***Тема 3. Нелинейная регрессия*.**

1. Примеры нелинейной регрессии.
2. Методы преобразования полиноминального уравнения регрессии.
3. Преобразование экспоненциальной функции.
4. Коэффициенты эластичности для нелинейных уравнений регрессии.

Нелинейные регрессии

- Нелинейная регрессия
  - Нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам
  - Нелинейные по оцениваемым параметрам

Нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам

- Полиномы
- Гипербола
- Полулогарифмическая функция

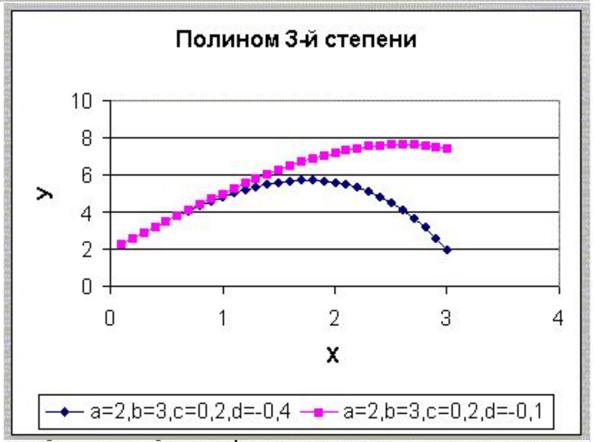
Нелинейные по оцениваемым параметрам

- Степенная
- Показательная
- Экспоненциальная

полиномы разных степеней

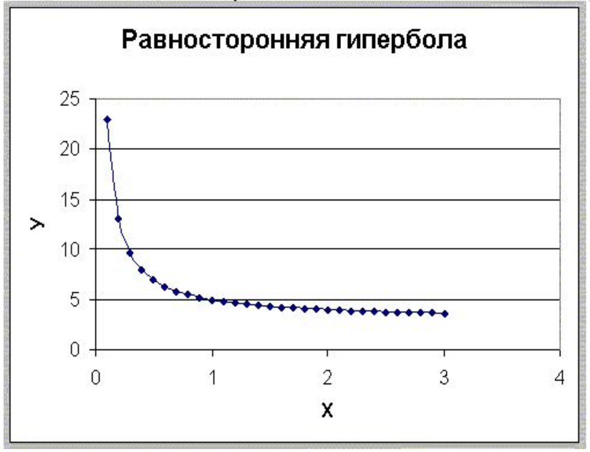
$$y = a + bx + c^2 + \varepsilon,$$

$$y = a + bx + cx + dx^3 + \varepsilon,$$

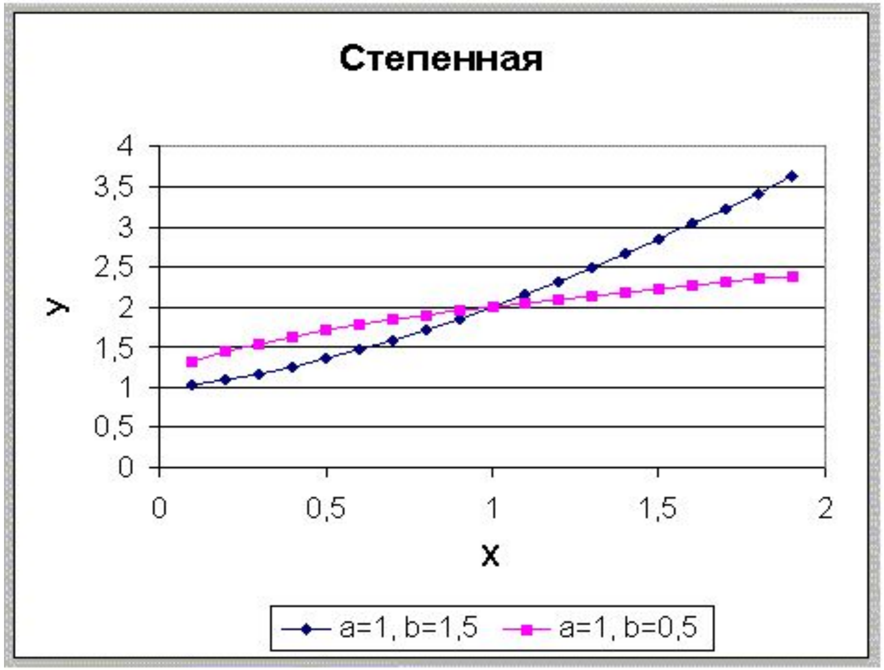


равносторонняя гипербола

$$y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon;$$

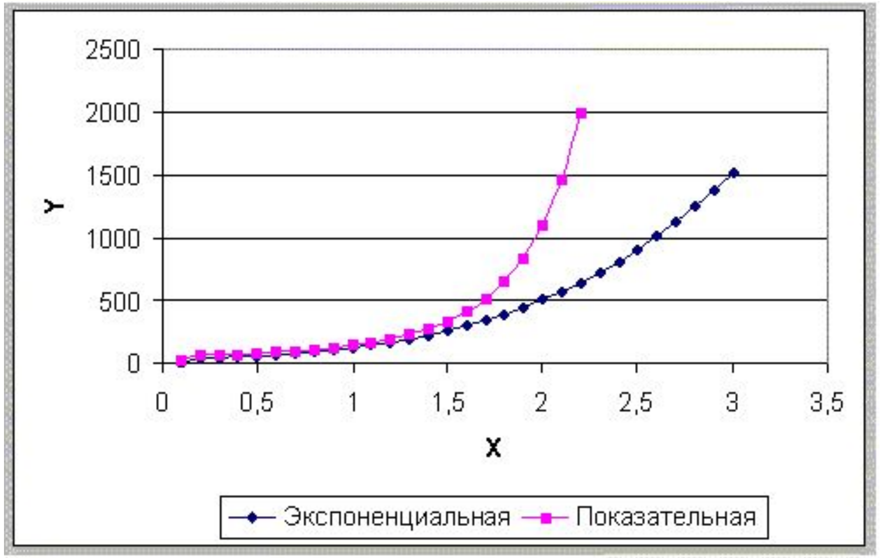


степенная $y = ax^b\,\varepsilon$



показательная $y = ab^x\,\varepsilon$

экспоненциальная $y=e^{a+bx}\varepsilon$



В параболе второй степени

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x_2 + \varepsilon$$

заменяя переменные $x_1 = x$, $x_2 = x^2$, получим двухфакторное уравнение линейной регрессии:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \varepsilon$$

для оценки параметров которого используется МНК.

