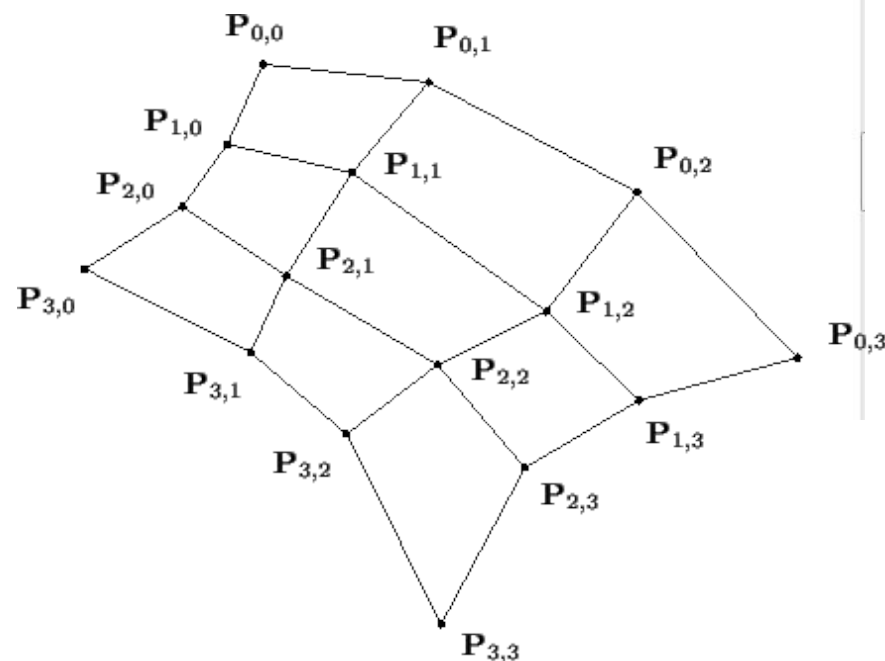
$$\mathbf{b}_{i,n}(t) = C_n^i \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i}$$

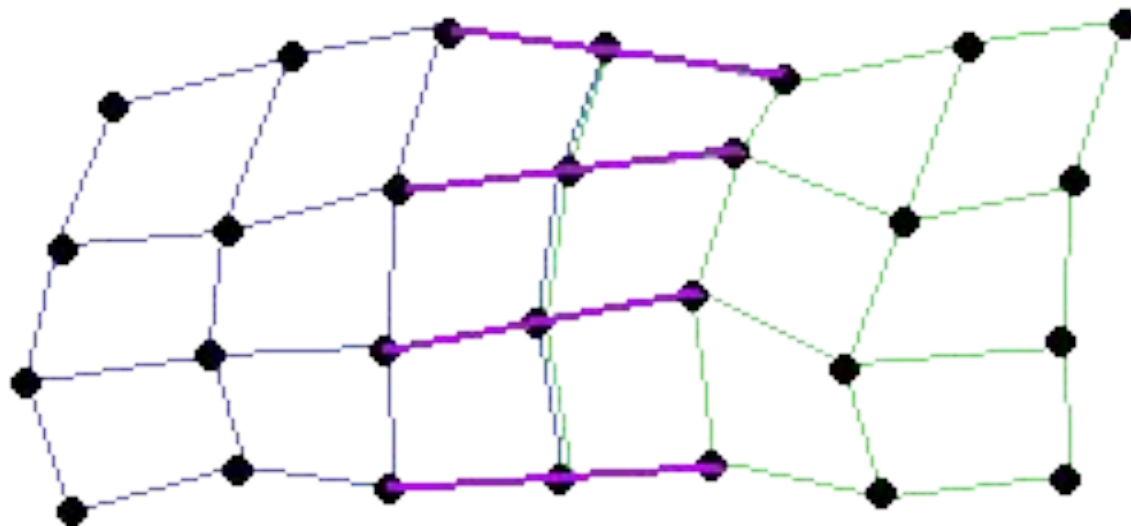
$$C_n^i = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

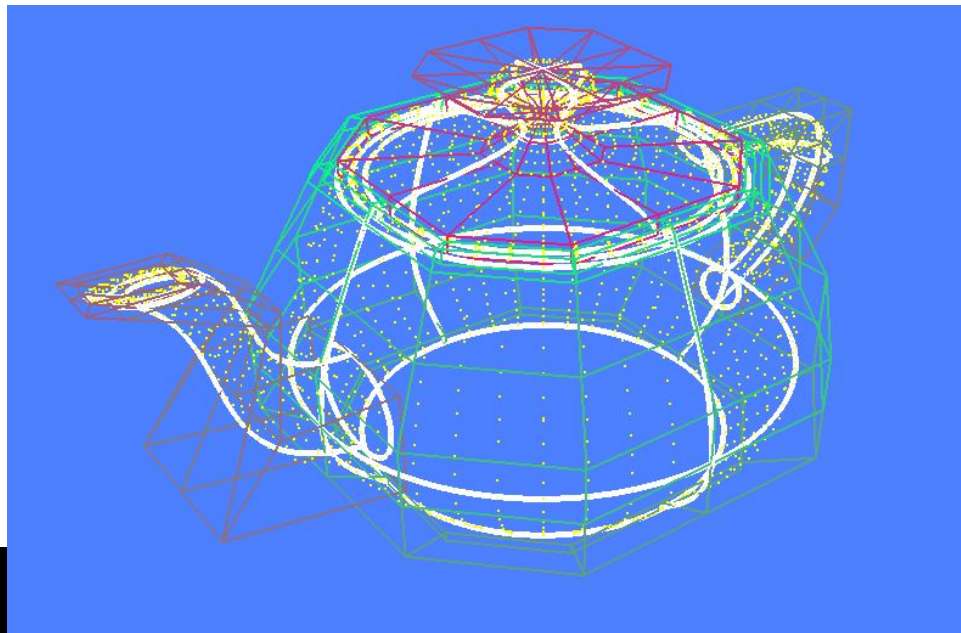


$$B(u, v) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \cdot M_B \cdot \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \cdot M_B^T \cdot \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M_B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$







