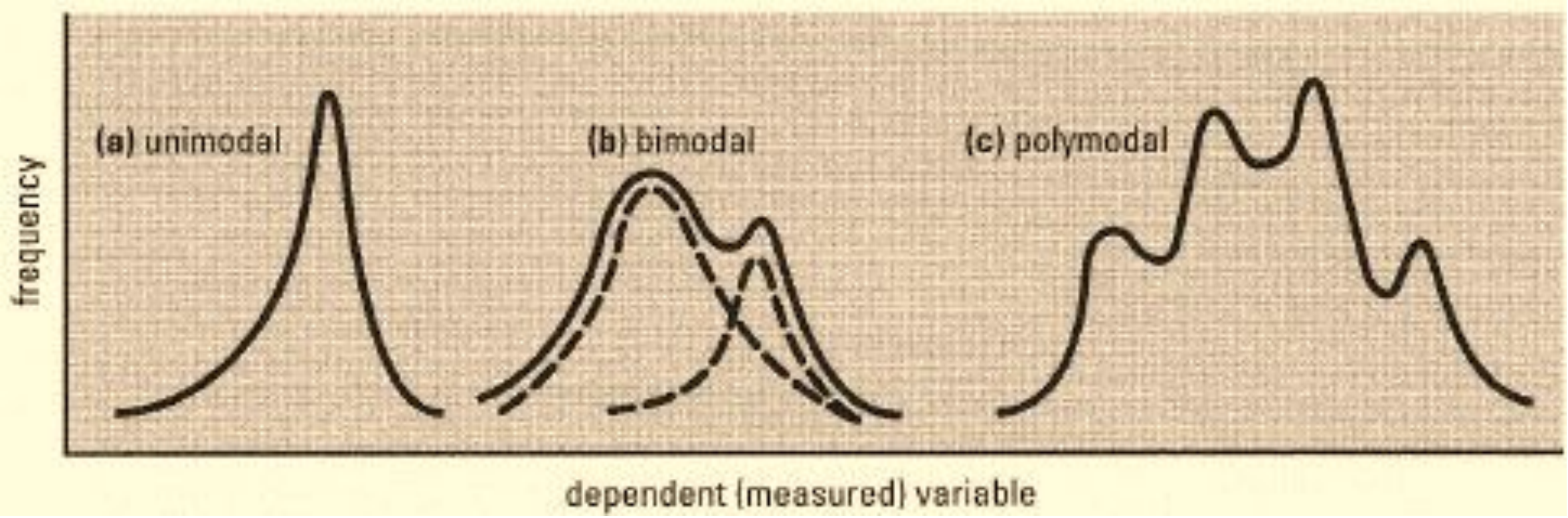
Беседы о прикладной статистике

Семинар 3. Меры центральной тенденции. Меры разброса. Нормальное распределение

Фастовец И. А.

Меры центральной тенденции. Мода

- Мода – пик, локальный максимум распределения



Среднее

- Сумма всех элементов, разделенная на количество этих элементов
- В случае нормального распределения является *несмещенной оценкой* среднего генеральной совокупности

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$$

Некоторые свойства среднего

- Если ко всем элементам прибавить одно и то же число, то и к среднему арифметическому будет прибавлено то же число

$$\bar{x}' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + c) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c = \bar{x} + \frac{nc}{n} = \bar{x} + c.$$

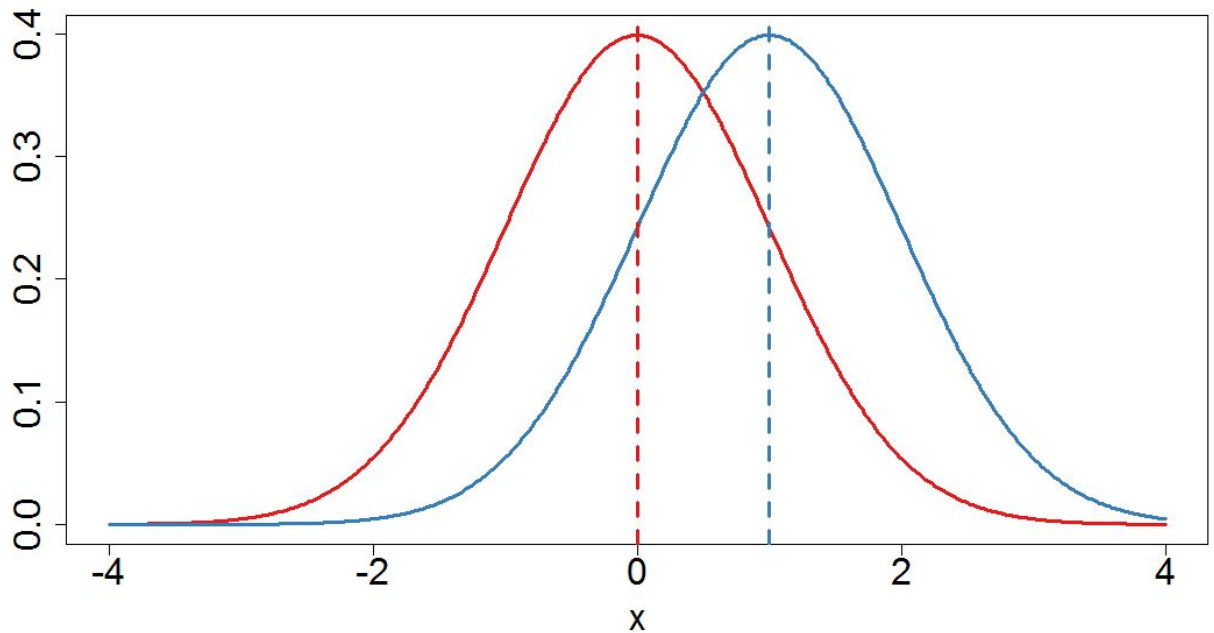
- Если все элементы умножить (разделить) на одно и то же число, то среднее арифметическое умножится (разделится) на то же число

$$\bar{x}' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot c) = c \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = c \cdot \bar{x}.$$

Некоторые свойства среднего

- Сумма отклонений элементов от их среднего арифметического равна нулю

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\bar{x}=n\bar{x}-n\bar{x}=0.$$