Соответственно для полинома третьего порядка

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \varepsilon,$$

при замене $x = x_1$, $x^2 = x_2$, $x^3 = x_3$ получим трехфакторную модель линейной регрессии:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \varepsilon,$$

Для полинома k-порядка

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \varepsilon$$

получим линейную модель множественной регрессии с k объясняющими переменными:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_k x_k + \varepsilon$$

Приравниваем к нулю первую производную параболы второй степени.

$$\hat{y}_x = a + bx + c \cdot x^2, \text{ т. е. } b + 2 \cdot c \cdot x = 0 \text{ и } x = -\frac{b}{2 \cdot c}.$$

Применение МНК для оценки параметров параболы второй степени приводит к следующей системе нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum y = n \cdot a + b \cdot \sum x + c \cdot \sum x^2, \\ \sum y \cdot x = a \cdot \sum x + b \cdot \sum x^2 + c \cdot \sum x^3, \\ \sum y \cdot x^2 = a \cdot \sum x^2 + b \cdot \sum x^3 + c \cdot \sum x^4. \end{cases}$$

Решение ее возможно методом определителей:

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta}; \quad b = \frac{\Delta b}{\Delta}; \quad c = \frac{\Delta c}{\Delta},$$

где Δ — определитель системы;

$\Delta a, \Delta b, \Delta c$ — частные определители для каждого из параметров.

