

Гауссовский пучок

2.1.1 Параболическое приближение

Волновой лазерный пучок в силу своей высокой направленности имеет много общего с плоской волной. Отличие же его от плоской волны состоит в том, что распределение интенсивности в нем неоднородно (мощность пучка, в основном, сконцентрирована вблизи оси), а фазовый фронт несколько отличается от плоского. Поэтому решение приведенного волнового уравнения, описывающее распространение такого пучка, будем искать в виде

$$\Psi = u(x, y, z)e^{ikz}, \quad (2.1.1)$$

где $u(x, y, z)$ - медленно меняющаяся комплексная функция, которая и определяет свойства лазерного пучка, отличающие его от плоской волны. Быстрые осцилляции по z обусловлены присутствием в (2.1.1) экспоненциального множителя. Применяя оператор Δ к функции Ψ , имеем

$$\Delta\Psi = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} - k^2 u \right) e^{ikz}. \quad (2.1.2)$$

Если в выражении (2.1.2) пренебречь второй производной u по z по сравнению с первой, то на основании (1.2.20) получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (2.1.3)$$

Полученное уравнение относится к уравнениям параболического типа, а само приближение, в рамках которого оно было получено, называется параболическим приближением. Нетрудно показать, что уравнению (2.1.3) будет удовлетворять так называемый гауссов пучок, амплитуда которого меняется по поперечной координате по гауссовому закону.

2.1.2 Свойства основной моды

Для гауссова пучка можно записать выражение

$$u = a \exp \left[i \left(p + \frac{k}{2q} r^2 \right) \right], \quad (2.1.4)$$

где $r^2 = x^2 + y^2$. Параметр P - комплексный фазовый сдвиг при распространении света вдоль оси z , а q - комплексный параметр пучка, определяющий гауссово распределение поля по координате r , где r - расстояние от оси. Кроме того, q определяет кривизну волнового фронта, который вблизи оси является сферическим. Подставив выражение (2.1.4) в (2.1.3), получим

$$2k \left(p' + \frac{i}{q} \right) + \left(\frac{kr^2}{q} \right) (1 - q') = 0. \quad (2.1.5)$$

Штрих означает производную по z . Уравнение (2.1.5) эквивалентно двум уравнениям

$$q = 1, \quad (2.1.6)$$

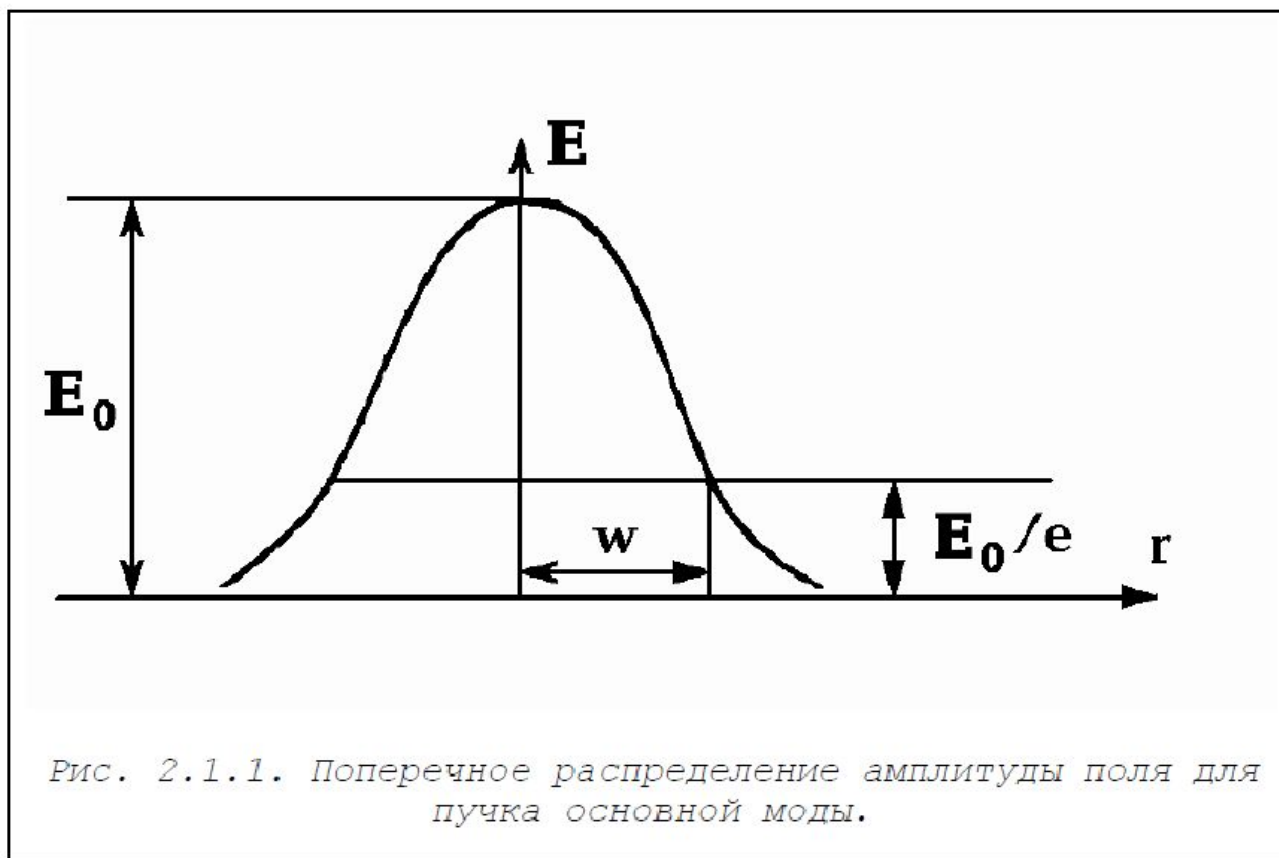
$$p' = -\frac{i}{q}. \quad (2.1.7)$$

Интегрируя (2.1.6), получаем

$$q_2 = q_1 + z. \quad (2.1.8)$$

Это уравнение устанавливает весьма простое соотношение между параметром пучка в разных сечениях, отстоящих друг от друга на расстоянии z .

Когерентный световой пучок с гауссовым распределением поля имеет фундаментальное значение в теории волновых пучков. Этот пучок называют основной модой в отличие от других мод более высокого порядка, которые будут рассматриваться ниже. Вследствие особой важности рассмотрим свойства гауссова пучка с длиной волны λ более подробно.



Для этого выразим комплексный параметр q через два действительных параметра пучка R и w

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} + i \frac{\lambda}{\pi w^2}. \quad (2.1.9)$$

Физический смысл этих параметров становится ясным при подстановке соотношения (2.1.9) в (2.1.4). Видно, что R есть радиус кривизны волнового фронта,

а w характеризует изменение поля E в поперечной плоскости. Распределение поля в этой плоскости, как видно из *рис. 2.1.1*, подчиняется закону Гаусса и w равно расстоянию, на котором амплитуда поля убывает в e раз по сравнению с полем на оси.