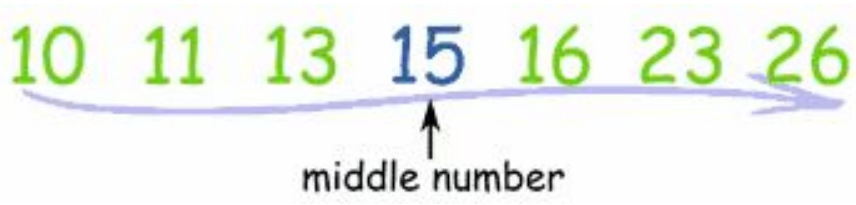


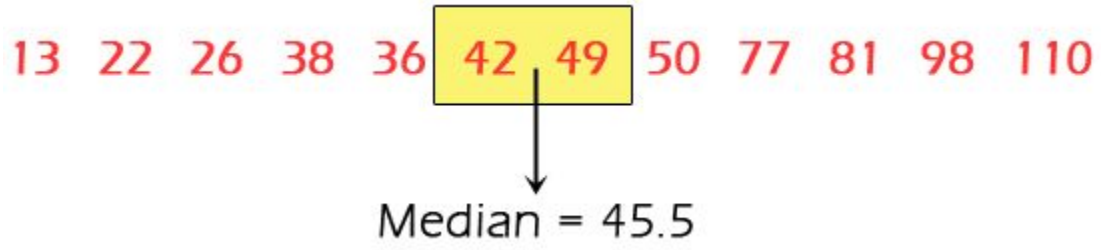
Медиана

Средняя точка распределения. Половина наблюдений больше, а половина меньше медианы

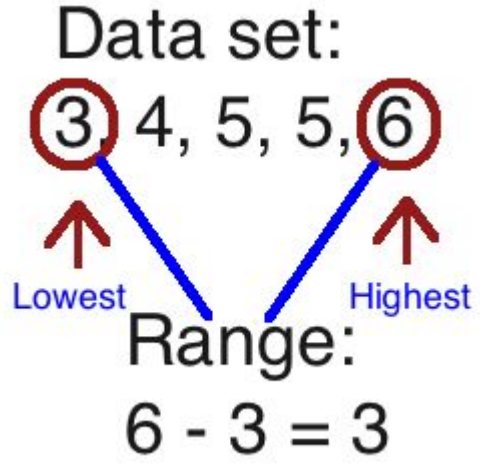
Как вычислить медиану:

- Проранжировать наблюдения от меньшего к большему
- Если n нечетное, то медиана – центральный элемент в ранжированном списке
- Если n четное, то среднее арифметическое двух центральных элементов





Наиболее встречающиеся меры разброса



- Размах – разница между наибольшим и наименьшим значениями. Недостаток – не характеризует распределение целиком, а только крайние значения
- Среднее абсолютное отклонение:

$$\text{average deviation} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |(x_i - \bar{x})|}{n}$$

- Дисперсия и стандартное отклонение

Sample Variance

$$s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Sample Standard Deviation

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

- Межквартильный интервал (IQR – interquartile range)
- Медианное абсолютное отклонение (MAD)

Дисперсия и стандартное отклонение

- Дисперсия (s^2, σ^2) – средний квадрат отклонений от среднего арифметического. Стандартное отклонение (СО) – это корень из дисперсии

Sample Variance

$$s^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n - 1}$$

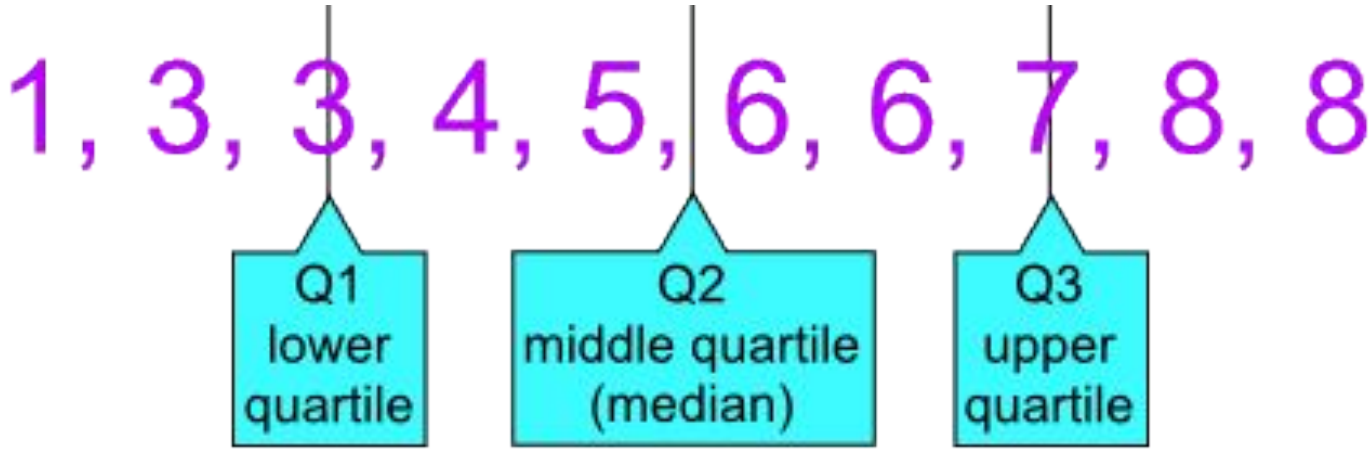
Sample Standard Deviation

$$s = \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

- Дисперсия и СО по выборке оценивается с учетом степеней свободы (n-1). Только тогда они являются *несмещенными оценками* σ^2 и σ генеральной совокупности
- Дисперсия и стандартное отклонение используют только вместе со средним (не с медианой!!!)