равносторонняя гипербола

$$\hat{y}_x = a + \frac{b}{x}.$$

кривая Филлипса

$$\boxed{y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon}$$

Для равносторонней гиперболы такого вида, заменив 1/x на z, получим линейное уравнение регрессии

$$y = a + bz + \varepsilon$$

оценка параметров которого может быть дана МНК.

Система нормальных уравнений составит:

$$\begin{cases} \sum y = n \cdot a + b \cdot \sum \frac{1}{x}, \\ \sum \frac{y}{x} = a \cdot \sum \frac{1}{x} + b \cdot \sum \frac{1}{x^2}. \end{cases}$$

При $b > 0$ имеем обратную зависимость, которая при $x \to \infty$ характеризуется нижней асимптотой, т. е. минимальным предельным значением y, оценкой которого служит параметр a. Так, для кривой Филлипса[1] $\hat{y}_x = 0{,}00679 + 0{,}1842 \ \frac{1}{x}$ величина параметра a, равная 0,00679, означает, что с ростом уровня безработицы темп прироста заработной платы в пределе стремится к нулю. Соответственно можно определить тот уровень безработицы, при котором заработная плата оказывается стабильной и темп ее прироста равен нулю.

При $b < 0$ имеем медленно повышающуюся функцию с верхней асимптотой при $x \to \infty$, т. е. с максимальным предельным уровнем y, оценку которого в уравнении $\hat{y}_x = a + \frac{b}{x}$ дает параметр a.

В отдельных случаях может использоваться и нелинейная модель вида

$$y = \frac{1}{a + bx + c}$$

Но, если в равносторонней гиперболе преобразованию подвергается объясняющая переменная

$$z = 1/x \text{ и } y = a + bz + \varepsilon,$$

то для получения линейной формы зависимости в обратной модели преобразовывается y, а именно:

$$z = 1/y \text{ и } z = a + bx + \varepsilon.$$

В результате обратная модель оказывается внутренне нелинейной и требование МНК выполняется не для фактических значений признака y, а для их обратных величин 1/y, а именно

$$\sum (z - \hat{z})^2 \to \min$$

Линеаризация

- Парабола $$y_x = a + b \cdot x + c \cdot x^2$$

$$x = x_1,\ x^2 = x_2$$

- Гипербола $$y_x = a + b/x$$

$$X = 1/x \qquad b = \frac{\overline{yX} - \bar{y} \cdot \bar{X}}{\overline{X^2} - (\bar{X})^2} \qquad a = \bar{y} - b\bar{X}$$

- Полулогарифмическая функция $$y_x = a + b \cdot \ln x$$

$$X = \ln x \qquad b = \frac{\overline{yX} - \bar{y} \cdot \bar{X}}{\overline{X^2} - (\bar{X})^2} \qquad a = \bar{y} - b\bar{X}$$

Модели, нелинейные по параметрам

-нелинейные модели внутренне линейные

- нелинейные модели внутренне нелинейные.

Нелинейные по оцениваемым параметрам

Нелинейные модели внутренне линейные

- Степенная $\hat{y}_x = a \cdot x^b$
- Показательная $\hat{y}_x = a \cdot b^x$
- Экспоненциальная $\hat{y}_x = a\mathrm{e}^{b \cdot x}$
- Обратная $\hat{y}_x = \dfrac{1}{a + b \cdot x}$
- Логистическая $\hat{y}_x = \dfrac{a}{1 + b \cdot \mathrm{e}^{-c \cdot x}}$

Нелинейные модели внутренне нелинейные

$$\hat{y}_x = a + b \cdot x^c \qquad \hat{y}_x = a \cdot \left(1 - \frac{1}{1 - x^b}\right)$$

в эконометрических исследованиях при изучении эластичности спроса от цен широко используется степенная функция:

$$y = ax^{b}\varepsilon$$

где y – спрашиваемое количество;
x – цена;
ε – случайная ошибка.

