БАЛТИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени И. КАНТА

РАЗДЕЛ I

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИСТЕМАХ СВЯЗИ

к.т.н. Олег Романович Кивчун

Калининград
2012

ЛЕКЦИЯ № 6

СИГНАЛЫ КАК ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

1. Метрические и линейные пространства.
2. Пространства со скалярным произведением.
3. Разложение сигналов в обобщённый ряд Фуре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная:

1. Теория электрической связи: Учеб. Для вузов / А.Г. Зюко, Д. Д. Кловский, В.И. Коржик, М. В. Назаров; Под ред. Д. Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 1998. – 433 с.

Дополнительная:

1. Прокис Дж. Цифровая связь: Пер. с англ. / Под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.
2. Бернард Скляр. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.
3. Сухоруков А.С. Теория электрической связи: Конспект лекций. Часть 1. – М.: МТУСИ, ЦЕНТР ДО, 2002. – 65 с.
4. Сухоруков А.С. Теория цифровой связи: Учебное пособие. Часть 2. – М.:МТУСИ, 2008. – 53 с.

1. Метрические и линейные пространства

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

МНОЖЕСТВО – совокупность определённых вполне различаемых объектов, рассматриваемых как единое целое.

Отдельные объекты, из которых состоит множество, называют **ЭЛЕМЕНТАМИ** множества.

Для обозначения конкретных множеств используют различные прописные буквы A,S,X… или прописные буквы с индексами A_1, A_2.

Для обозначения элементов множества в общем виде используют различные строчные буквы a,s,x… или строчные буквы с индексами a_1, a_2…

Для указания того, что некоторый элемент a является элементом множества S используется запись: $a \in S$. Множества бывают конечными и бесконечными. Множество называют **КОНЕЧНЫМ**, если число его элементов конечно. Множество называют **БЕСКОНЕЧНЫМ**, если оно содержит бесконечное число элементов.

Множество, наделённое структурой, называют **ПРОСТРАНСТВОМ**.

Можно дать другое определение пространства: множество объектов (любой физической природы), наделённых некоторым общим свойством. Свойства, которыми целесообразно наделять пространства сигналов, должны отражать наиболее существенные свойства реальных сигналов: T_0, E_c, P_c и т. д.

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

<u>МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО</u> – это пространство с подходящим образом определённым расстоянием между его элементами.
Само это расстояние, как и способ его определения называют метрикой и обозначают: $d(x, y)$.

Метрика должна представлять собой функционал: отображение любой пары элементов x и y множества на действительную ось должно удовлетворять аксиомам:

1. $d(x,y) \geq 0$ (равенство 0 при аксиома идентичности).
2. $d(x,y) = d(y,x)$ – аксиома симметрии.
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$– аксиома треугольника.

<u>ЛИНЕЙНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ</u> L над полем F называют множество элементов $X = (x_1, x_2, \dots x_n)$, называемых векторами, для которых заданы две операции: сложение векторов; умножение векторов на элементы из поля F.

Следующий шаг в совершенствовании структуры пространства сигналов – объединение геометрических и алгебраических операций путём введения действительного числа, характеризующего «размер» элемента в пространстве. Такое число называется <u>НОРМОЙ ВЕКТОРА</u> и обозначается $\|x\|$.

1. $\|x \leq 0\|$. 2. $\|\lambda, x\| = \|\lambda\| \cdot \|x\|$. 3. $\|x + y\| \geq \|x\| + \|y\|$.

2. Пространства со скалярным произведением

ВЕЩЕСТВЕННОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ – операция над двумя векторами, результатом которой является число (скаляр), не зависящее от системы координат и характеризующее длины векторов – сомножителей и угол между ними.

1. Если $(x, y) = 0$, то вектора x и y ортогональны.

2. Если $\{x_i\} \to (x_i, y_i) = \delta_{ij}$ – символ Кронекера: $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, система векторов – ортонормированная.