Важно отметить, что гауссов характер распределение поля будет иметь в любой плоскости, будет меняться лишь ширина этого распределения. Параметр w принято называть радиусом пучка, а $2w$ - диаметром пучка. В некоторой плоскости, называемой горловиной пучка, гауссов пучок стягивается к минимальному диаметру $2w_0$. В этой плоскости, от которой целесообразно отсчитывать расстояние z , фазовый фронт является плоским и комплексный параметр пучка становится чисто мнимым

$$q_0 = \frac{\pi w_0^2}{i\lambda}. \quad (2.1.10)$$

На расстоянии z от горловины

$$q = q_0 + z = \frac{\pi w_0^2}{i\lambda} + z. \quad (2.1.11)$$

Из сопоставления соотношений (2.1.9) и (2.1.11) легко получить следующие важные в практическом отношении выражения:

$$w^2(z) = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right], \quad (2.1.12)$$

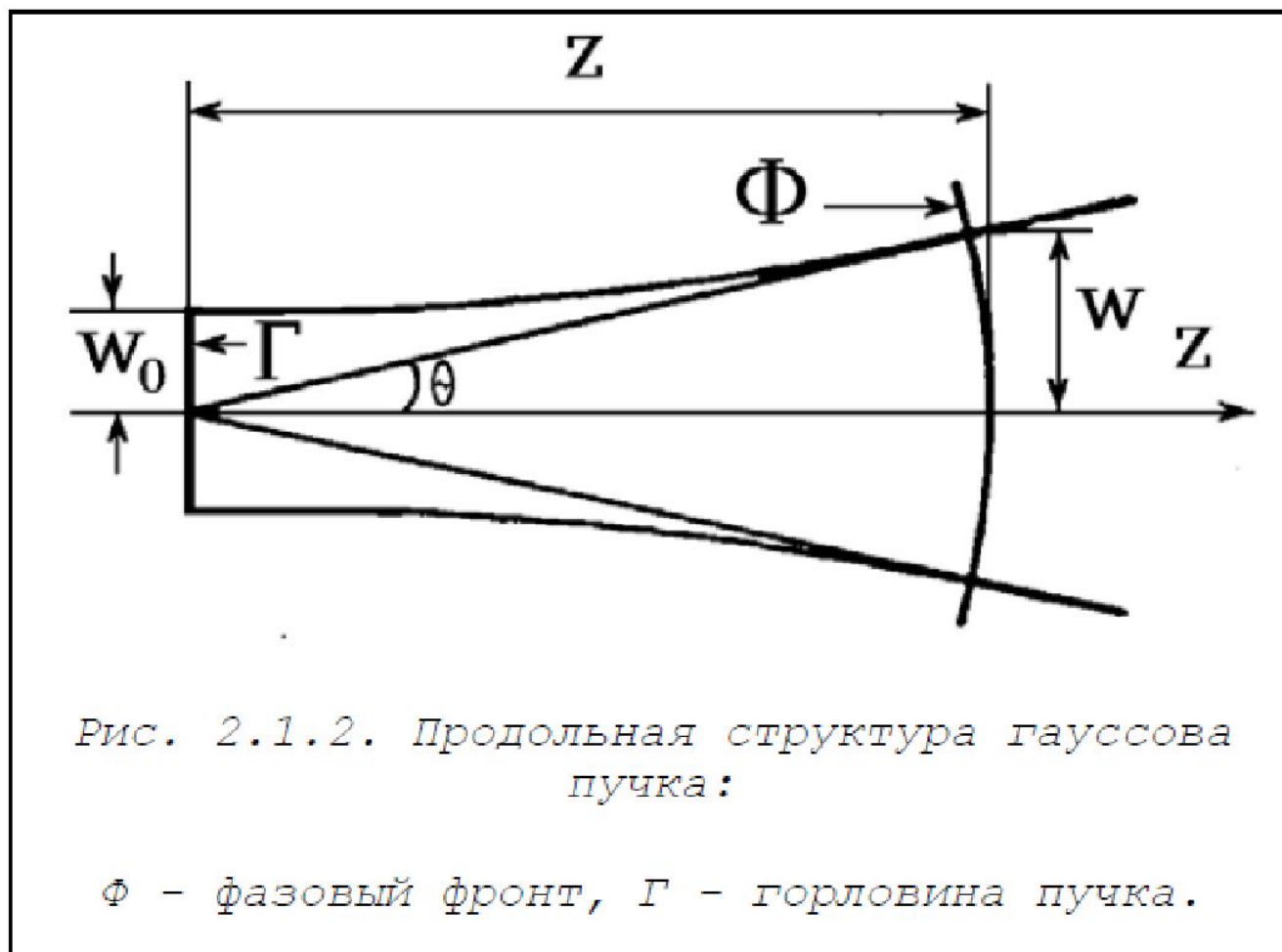
$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right]. \quad (2.1.13)$$

Изменение радиуса, задаваемое выражением (2.1.12), графически иллюстрируется *рис. 2.1.2.*

Образующая пучка $w(z)$ представляет собой гиперболу, асимптота которой наклонена к оси под углом

$$\theta = \lambda / \pi w_0. \quad (2.1.14)$$

Этот угол равен углу дифракции основной моды в дальней зоне.



Gaussian Beams & the ABCD Law

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - j \frac{\lambda}{\pi w^2}$$

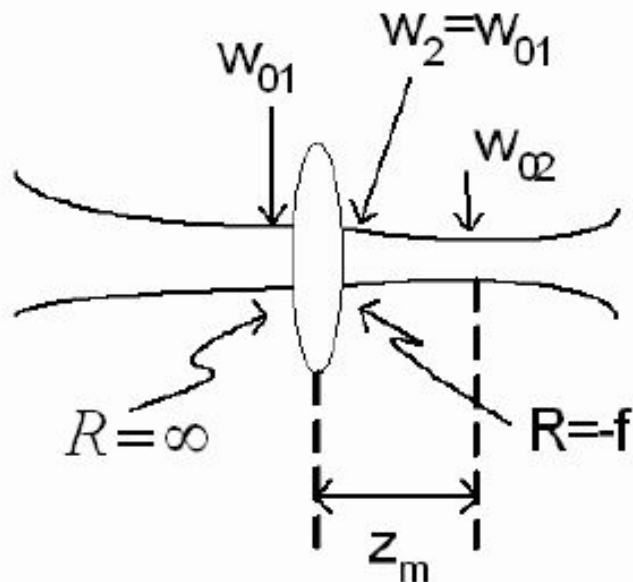
“Complex
Radius of
Curvature”

After propagation through an optical element

$$\rightarrow \frac{1}{q_2} = \frac{C + D/q_1}{A + B/q_1}$$

Example: Focusing of a Gaussian Beam by a thin lens

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$



$$\frac{1}{q_1} = -j \frac{\lambda}{\pi w_{01}^2}$$

$$\frac{1}{q_2} = \frac{-\frac{1}{f} - j \frac{\lambda}{\pi w_{01}^2}}{1 + 0}$$

After propagation through free space by z_m

$$\frac{1}{q(z_m)} = \frac{-\frac{1}{f} - j\frac{\lambda}{\pi w_{01}^2}}{1 - \frac{z_m}{f} - j\frac{z_m \lambda}{\pi w_{01}^2}}$$

The real part is zero when

$$z_m = \frac{f}{1 + \left(\frac{f}{z_{R_1}}\right)^2}$$

and

$$w_{02} = \frac{\lambda f}{\pi w_{01} \left[1 + \left(\frac{f}{z_{R_1}}\right)^2 \right]^{1/2}}$$

Измерения характеристик лазерных пучков

- ГОСТ Р ИСО 11146-1-2008
- M^2 - параметр для количественной оценки качества пучка лазерного луча.