$$B(u, v) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \cdot M \cdot \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \cdot M^T \cdot \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

uniform B-spline

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cubic Bezier

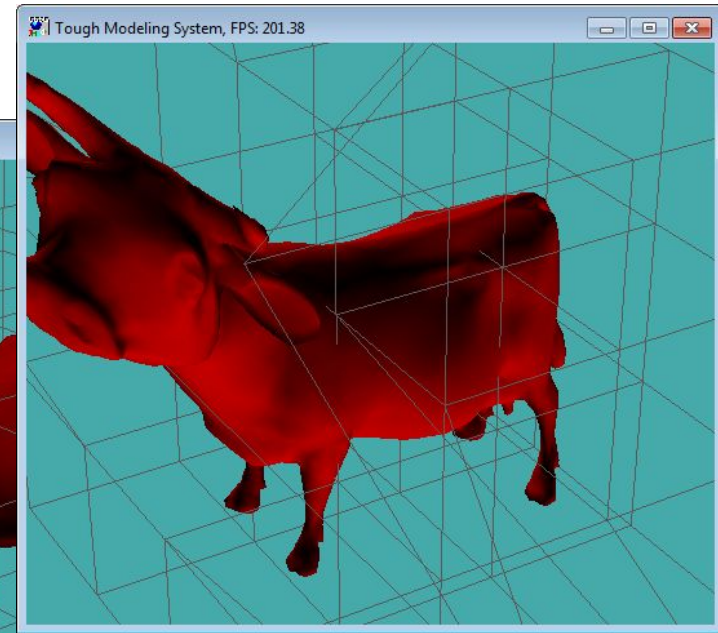
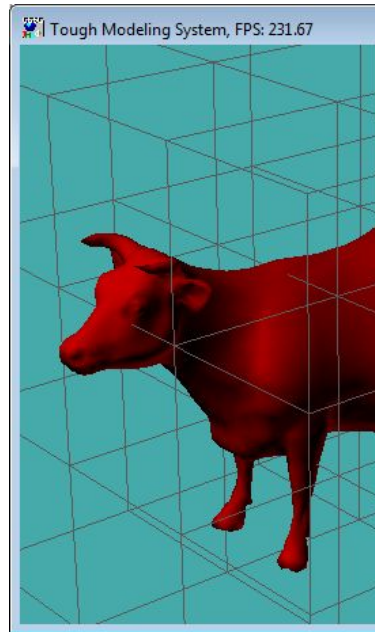
$$\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Catmull-Rom

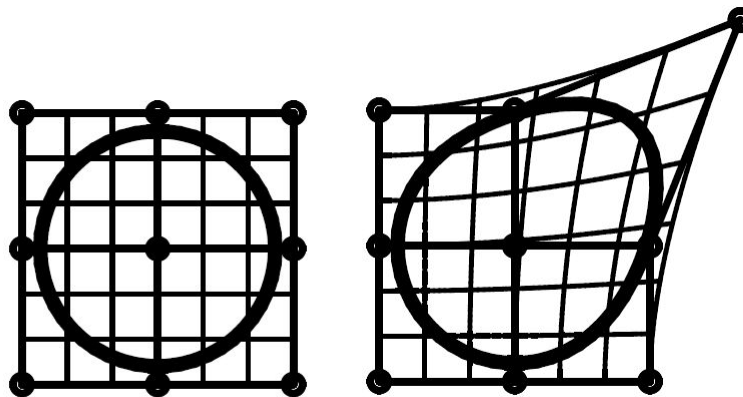
$$B(u, v, w) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l P_{ijk} \cdot \mathbf{b}_{k,l}(w) \cdot \mathbf{b}_{j,m}(u) \cdot \mathbf{b}_{i,n}(v), \quad w, u, v \in [0, 1]$$

$$\mathbf{b}_{i,n}(t) = C_n^i \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i}$$

$$C_n^i = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$



- **Практические задания (до 13.11.2011)**
 - Реализовать интерактивную среду демонстрации параметрических кубических кривых (выполнять интерполяцию по нескольким точкам, использовать uniform B-spline и сплайн Катмула-Рома). Дополнительное задание: реализовать изменение весов точек и визуализацию рациональными кривыми.
 - Реализовать интерактивную среду демонстрации FFD на плоскости для растрового изображения. Использовать биквадратную «сетку» (9 точек) Безье.



- David F. Rodgers, J. van Adams. ***"Mathematical Elements for Computer Graphics"***, 2nd ed., McGraw-Hill Publishing Company, 1990.
- Alan Watt, Mark Watt. ***"Advanced Animation and Rendering Techniques. Theory and Practice"***, ACM Press, Addison-Wesley Longman Limited, 1992.
- Е.Шикин, А.Плис. ***"Кривые и поверхности на экране компьютера"***. Москва: Диалог-МИФИ, 1996.
- Е.В.Шикин, М.М.Франк-Каменецкий. ***"Кривые на плоскости и в пространстве"***. Москва: "ФАЗИС", 1997.