логарифмирование данного уравнения по основанию ε приводит его к линейному виду:

$$\ln y = \ln a + b \ln x + \ln \varepsilon.$$

Если же модель представить в виде

$$y = ax^{b}\varepsilon,$$

то она становится внутренне нелинейной, т.к. ее невозможно превратить в линейный вид. Внутренне нелинейной будет и модель вида

$$y = a + bx^{c} + \varepsilon,$$

или модель

$$y = a \cdot \left(1 - \frac{1}{1 - x^{b}}\right) + \varepsilon,$$

В этом плане к линейным относят, например, экспоненциальную модель

$$y = e^{a+bx}\varepsilon,$$

т.к. логарифмируя ее по натуральному основанию, получим линейную форму модели

$$\ln y = a + b\,x + \ln\varepsilon.$$

Модели внутренне нелинейные по параметрам могут иметь место в эконометрических исследованиях. Среди них можно назвать и обратную модель вида:

$$y = \frac{1}{a + b \cdot x + \varepsilon}.$$

Обращая обе части равенства, получим линейную форму модели для переменной $\frac{1}{y}$:

$$\frac{1}{y} = a + b \cdot x + \varepsilon.$$

Приводима к линейному виду и логистическая функция

$$y = \frac{a}{1 + b \cdot e^{-c \cdot x + \varepsilon}} \quad \text{или} \quad \hat{y}_x = \frac{a}{1 + b \cdot e^{-c \cdot x}}.$$

Обращая обе части равенства, получим:

$$1 + b \cdot e^{-c \cdot x + \varepsilon} = \frac{a}{y}.$$

Вычитая 1, имеем: $b \cdot e^{-c \cdot x + \varepsilon} = \frac{a}{y} - 1.$

Прологарифмировав обе части по натуральному основанию, получим уравнение линейной формы:

$$\ln b - c \cdot x + \varepsilon = \ln\left(\frac{a}{y} - 1\right)$$

или

$$z = B - c \cdot x + \varepsilon, \text{ где } \quad z = \ln\left(\frac{a}{y} - 1\right) \text{ и } B = \ln b.$$

В степенной функции

$$y = ax^b\varepsilon.$$

параметр b является **коэффициентом эластичности**. Его величина, на сколько процентов изменится в среднем результат, если фактор изменится на 1%.

Формула расчета коэффициента эластичности:

$$Э = f'(x)\frac{x}{y},$$

где $f'(x)$ — первая производная, характеризующая соотношение приростов результата и фактора для соответствующей формы связи.

Для степенной функции она составит: $f'(x) = a \cdot b \cdot x^{b-1}$. Соответственно коэффициент эластичности окажется равным:

$$Э = a \cdot b \cdot x^{b-1} \cdot \frac{x}{a \cdot x^b} = \frac{a \cdot b \cdot x^b}{a \cdot x^b} = b.$$

Коэффициент эластичности, естественно, можно определять и при наличии других форм связи, но только для степенной функции он представляет собой постоянную величину, равную параметру b. В других функциях коэффициент эластичности зависит от значений фактора x. Так, для линейной регрессии $\hat{y}_x = a + b \cdot x$ функция и эластичность следующие:

$$f'(x) = b \text{ и } Э = b \cdot \frac{x}{a + b \cdot x}.$$

В силу того что коэффициент эластичности для линейной функции не является величиной постоянной, а зависит от соответствующего значения x, то обычно рассчитывается **средний показатель эластичности** по формуле

$$\overline{Э} = b \cdot \frac{\overline{x}}{\overline{y}}.$$

Для оценки параметров степенной функции $y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$ применяется МНК к линеаризованному уравнению $\ln y = \ln a + b \cdot \ln x + \ln \varepsilon$, т.е. решается система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum \ln y = n \cdot \ln a + b \cdot \sum \ln x, \\ \sum \ln y \cdot \ln x = \ln a \cdot \sum \ln x + b \cdot \sum (\ln x)^2. \end{cases}$$

Параметр b определяется непосредственно из системы, а параметр a – косвенным путем после потенцирования величины $\ln a$.