Параметр M^2 , также называемый параметром качества пучка или параметром распространения пучка, это общепринятая величина для определения оптического качества лазерного пучка. Согласно ISO Standard 11146, она определяется как отношение ВРР к λ / π , последнее является ВРР для дифракционно-ограниченного Гауссова пучка той же длины волны. Другими словами половина угла расходимости пучка это:

$$\theta = M^2 \frac{\lambda}{\pi W_0}$$

- **D4σ or second moment width**

The D4σ width of a beam in the horizontal or vertical direction is 4 times σ, where σ is the [standard deviation](#) of the horizontal or vertical marginal distribution, respectively. Mathematically, the D4σ beam width in the x-dimension for the beam profile is expressed as

$$D4\sigma = 4\sigma = 4\sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y)(x - \bar{x})^2 dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y) dx dy}}$$

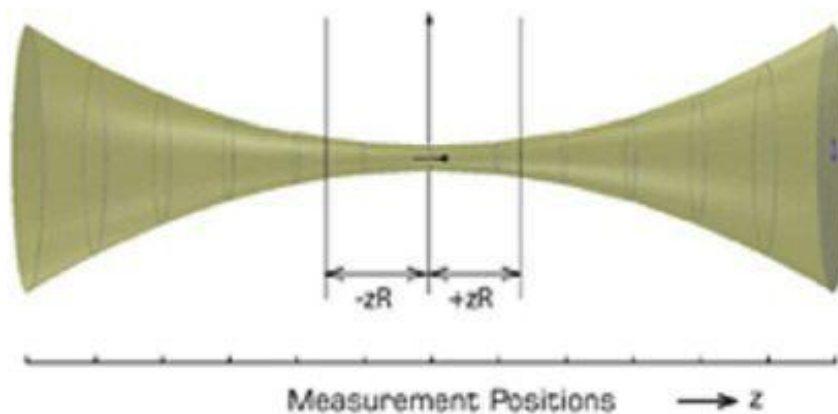
$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y)x dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y) dx dy}$$

- **BPP** (beam parameter product - произведение параметров пучка), определяется как произведение диаметра пучка в перетяжке на полный угол расходимости излучения (мм мрад).

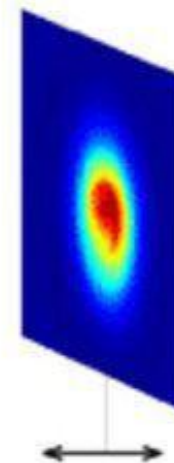
Focusing Lens



Laser Beam Caustic



Beam Profiler



Проведение измерений

Перетяжка создаётся фокусирующей линзой с фокусным расстоянием 10 см. Основным критерием оптимальных параметров фокусирующей системы являлся минимальный размер пятна излучения на поверхности ПЗС-камеры. Уверенное измерение диаметра пучка возможно при регистрации диаметра не менее 15 пикселями ПЗС-матрицы видеокамеры, которая в нашем случае составляет 7 мкм. Перемещение ПЗС-камеры вдоль оси распространения пучка осуществлялось с использованием системы перемещения, управляемой контроллером шагового двигателя.

Диаметр гауссовского пучка зависит от расстояния по формуле:

$$D^2(z) = D_0^2 + (z - z_0)^2 \Theta^2 / 2,$$

где D_0 – ширина перетяжки пучка по уровню $1/e$ интенсивности, z_0 – положение перетяжки пучка, Θ - расходимость излучения. После аппроксимации экспериментально измеренной зависимости $D(z)$ указанной выше функцией, впоследствии рассчитывается

параметр M^2 по формуле: $M^2 = \frac{\pi \sqrt{2}}{4\lambda} \cdot D_0 \Theta$. Результаты измерения профиля фокусировки

и параметра качества пучка M^2 излучения He-Ne лазера приведены на рис.5.