Квартили

- Нижний (первый) квартиль Q1 – это медиана левой от медианы группы значений в упорядоченном списке. 25% значений меньше Q1
- Верхний (третий) квартиль Q3 – это медиана правой от медианы группы значений. 25% значений больше Q3
- Второй квартиль Q2 – он же медиана



IQR и правило 1.5IQR

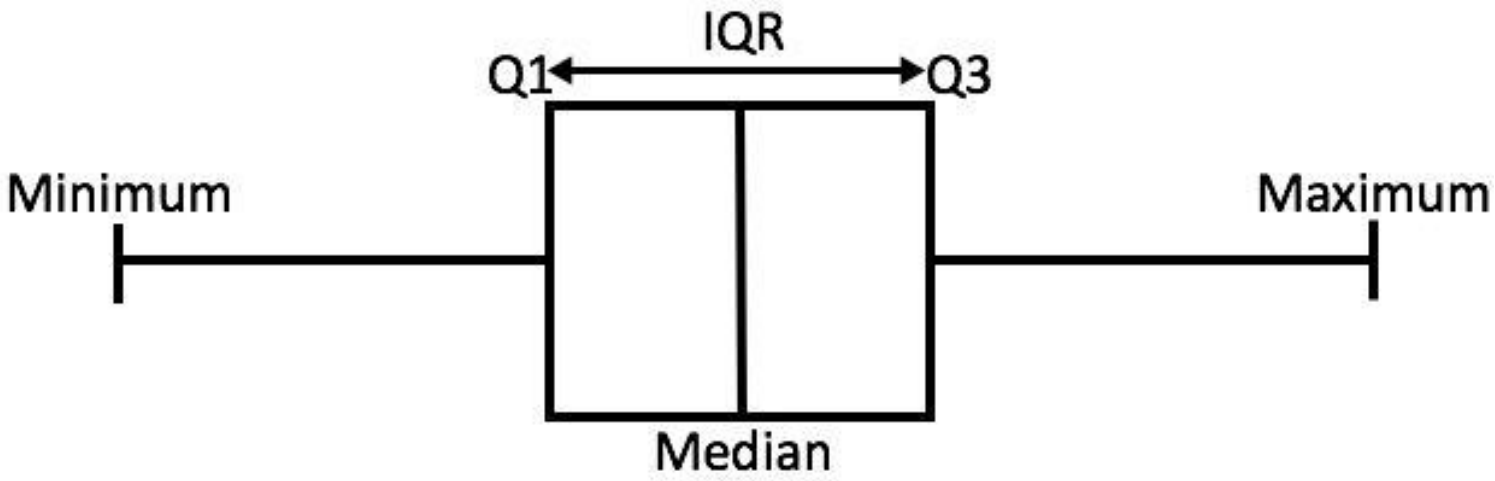
- Межквартильный интервал – одна из мер разброса
- Вычисляется как разница третьего и первого квартилей Q3-Q1
- 1.5IQR – правило нахождения выбивающихся значений
- Если значение находится на расстоянии более 1.5IQR над Q3 или ниже Q1, то это потенциальный выброс

- Five-number summary – непараметрическая форма представления центральной тенденции и разброса распределения:

  Минимум – Q1 – Медиана – Q3 – Максимум

Боксплот

- Диаграмма для представления five-number summary
- В классическом виде коробочка это квартили, а усики – это размах



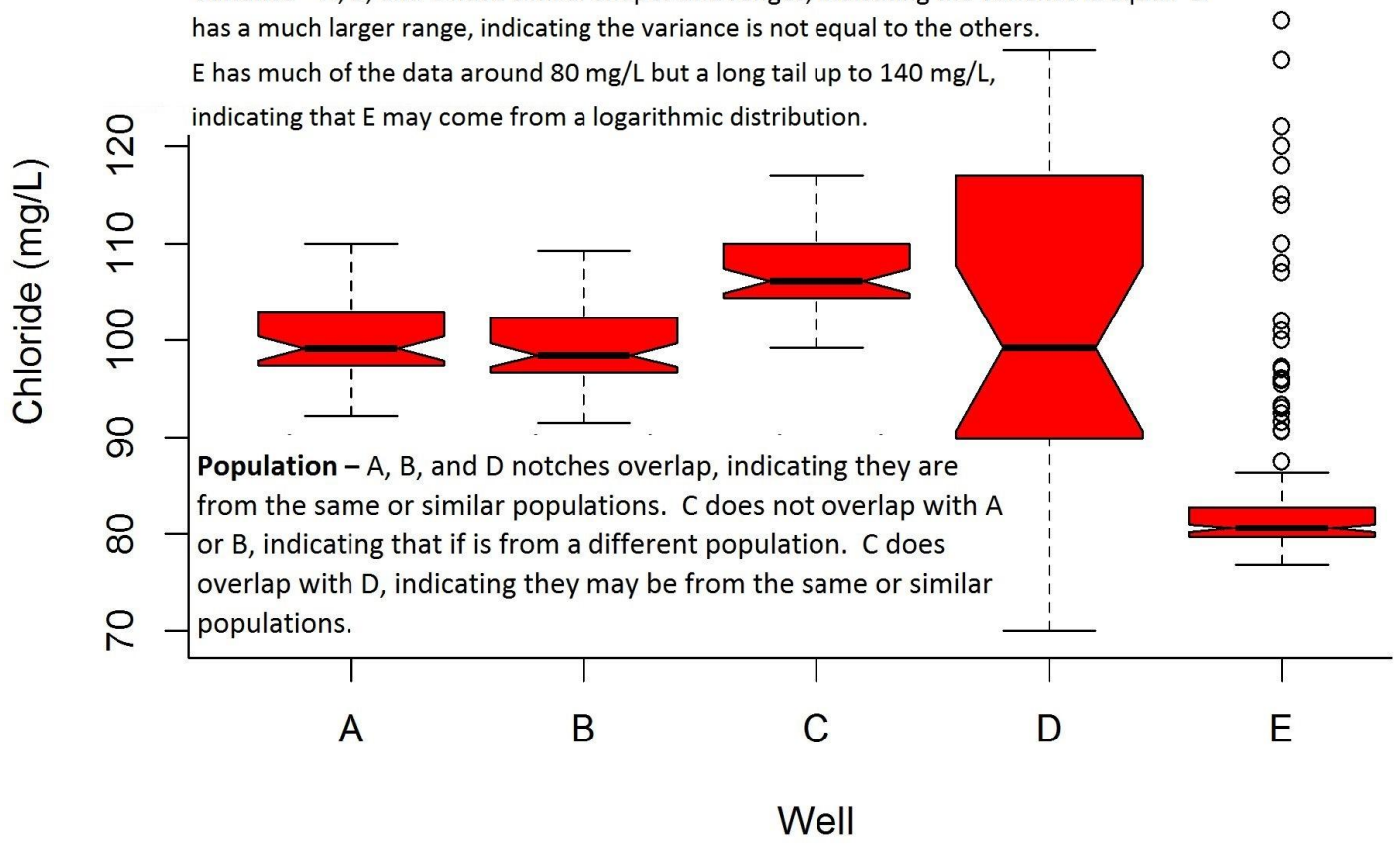
Модифицированный боксплот

- В модифицированном виде усики – это 1.5IQR, точки – выбивающиеся значения, а доверительный вырез или алмаз – примерный доверительный интервал для медианы, рассчитываемый как $\pm 1.75 \times \frac{IQR}{\sqrt{n}}$
- Считается, что если вырезы (алмазы) не пересекаются, то имеются значимые различия