Коэффициенты эластичности для ряда математических функций

Вид функции, y	Первая производная, y'_x	Коэффициент эластичности, $Э = y'_x \cdot \frac{x}{y}$
Линейная $y = a + b \cdot x + \varepsilon$	b	$Э = \frac{b \cdot x}{a + b \cdot x}$
Парабола второго порядка $y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + \varepsilon$	$b + 2 \cdot c \cdot x$	$Э = \frac{(b + 2 \cdot c \cdot x) \cdot x}{a + b \cdot x + c \cdot x^2}$
Гипербола $y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$	$-\frac{b}{x^2}$	$Э = \frac{-b}{a \cdot x + b}$
Показательная $y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$	$\ln b \cdot a \cdot b^x$	$Э = x \cdot \ln b$
Степенная $y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$	$a \cdot b \cdot x^{b-1}$	$Э = b$
Полулогарифмическая $y = a + b \cdot \ln x + \varepsilon$	$\frac{b}{x}$	$Э = \frac{b}{a + b \cdot \ln x}$
Логистическая $y = \frac{a}{1 + b \cdot e^{-cx + \varepsilon}}$	$\frac{a \cdot b \cdot c \cdot e^{-cx}}{(1 + b \cdot e^{-cx})^2}$	$Э = \frac{c \cdot x}{\frac{1}{b} \cdot e^{cx} + 1}$
Обратная $y = \frac{1}{a + b \cdot x + \varepsilon}$	$\frac{-b}{(a + b \cdot x)^2}$	$Э = \frac{-b \cdot x}{a + b \cdot x}$

Формулы для расчета среднего коэффициента эластичности

Вид функции, y	Средний коэффициент эластичности, $\bar{Y}$
$y = a + b \cdot x + \varepsilon$	$\dfrac{b \cdot \bar{x}}{a + b \cdot \bar{x}}$
$y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + \varepsilon$	$\dfrac{(b + 2c \cdot \bar{x}) \cdot \bar{x}}{a + b \cdot \bar{x} + c \cdot \bar{x}^2}$
$y = a + \dfrac{b}{x} + \varepsilon$	$-\dfrac{b}{a \cdot \bar{x} + b}$
$y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$	b
$y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$	$\bar{x} \cdot \ln b$

Формулы для расчета среднего коэффициента эластичности

Вид функции, y	Средний коэффициент эластичности, $\bar{Y}$
$y = a + b \cdot \ln x + \varepsilon$	$\dfrac{b}{a + b \cdot \ln \overline{x}}$
$y = e^{a+bx} \cdot \varepsilon$	$\overline{x} \cdot b$
$y = \dfrac{1}{a + b \cdot x + \varepsilon}$	$\dfrac{b \cdot c \cdot \overline{x}}{b + \mathrm{e}^{c \cdot \overline{x}}}$
$y = \dfrac{a}{1 + b \cdot \mathrm{e}^{-c \cdot x + \varepsilon}}$	$-\dfrac{b \cdot \overline{x}}{a + b \cdot \overline{x}}$

Если в линейной модели и моделях, нелинейных по переменным, при оценке параметров исходят из критерия

$$\sum (y - \hat{y})^2 \rightarrow \min$$

то в моделях, нелинейных по оцениваемым параметрам, требование МНК применяется не к исходным данным результативного признака, а к их преобразованным величинам, т. е. lny, 1/y.

Так, в степенной функции $y = ax^b\varepsilon$
МНК применяется к преобразованному уравнению

$$\ln y = \ln a + x \ln b.$$

Это значит, что оценка параметров основывается на минимизации суммы квадратов отклонений

$$\sum (\ln y - \ln \hat{y})^2 \rightarrow \min$$

Соответственно, если в линейных моделях (включая нелинейные по переменным $\sum(y-\hat{y}_x) = 0$, то в моделях, нелинейных по оцениваемым параметрам,

$$\sum(\ln y - \widehat{\ln y}_x) = 0, \text{ а } \sum(y - anti\,\widehat{\log y}_x) \neq 0.$$

Корреляция для нелинейной регрессии

Уравнение нелинейной регрессии, так же как и в линейной зависимости, дополняется показателем корреляции, а именно индексом корреляции (R):

$$R = \left(1 - \frac{\sigma^2_{ост}}{\sigma^2_y}\right)^{1/2},$$

где σ^2_y – общая дисперсия результативного признака y;
$\sigma^2_{ост}$ – остаточная дисперсия, определяемая исходя из уравнения регрессии $\hat{y}_x = f(x)$.