M2 measurement

Laser Beam Parameters

Laser Wavelength, nm

632

X Axis

X Beam Waist Diameter

300 μm

X Beam Waist Position

78 mm

X Beam Divergence

10 mrad

M2 X parameter

1.5

Y Axis

Y Beam Waist Diameter

200 μm

Y Beam Waist Position

74 mm

Y Beam Divergence

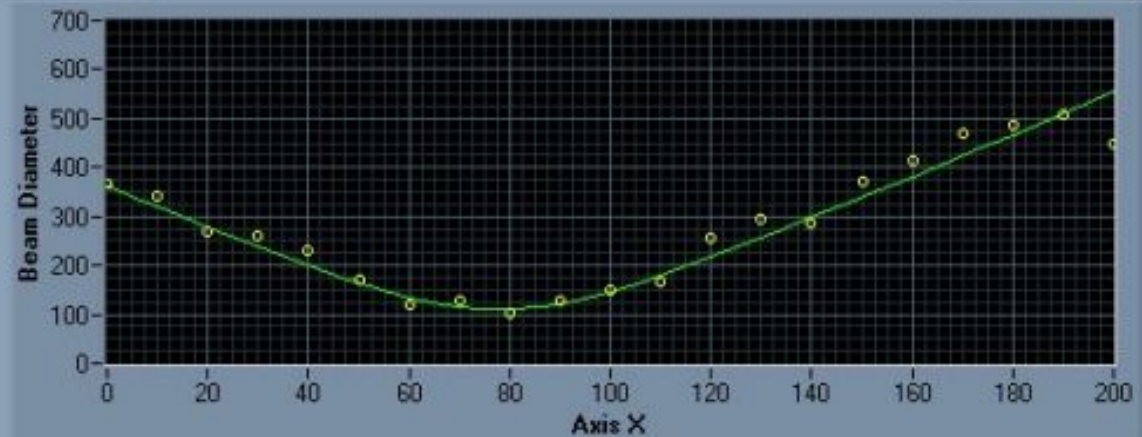
10 mrad

M2 Y parameter

1.7

CLOSE WINDOW

X Beam Waist



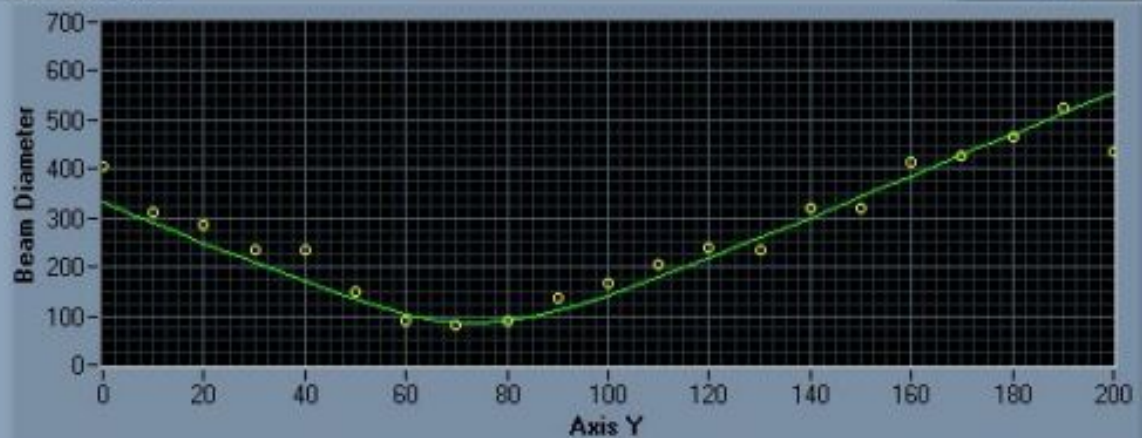
Data

Fitting



SAVE TO FILE

Y Beam Waist



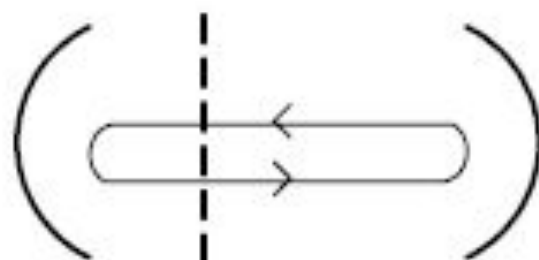
Data

Fitting



Собственные моды резонатора

OPTICAL RESONATORS AND EIGENMODES



An eigenmode reproduces itself after a round trip in the cavity

→ Spatial Profile and Phase

Fabry-Perot Cavity:

→ Eigenmodes are plane waves

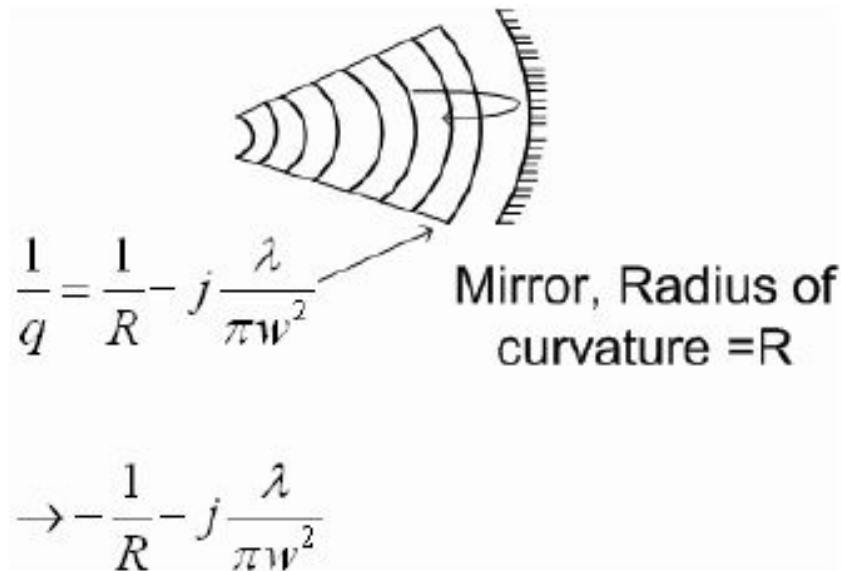
Resonators with spherical mirrors:

→ Eigenmodes are Gaussian Beams

The requirement that a Gaussian Beam reproduce its

spatial profile is $q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} = q_1$.

Note: Cavity stability puts requirements on A, B, C, and D and implies that the Gaussian wave fronts "match" the mirrors; i.e. an eigenmode must have radius of curvature equal to the mirror, at both mirrors.



These requirements determine the spot size at the waist, the position of the waist, and the spot sizes on the mirrors.

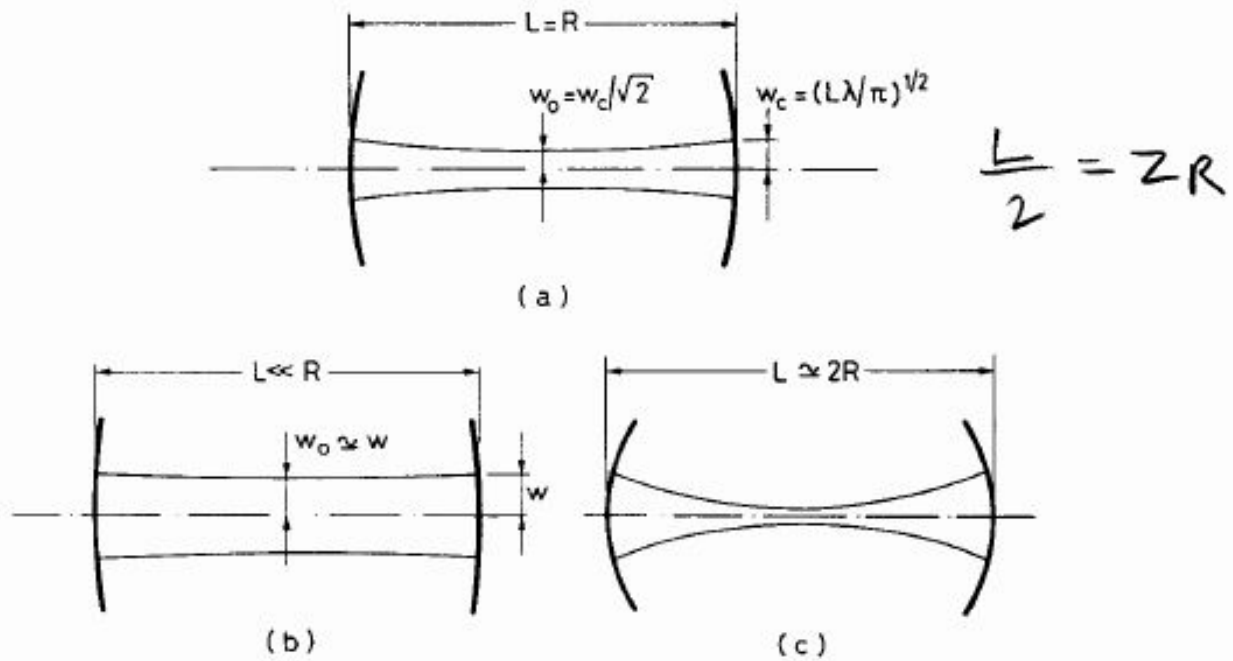
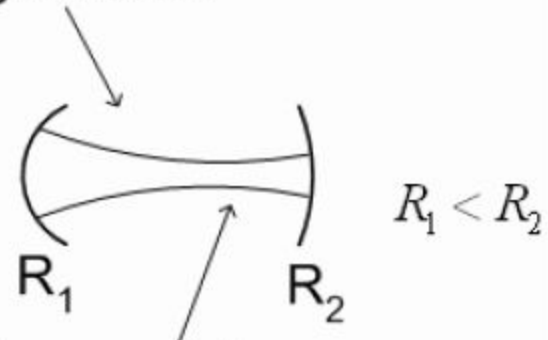
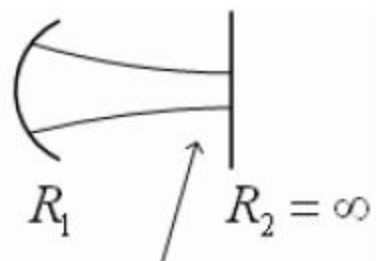


FIG. 5.9. Spot size behavior in symmetric resonators: (a) confocal, (b) near-plane, and (c) near-concentric.