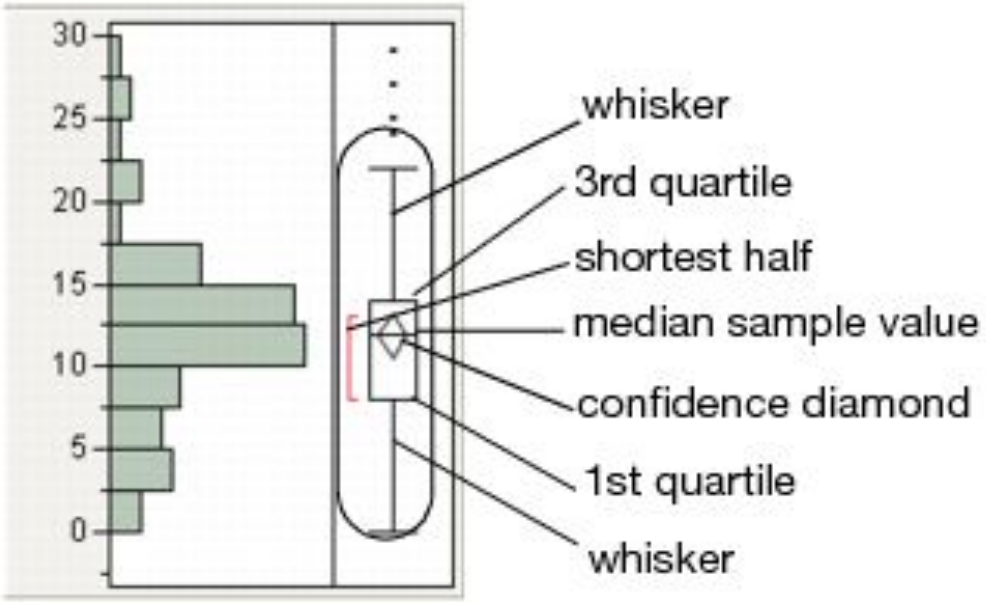
Модифицированный боксплот

Variance – A, B, and C have similar shapes and ranges, indicating the variance is equal. D has a much larger range, indicating the variance is not equal to the others.

E has much of the data around 80 mg/L but a long tail up to 140 mg/L, indicating that E may come from a logarithmic distribution.



Population – A, B, and D notches overlap, indicating they are from the same or similar populations. C does not overlap with A or B, indicating that if is from a different population. C does overlap with D, indicating they may be from the same or similar populations.



Медианное абсолютное отклонение (MAD)

- Медиана модулей отклонений от медианы

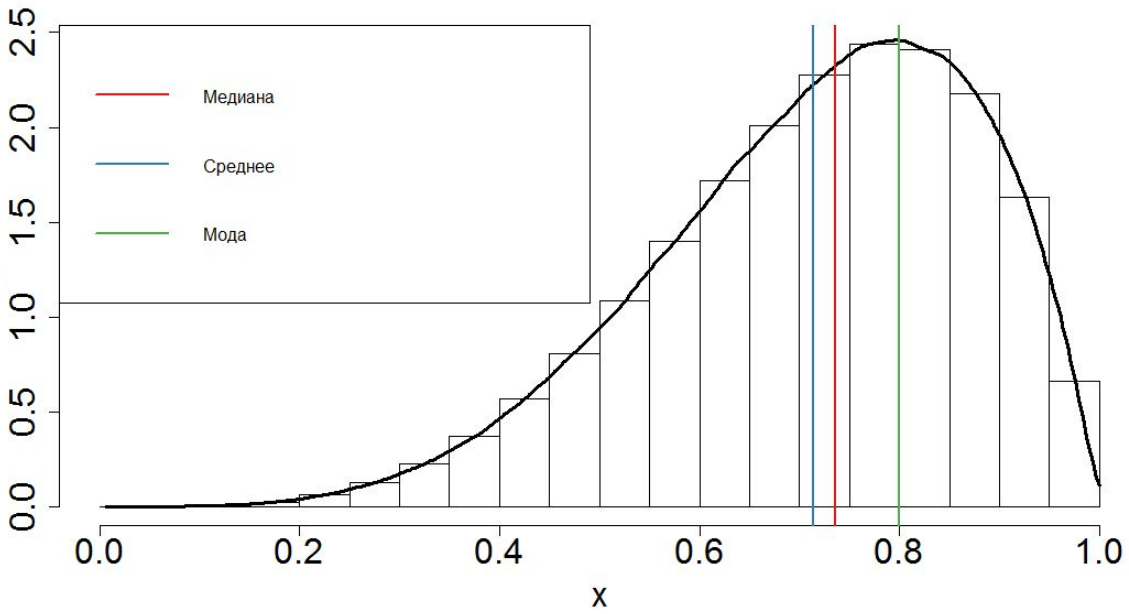
$$\mathrm{MAD} = \mathrm{median}(\ |X_i - \mathrm{median}(X)|\ )$$

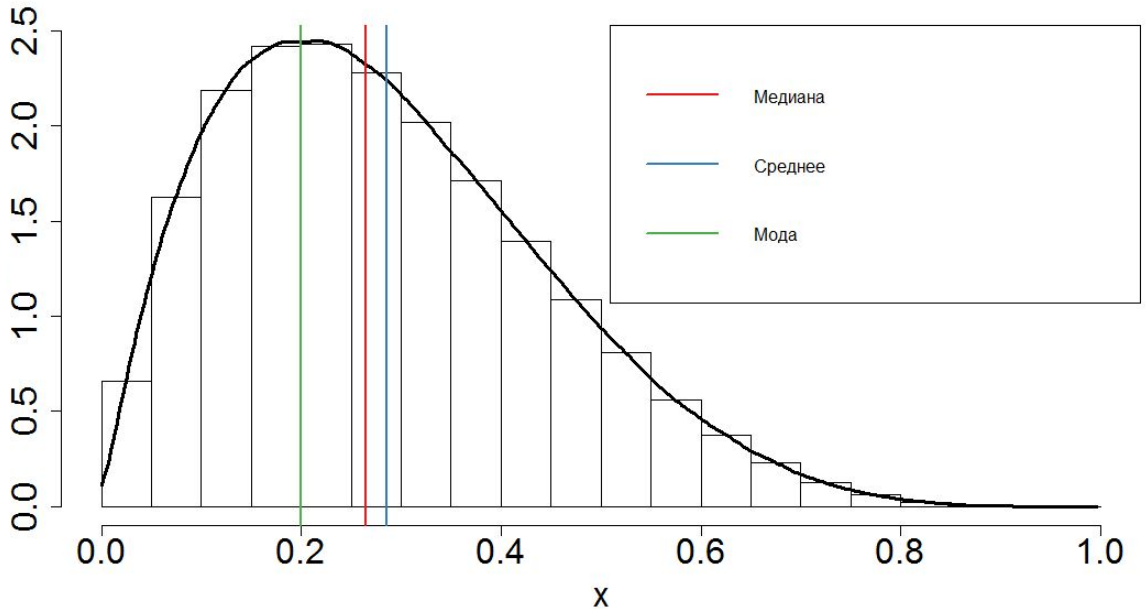
- Часто умножают на коэффициент 1.4826 . В таком случае представляет собой оценку стандартного отклонения σ, как-будто распределение является нормальным