В линейном пространстве со скалярным произведением норму и метрику целесообразно определять через скалярное произведение. В ТЭС наибольший интерес представляют следующие ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА:

1. R_n – n-мерное вещественное евклидово пространство, в котором каждый вектор определяется совокупностью n его координат.
Скалярное произведение векторов в этом пространстве:

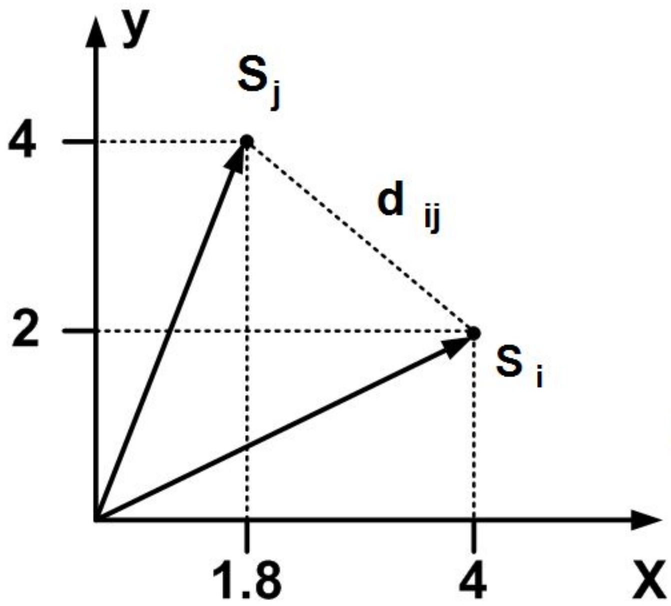
$$(x, y) = \sum x_i, y_i .$$

Оно порождает норму и расстояние:

$$\|x_i\| = \sqrt{\sum x_i^2} . \qquad d(x, y) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2} .$$

ПРИМЕР ОПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМЫ И МЕТРИКИ ЕВКЛИДА В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Заданы два вектора (сигнала) S_i и S_j, положение которых полностью определено их координатами c_i и c_j.



$$\|S_i\| = \left[\sum_{i=1}^{2} c_i^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 4{,}47$$

$$\|S_j\| = \left[\sum_{j=1}^{2} c_i^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(1{,}8)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 4{,}36$$

$$d_{ij} = \left[\sum_{k=1}^{2} (c_{ik} - c_{jk})^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(4 - 1{,}8)^2 + (4 - 2)^2} = 4{,}56$$

Расстояние d_{ij} между векторами определяет различимость сигналов. Чем больше расстояние (метрика), тем лучше различимы сигналы. Метрика Евклида применяется при декодировании свёрточных кодов с помощью алгоритма Витерби с мягким решением. Выигрыш от применения мягкого решения в отношении сигнал/шум по сравнению с жёстким решением составляет 2,5 дБ (при квантовании продетектированного сигнала на 8 уровней).

БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО ГИЛЬБЕРТА И ХЕМИНГА

2. $L_2(T)$ – бесконечномерное пространство Гильберта, которое образуют непрерывные комплексные или вещественные функции, заданные на интервале (0,T):

$$(x, y) = \int x(t) \cdot y^*(t)dt. \quad \|x\|^2 = \int |x(t)|^2 dt$$ **– квадрат нормы – это энергия**

сигнала, если под иметь ввиду напряжение (ток) на сопротивлении 1 Ом. Энергию разностного сигнала можно представить следующим выражением:

$$d^2(x, y) = \int [x(t) - y(t)]^2 dt.$$

В пространстве Гильберта определяется квадрат расстояния между любой парой сигналов (векторов). Величина $d^2(x,y)$ полностью характеризует различие между сигналами.

3. 2n – n-мерное пространство Хэмминга, которое образуют двоичные n-последовательности, широко используемые в системах связи.
Норма, метрика в этом пространстве:

$$\|x\| = \sum x_i;$$
$$d(x, y) = \sum |x_i \oplus y_i|,$$

где $\oplus$ – суммирование по модулю «2».

ПРИМЕР ОПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ХЕМИНГА

Задана кодовая комбинация (вектор в пространстве Хэмминга): 1011010. Определить норму.

$$\|\mathbf{x}\| = 1 + 0 + 1 + 1 = 0 + 1 = 0 = 4$$ **– норма данного вектора.**

Норма вектора в пространстве Хэмминга совпадает с количеством единиц в кодовой комбинации, т.е. с <u>ВЕСОМ КОДОВОЙ КОМБИНАЦИИ</u>.