Eigenmode



We expect the waist to be closer to mirror 2



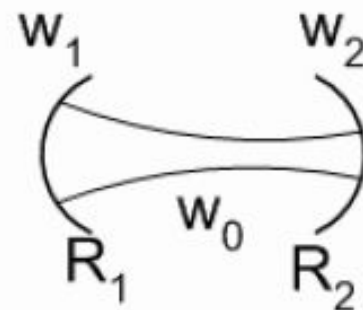
Waist for eigenmode is at mirror 2

For the general resonator:

$$w_1 = \left(\frac{L\lambda}{\pi} \right)^{1/2} \left[\frac{g_2}{g_1(1-g_1g_2)} \right]^{1/4}$$

$$w_2 = \left(\frac{L\lambda}{\pi} \right)^{1/2} \left[\frac{g_1}{g_2(1-g_1g_2)} \right]^{1/4}$$

$$w_0 = \left(\frac{L\lambda}{\pi} \right)^{1/2} \left[\frac{g_1g_2(1-g_1g_2)}{(g_1+g_2-2g_1g_2)^2} \right]^{1/4}$$



Eigenvalues

The requirement that an eigenmode should have the same phase after a round trip in the cavity puts requirements on the allowed frequencies. The eigenvalues of the eigenmodes are the resonant frequencies.

$$\text{Fabry-Perot Modes} \rightarrow \nu_m = \frac{c}{2L \underbrace{n_r}_{\substack{\text{Refractive} \\ \text{Index}}}} m, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$\text{Gaussian Modes} \rightarrow \nu_{nlm} = \frac{c}{2n_r L} \left(\underbrace{n}_{n=0,1,2,\dots} + \frac{\phi_{lm}}{\underbrace{2\pi}_{\substack{\text{Extra} \\ \text{Phase}}}} \right)$$

Remember that

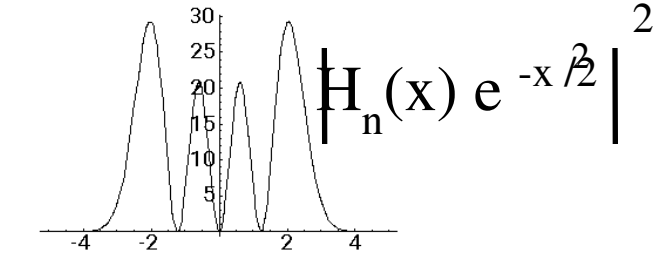
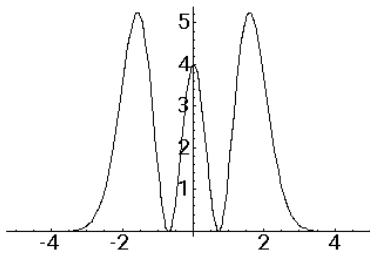
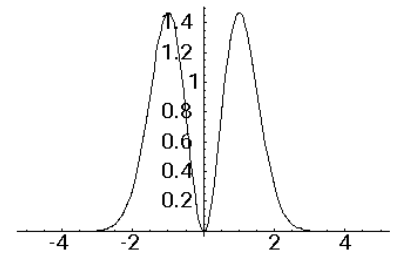
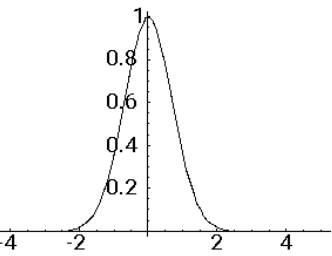
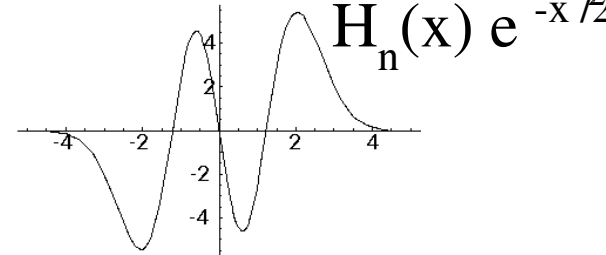
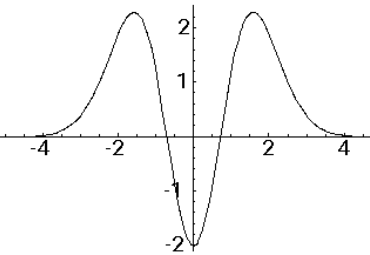
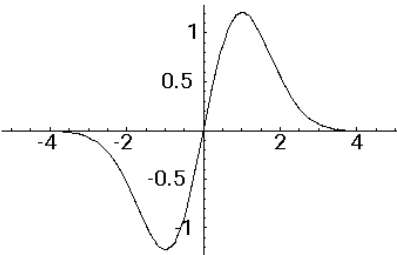
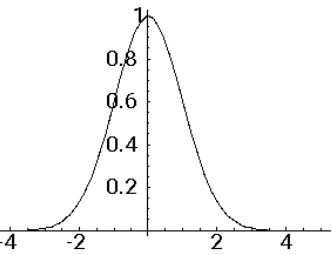
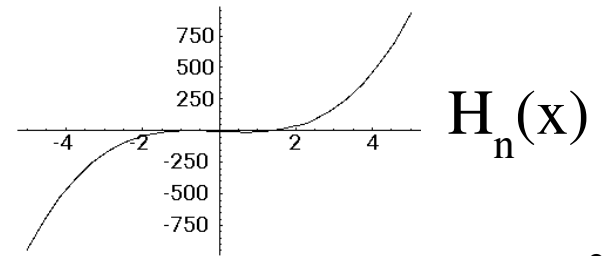
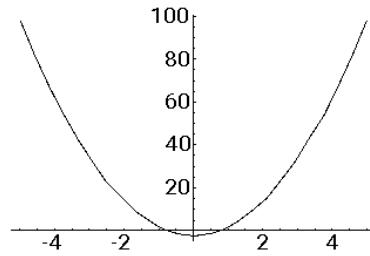
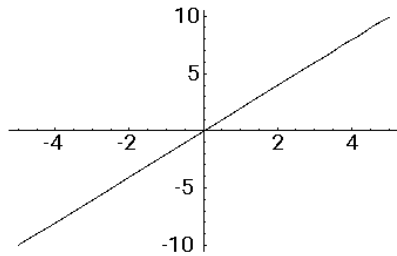
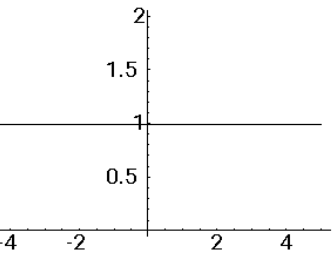
$$E_{00}(r, z, t) = E_0 \frac{w}{w_0} e^{-r^2/w^2} e^{-jk\left(z + \frac{r^2}{2R}\right)} e^{j\omega t} e^{j\phi(z)}$$

$$E_{\ell m}(r, z, t) = E_{00}(r, z, t)$$

$$\times H_{\ell}\left(\sqrt{2}\frac{x}{w}\right) H_m\left(\sqrt{2}\frac{Y}{w}\right)$$

$$\times \underbrace{e^{j(\ell+m)\phi(z)}}_{\text{Different phase for higher order modes}}$$