Чувствительность к выбросам

- Различные меры центральной тенденции и разброса характеризуются различной устойчивостью к единичным выбивающимся значениям
- Среднее и особенно дисперсия (стандартное отклонение) являются чувствительными мерами
- Медиана, IQR и MAD характеризуются гораздо меньшей чувствительностью

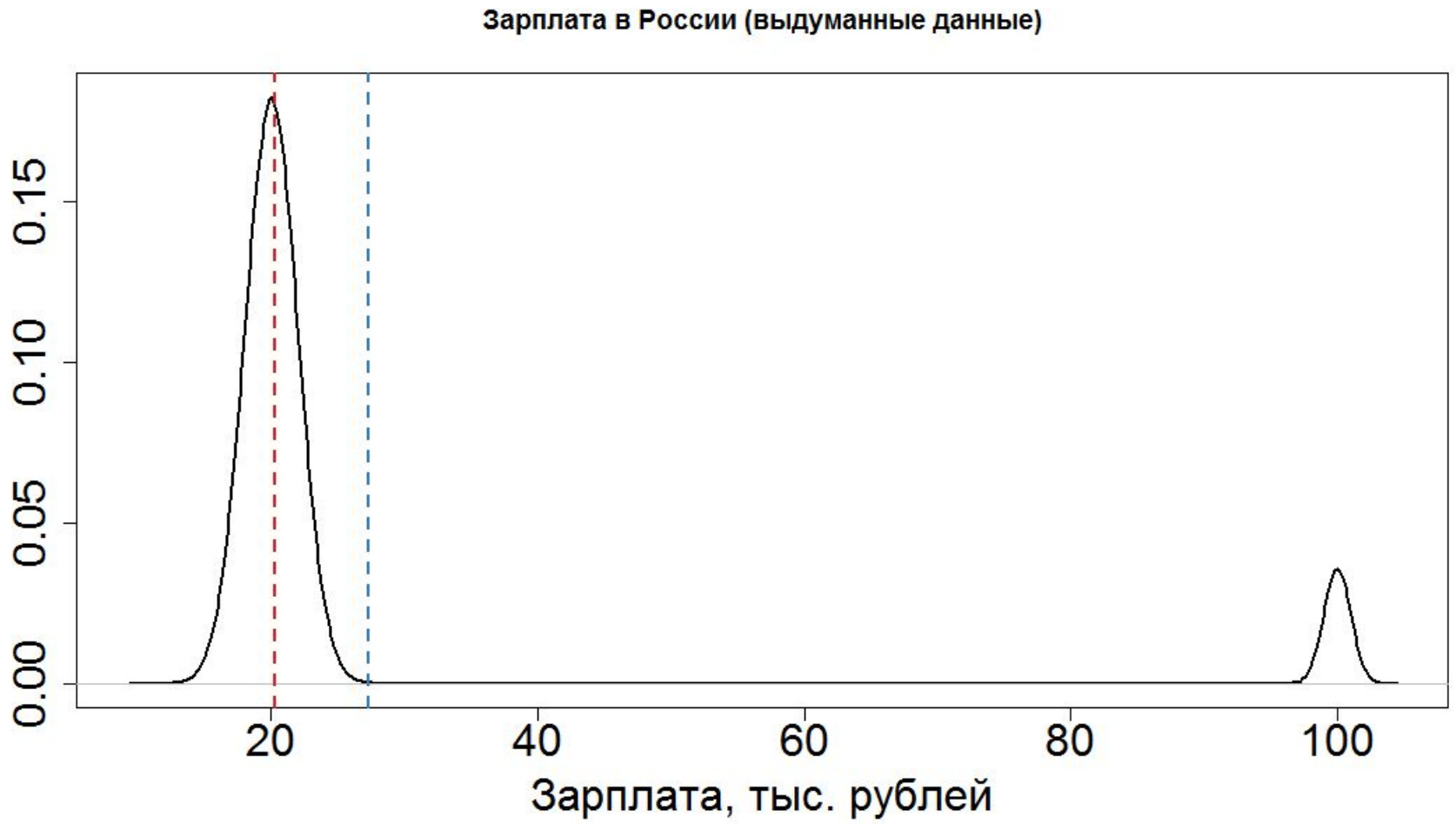
Среднее, медиана и мода в скошенном унимодальном распределении