2. Заданы две кодовые комбинации: 1001011 и 0110010. Определить расстояние (метрику) в пространстве Хэмминга между кодовыми комбинациями.

$$\mathbf{d(x,y)} = \sum \left|\mathbf{x_i} \oplus \mathbf{y_i}\right| \rightarrow \mathbf{1001011} \oplus \mathbf{0110010} = \mathbf{1111001} = \mathbf{5}$$

Метрика (расстояние) между кодовыми комбинациями равна. Метрика Хэмминга находит широкое применение при декодировании свёрточных кодов по алгоритму Витерби с жёстким решением. Чем больше метрика Хэмминга, тем сильнее различима кодовые комбинации.

3. Разложение сигналов в обобщённый ряд Фурье

РАЗЛОЖЕНИЕ СИГНАЛОВ В РЯД ФУРЬЕ

Для того, чтобы такое разложение существовало, фрагмент сигнала длительностью в один период должен удовлетворять условиям Дирихле:

1. **Не должно быть разрывов второго рода (с уходящими в бесконечность ветвями функции).**
2. **Число разрывов первого рода (скачков) должно быть конечным.**
3. **Число экстремумов должно быть конечным.**

Произвольный периодический сигнал $x(\lambda)$ выражается через бесконечное число гармоник с возрастающими частотами:

$$x(\lambda) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos\lambda + a_2\cos 2\lambda + a_3\cos 3\lambda + \ldots + b_1\sin\lambda + b_2\sin 2\lambda + b_3\sin 3\lambda \ldots,$$

где $\cos\lambda$ и $\sin\lambda$ – основные члены; $\cos n\lambda$ и $\sin n\lambda$ – гармонические члены;

a_n и b_n – коэффициенты гармоник; $\frac{1}{2}a_0$ – постоянный член или составляющая постоянного тока.

Введём в пространство Гильберта базис: $\{\Psi_i(t)\}$. Для упрощения будем полагать, что он ортонормированный. Тогда любую функцию X(t) из пространства Гильберта можно представить через проекции C_i вектора x на оси базиса обобщённым рядом Фурье:

$$X(t) = \sum C_i \cdot \Psi_i(t)dt; \qquad C_i = (x, \Psi_i) = \int x(t)\cdot \Psi_i(t)dt.$$

Таким образом, в результате изучения лекции № 6 удалось сделать следующие выводы:

- **сообщения, сигналы и помехи как векторы (точки) в линейном пространстве можно описать через набор координат в заданном базисе;**
- **для ТЭС наибольший интерес при отображении сигналов представляет n-мерное пространство Евклида , бесконечное пространство Гильберта и дискретное пространство Хэмминга. В этих пространствах вводится понятие скалярного произведения двух векторов (x,y);**
- **любую непрерывную функцию времени как элемент можно представить обобщенным рядом Фурье по заданному ортонормированному базису.**

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прокис Дж. Цифровая связь: Пер. с англ. / Под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.
2. Бернард Скляр. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.
3. Сухоруков А.С. Теория электрической связи: Конспект лекций. Часть 1. – М.: МТУСИ, ЦЕНТР ДО, 2002. – 65 с.
4. Сухоруков А.С. Теория цифровой связи: Учебное пособие. Часть 2. – М.: МТУСИ, 2008. – 53 с.
5. Аджемов А.С. Мир информационной реальности. – М.: ИРИАС, 2006. – 296 с.
6. Каганов В.И., Битюков В.К. Основы радиоэлектроники и связи: Учеб. пособие для вузов. – М.: Горячая линия-Телеком, 2007. – 542 с.
7. Стеценко О.А. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник. – М.: Высш. шк., 2007. – 432 с.
8. Санников В.Г. Сборник задач по курсу «Теория электрической связи»: Учеб. пособие. Часть 1. – М.: МТУСИ, 1992. – 62 с.
9. Санников В.Г. Сборник задач по курсу «Теория электрической связи»: Учеб. пособие. Часть 2. – М.: МТУСИ, 2001. – 65 с.
10. Санников В.Г. Дифференциальная импульсно-кодовая модуляция: Учеб. пособие. – М.: МТУСИ, 2006. – 56 с.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!