Higher-Order Modes - HG



1

2

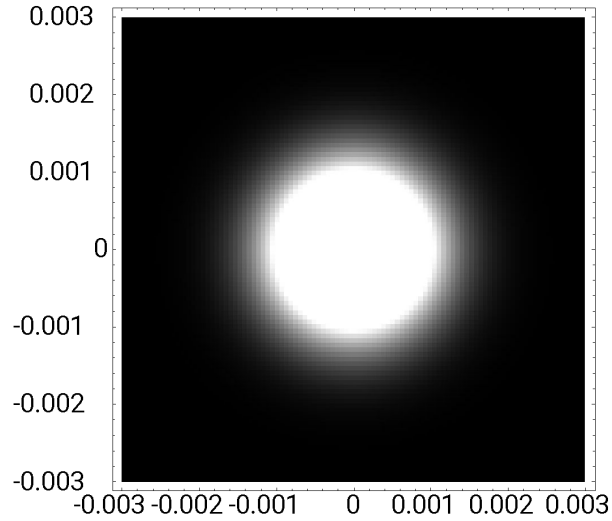
3

4

Hermite-Gaussian modes

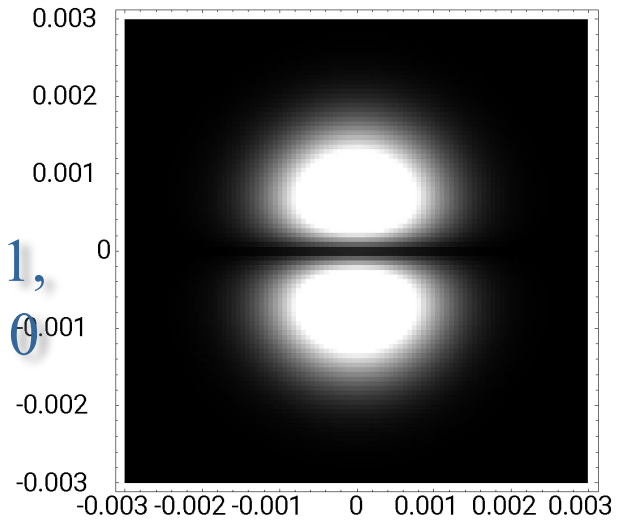
H
G

0,
0



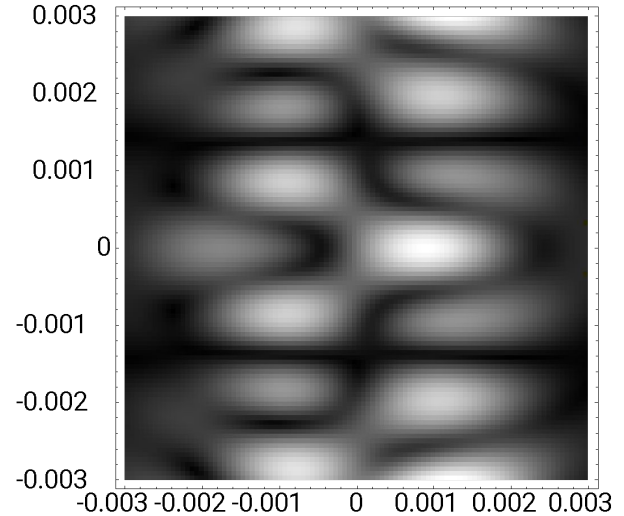
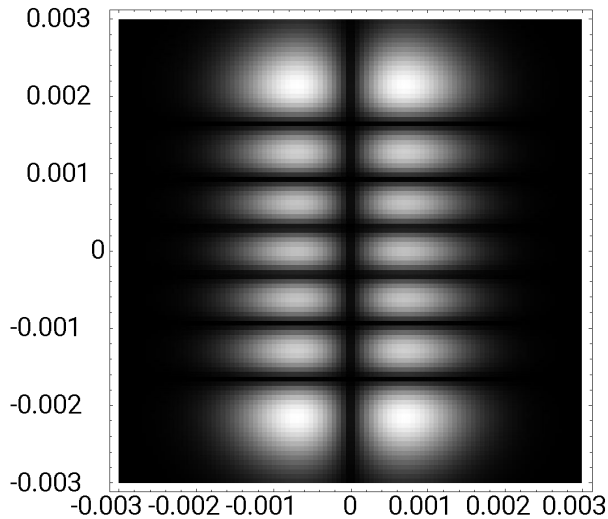
H
G

1,
0

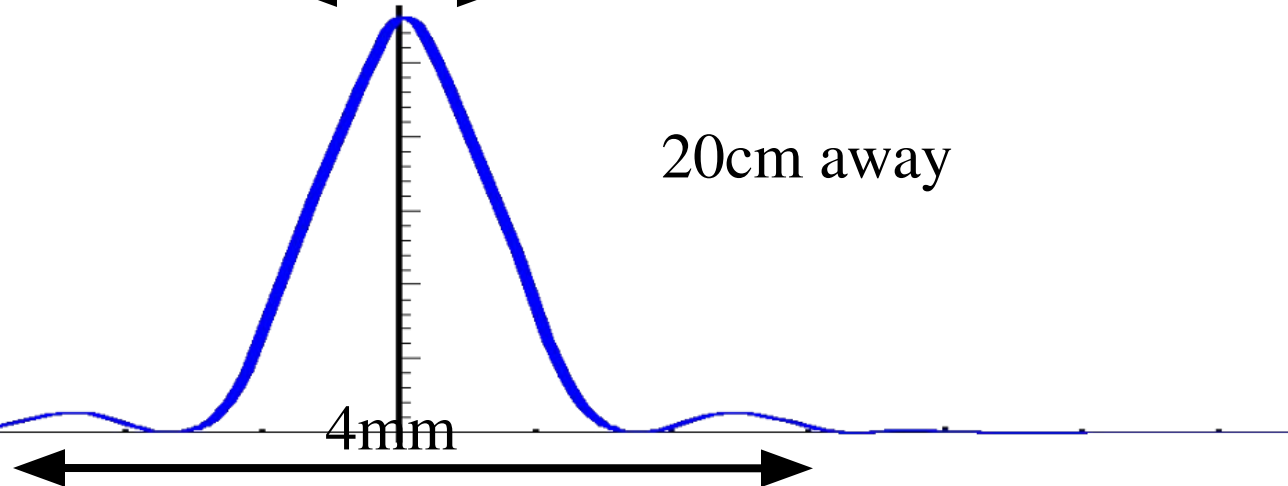
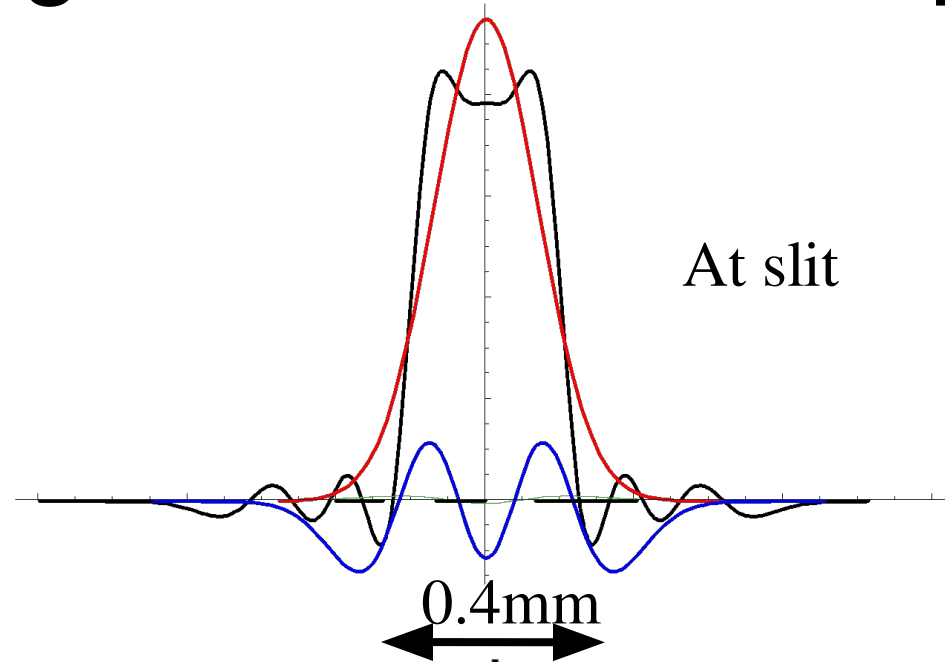