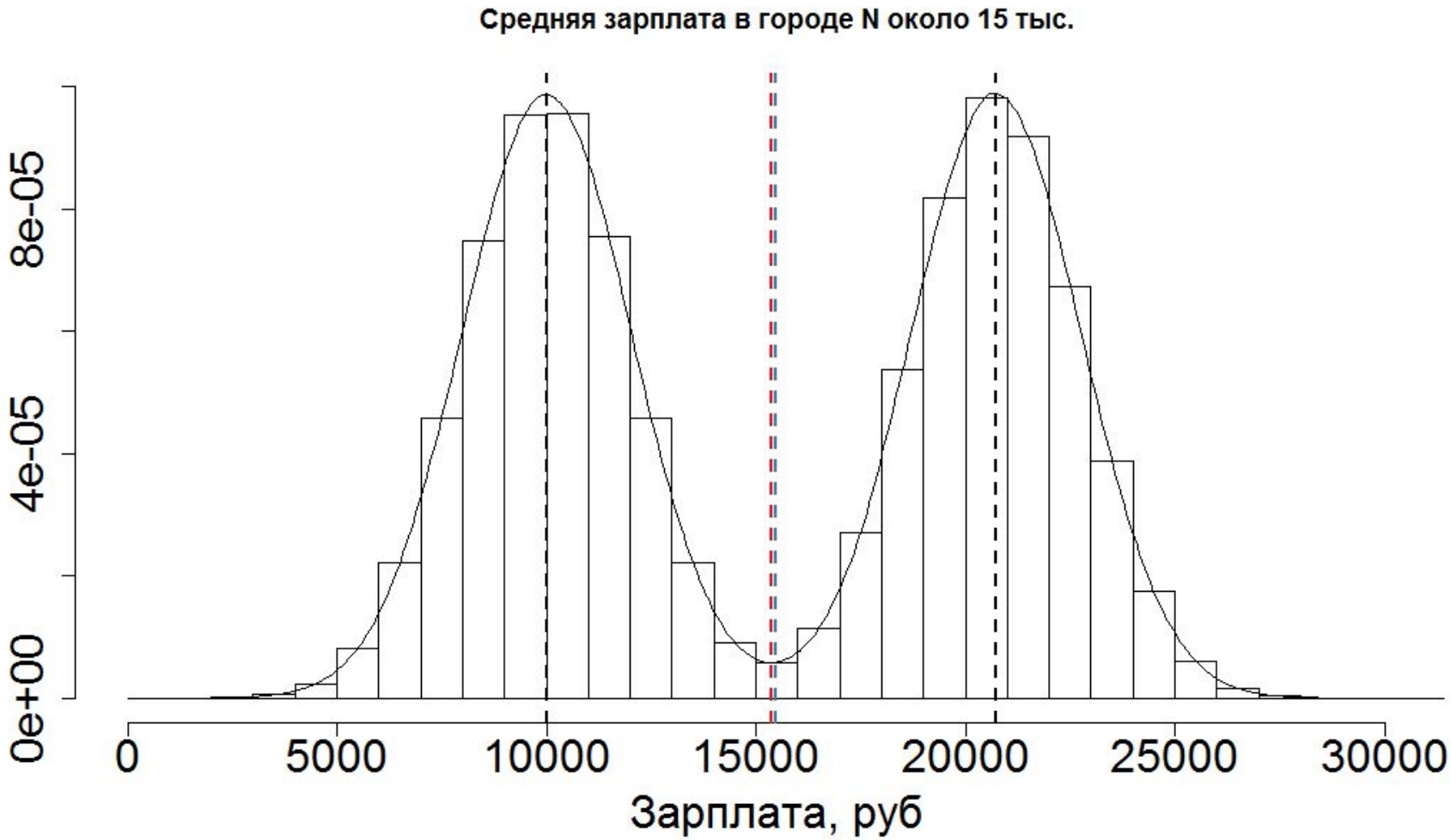
Сильные выбросы

- Средняя зарплата 27.3 тысяч рублей (s: ± 23 тыс.)
- Медианная зарплата 20.2 тысяч рублей (MAD: ± 2.25 тыс.)
- Реальный левый пик: 20 ± 2 тыс.



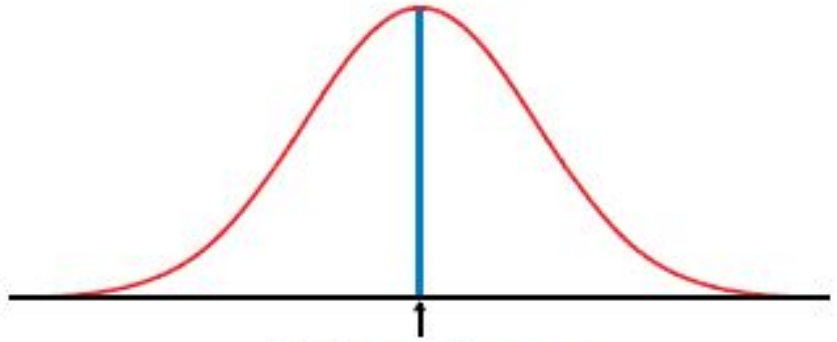
Внимание к модальности!

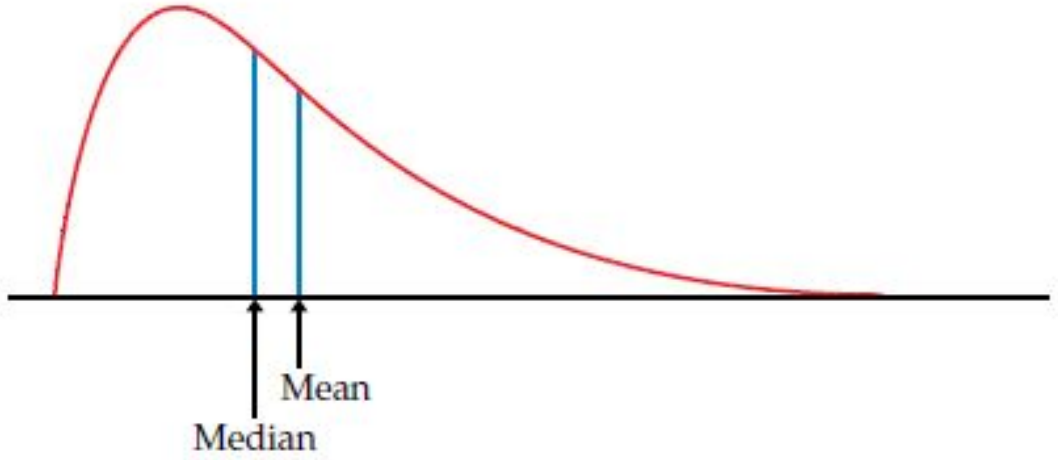
- Среднее и медиана



Кривые плотности вероятности

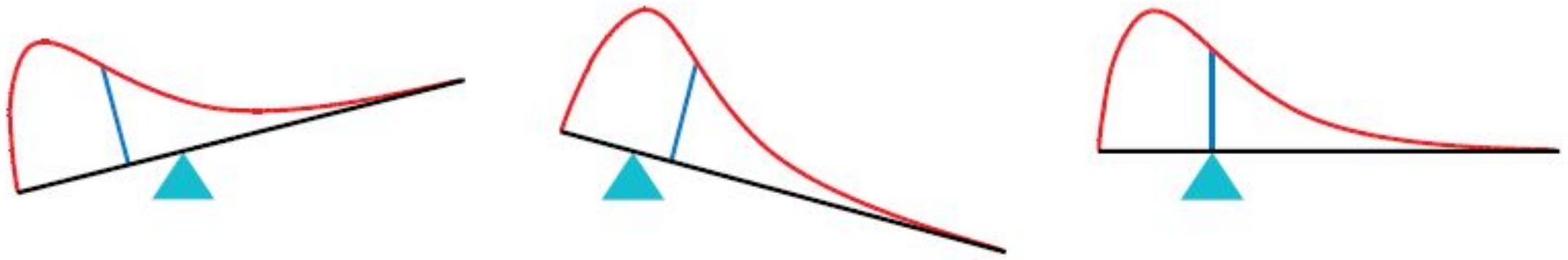
- Описывают общую картину распределения. Площадь под кривой в некотором интервале отражает долю от всех наблюдений, попадающих в этот интервал
- Находится всегда выше горизонтальной оси или на ней
- Имеет площать под ней, равную 1