Так как $\sigma^2_y = \frac{1}{n} \cdot \sum (y - \overline{y})^2$, а $\sigma^2_{ост} = \frac{1}{n} \cdot \sum (y - \hat{y}_x)^2$, то индекс корреляции можно выразить как

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum (y - \hat{y}_x)^2}{\sum (y - \overline{y})^2}}.$$

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sum (y - y_x)^2}{\sum (y - \bar{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{ост}}{\sigma^2_y}}$$

Для равносторонней гиперболы $\hat{y}_x = a + \frac{b}{x}$.

индекс корреляции $r^2_{yz} = \left(1 - \frac{\sum (y - \hat{y}_z)^2}{\sum (y - \bar{y})^2}\right)^{1/2}$. $R_{yx} = \sqrt{1 - \frac{\sum (y - anti\log(\widehat{\ln y}))^2}{\sum (y - \bar{y})^2}}$.

Линейный коэффициент корреляции между переменными y и lnx

$$r_{y \ln x} = \frac{\overline{y \cdot \ln x} - \bar{y} \cdot \overline{\ln x}}{\sigma_y \cdot \sigma_{\ln x}}.$$

Индекс детерминации используется для проверки существенности в целом уравнения нелинейной регрессии по F-критерию Фишера:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m}, \quad (2.35)$$

где R^2 – индекс детерминации;

n – число наблюдений;

m – число параметров при переменных x.

Величина m характеризует число степеней свободы для факторной суммы квадратов, а $(n - m - 1)$ – число степеней свободы для остаточной суммы квадратов.

Для степенной функции $\hat{y}_x = a \cdot x^b$ $m = 1$ и формула F-критерия примет тот же вид, что и при линейной зависимости:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot (n-2).$$

Ошибка разности между индексом детерминации R^2_{yx} и коэффициентом детерминации r^2_{yx}:

$$m_{|R-r|} = 2 \cdot \sqrt{\frac{(R^2 - r^2) - (R^2 - r^2)^2 \cdot (2 - (R^2 + r^2))}{n}}.$$

Ошибка аппроксимации

$$A = \frac{1}{n} \cdot \sum \left| \frac{(y - \hat{y}_x)}{y} \right| \cdot 100.$$

$$A = \frac{100}{\bar{y}} \cdot \sqrt{\frac{\sum (y - \hat{y}_x)^2}{n}}.$$

Нелинейные модели внутренне линейные

- Степенная $y=ax^b$

$Y=\ln y$, $X=\ln x$, $A=\ln a$

$$b = \frac{\overline{YX} - \overline{Y}\cdot\overline{X}}{\overline{X^2} - (\overline{X})^2} \qquad A = \overline{Y} - b\overline{X}$$

- Показательная $y=ab^x$

$Y=\ln y$, $B=\ln b$, $A=\ln a$

$$B = \frac{\overline{Yx} - \overline{Y}\cdot\overline{x}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} \qquad A = \overline{Y} - B\overline{x}$$

- Экспоненциальная $y=ae^{bx}$

$Y=\ln y$, $A=\ln a$

$$b = \frac{\overline{Yx} - \overline{Y}\cdot\overline{x}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} \qquad A = \overline{Y} - b\overline{x}$$

- Обратная $$y_x = \frac{1}{a + b\cdot x}$$

$Y=1/y$

$$b = \frac{\overline{Yx} - \overline{Y}\cdot\overline{x}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} \qquad \grave{a} = \overline{Y} - b\overline{x}$$