H
G

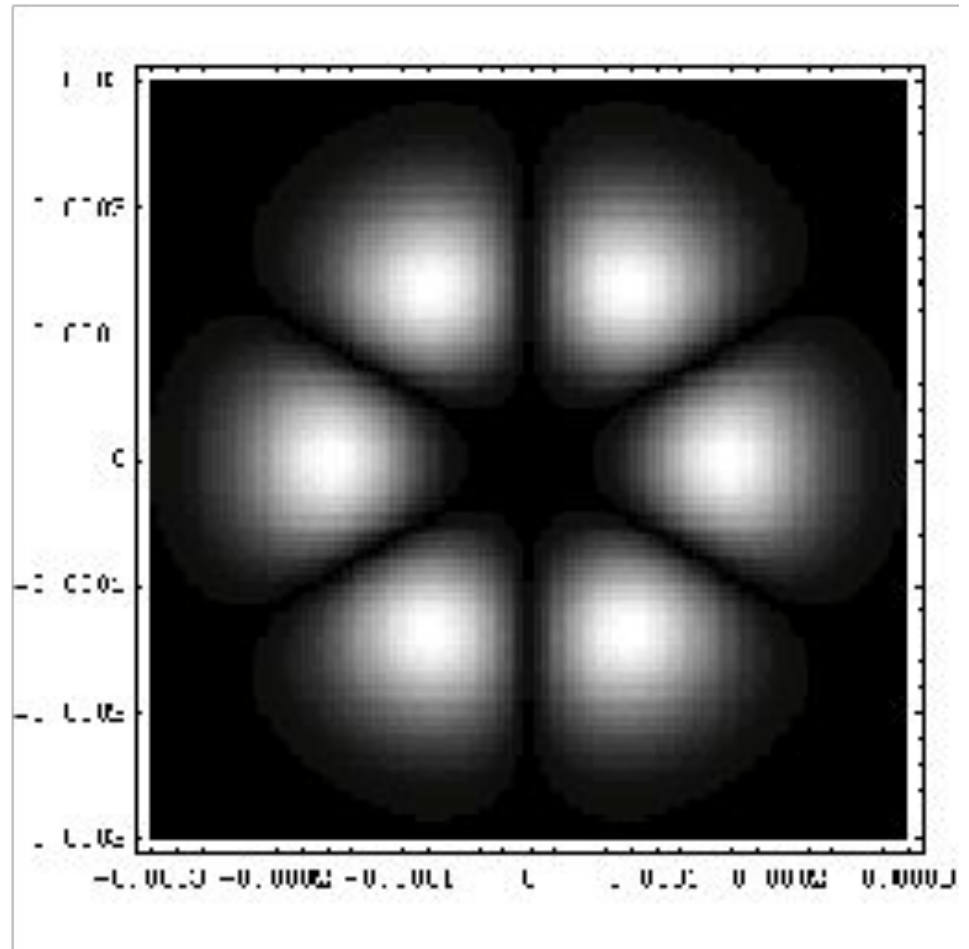
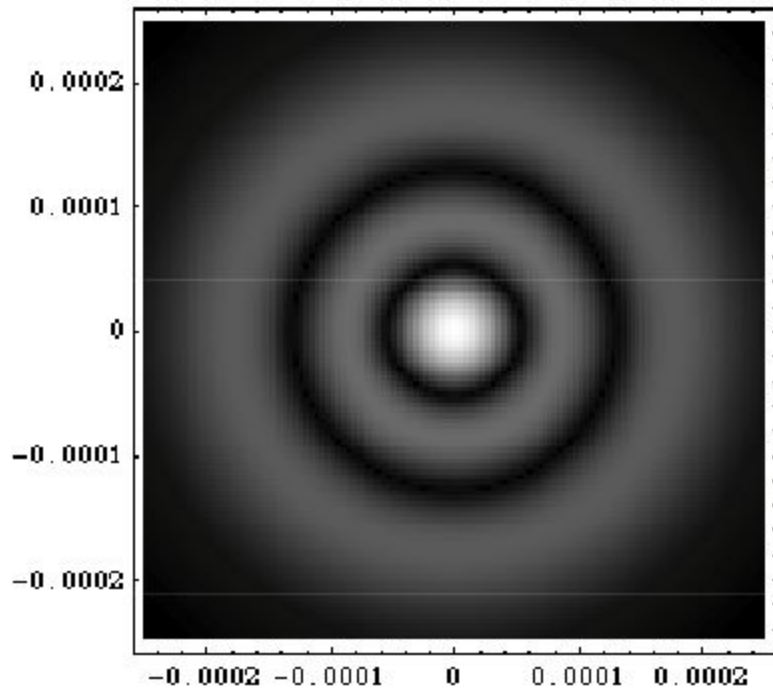
6,
1



Using Gaussian Decomposition



Laguerre-Gaussian modes



Resonant Frequency

Boundary Conditions in Resonator

- Whole number of wavelength in full round trip i.e. whole number of half wavelengths between mirrors