Среднее и медиана в контексте кривых плотности вероятности

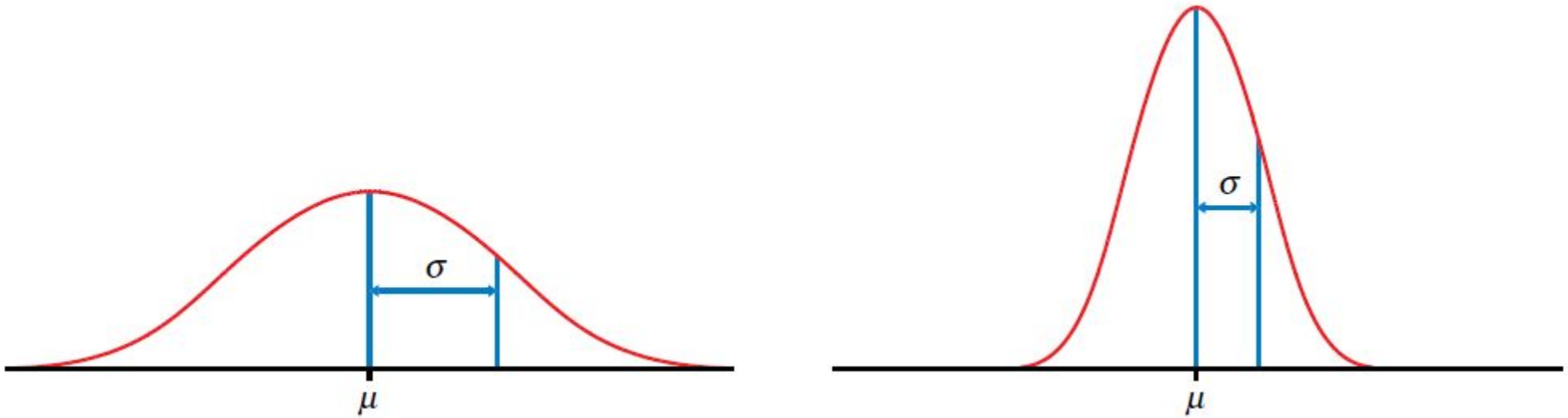
- Медиана делит площадь под кривой плотности вероятности на две равные части по 0.5
- Среднее является «точкой баланса» кривой. Стремится располагаться у более вытянутого хвоста



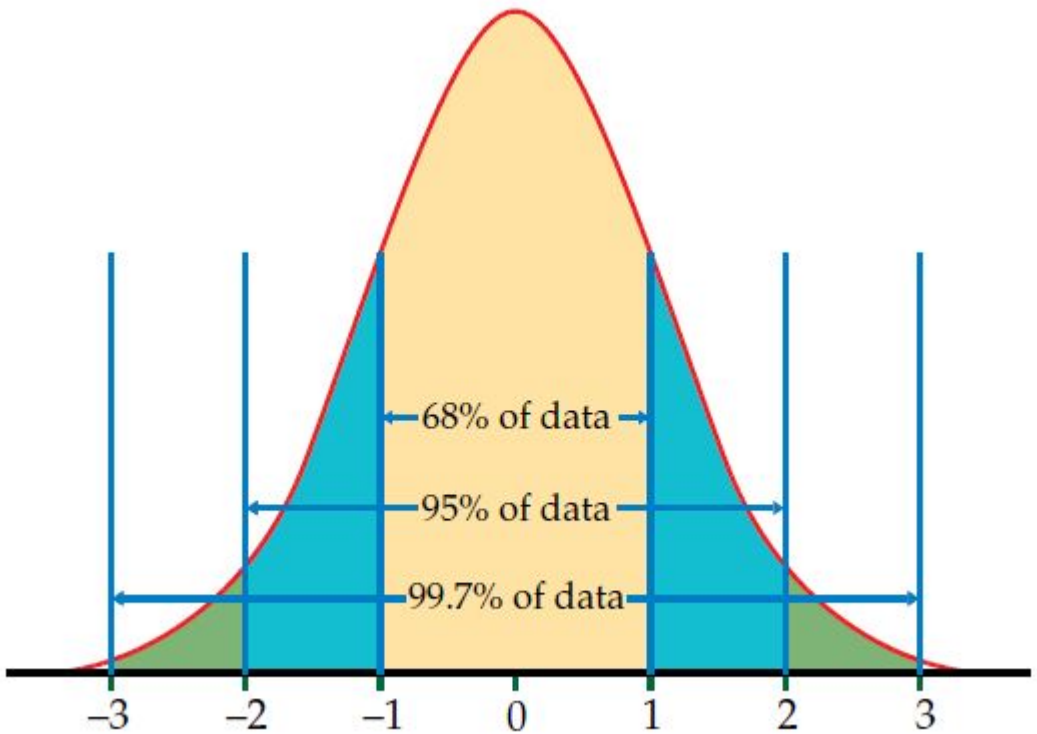
Плотность нормального распределения

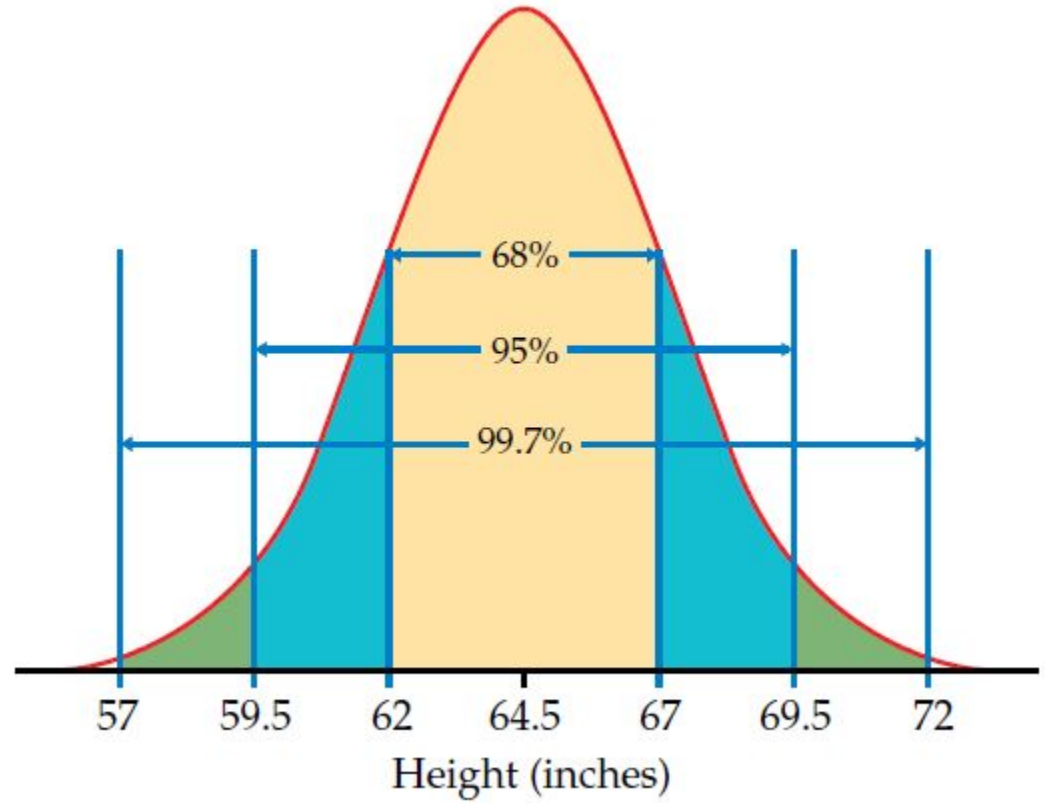
- Куполообразное, симметричное распределение
- Задается двумя параметрами: среднее (μ) и стандартное отклонение (σ). Параметры идеального распределения пишутся греческими буквами, как и параметры генеральной совокупности

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

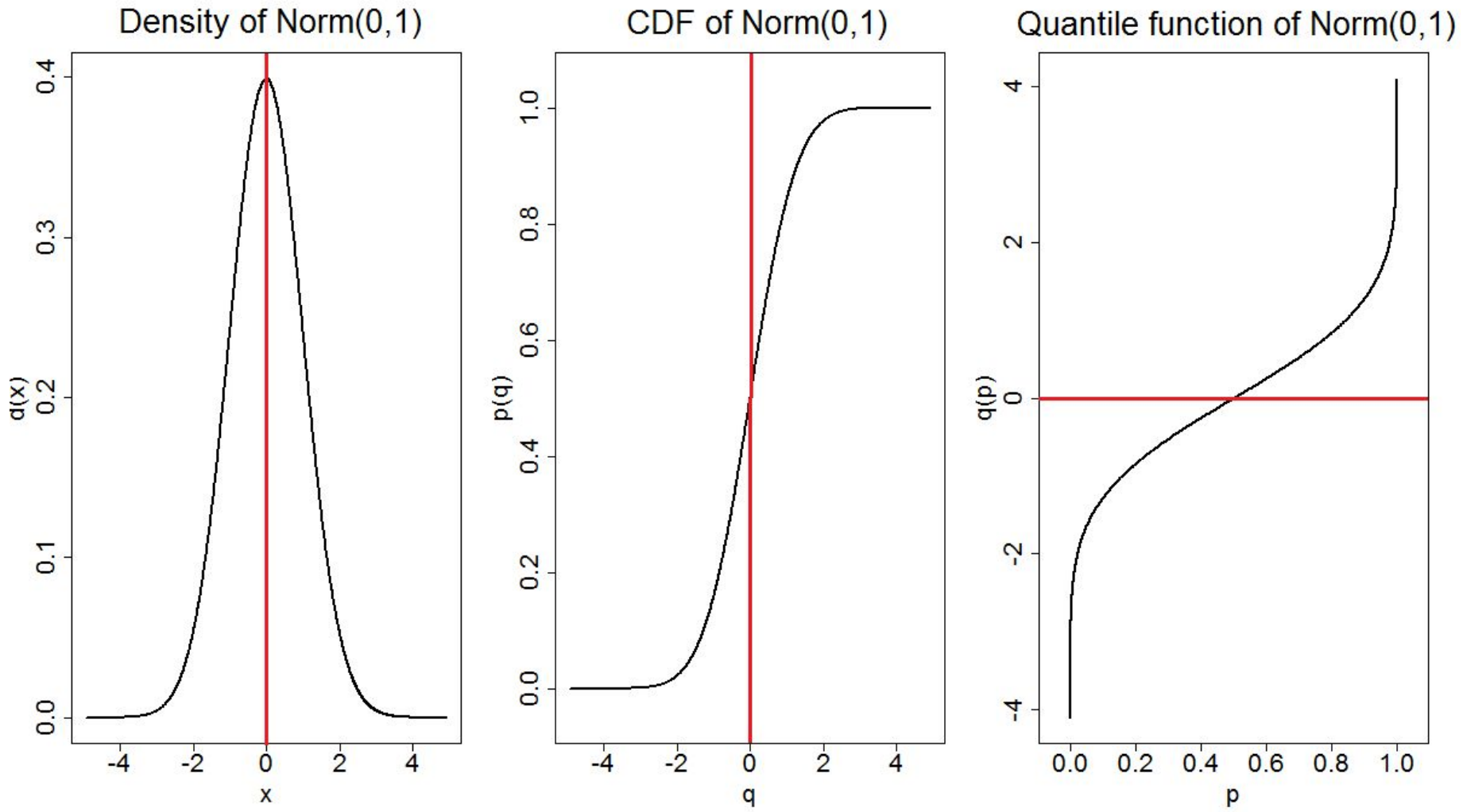


Правило 68-95-99.7
(трех сигм)





Плотность (PDF) и интегральная функция распределения (CDF)



На следующем семинаре

- Стандартизация и z-шкала
- Параметрические доверительные интервалы
- Проверка гипотез: t-тесты и ранговые тесты Уилкоксона