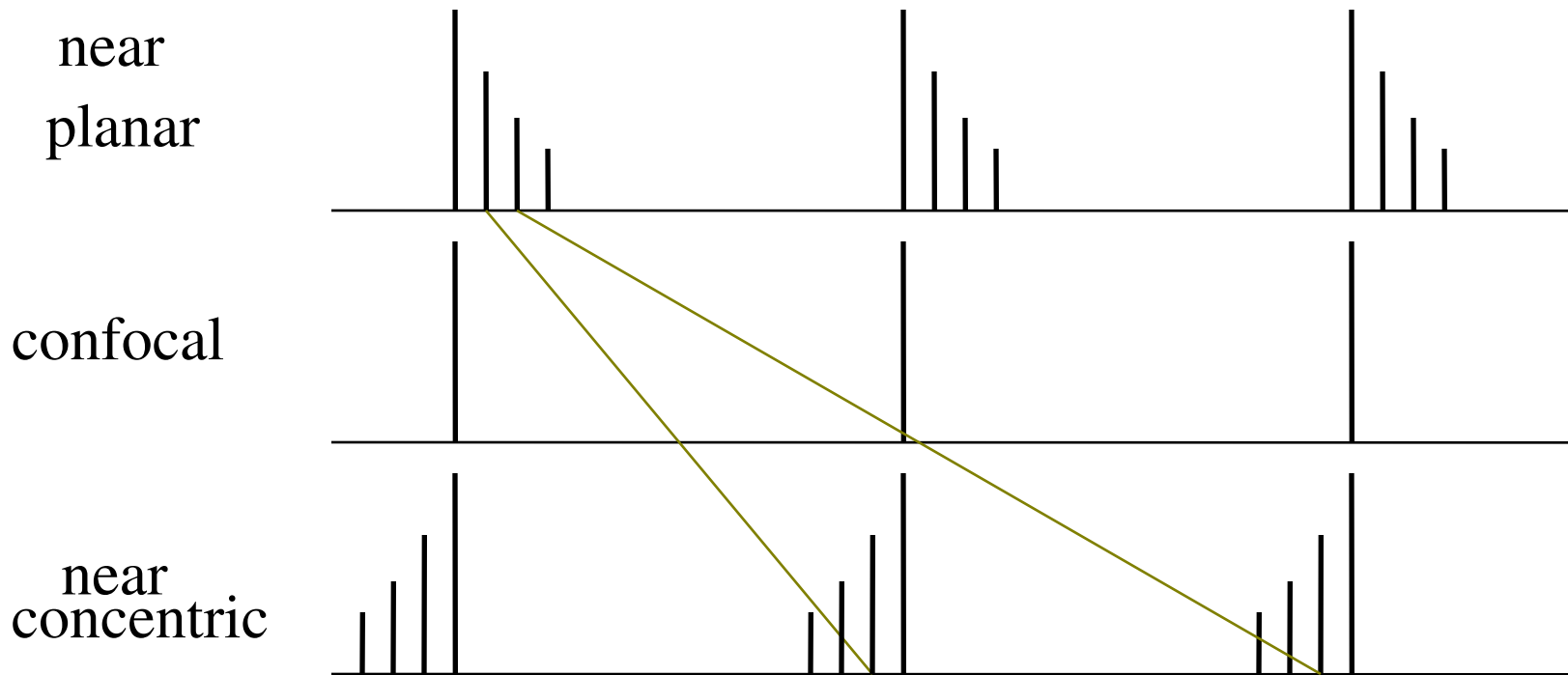
$$2 k L = q 2 \pi$$

$$\text{i.e. } f_q = q c / (2 L)$$

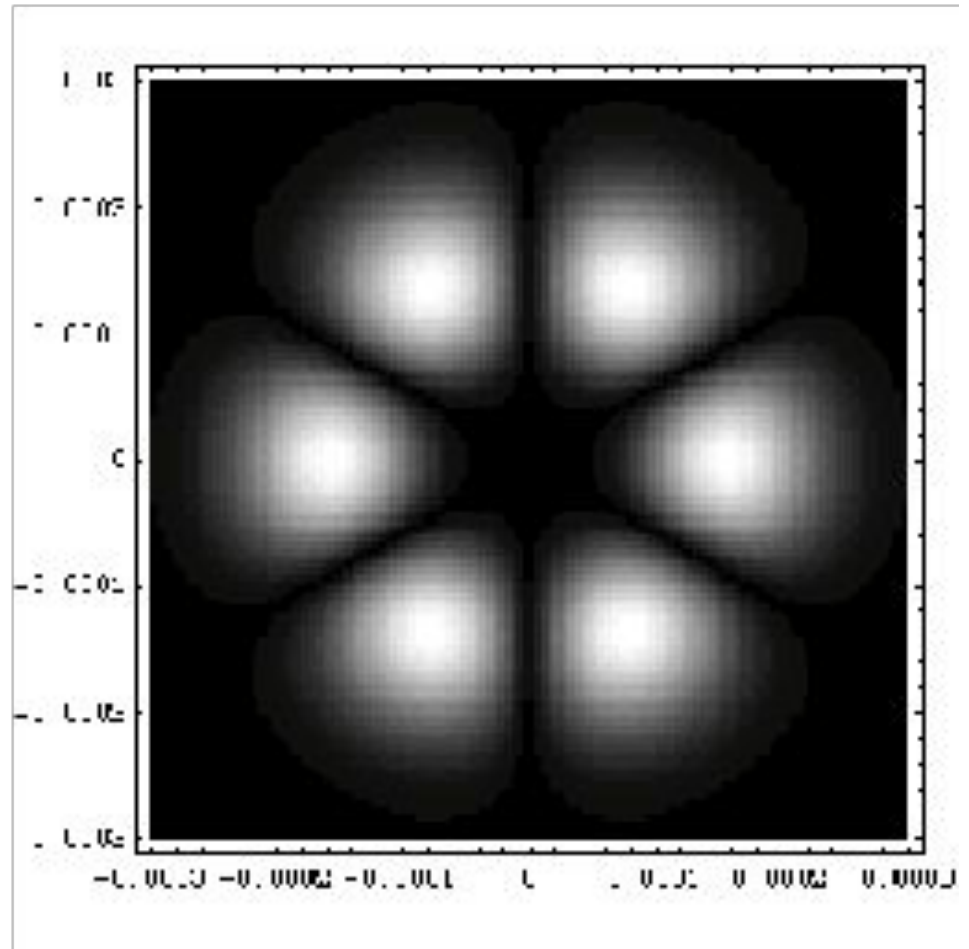
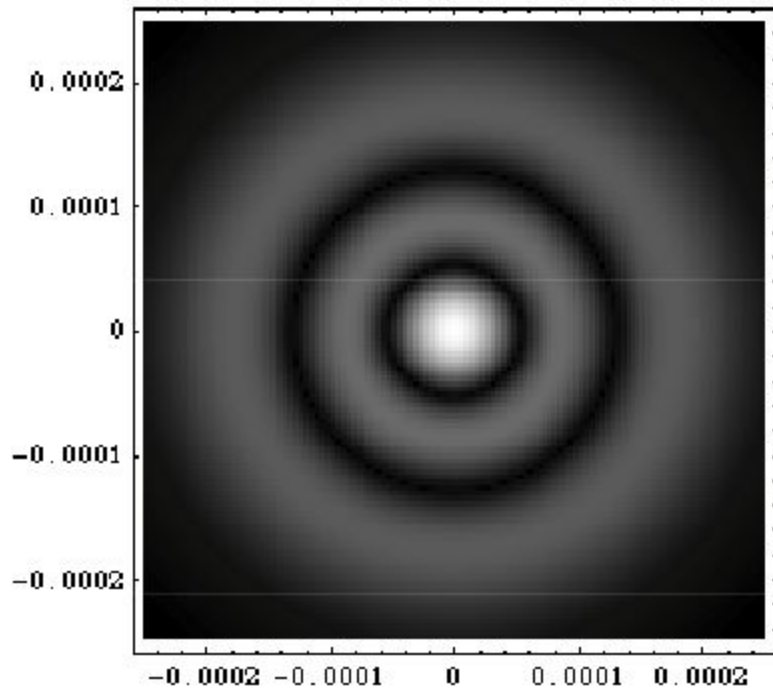
For opt freq. modes $q \sim 10^5$, relative spacing is small

Frequency of Higher Order Modes

- $f_{qmn} = (q + (m+n+1)/\pi \cos^{-1}[\pm\sqrt{g_1 g_2}]) c/(2L)$

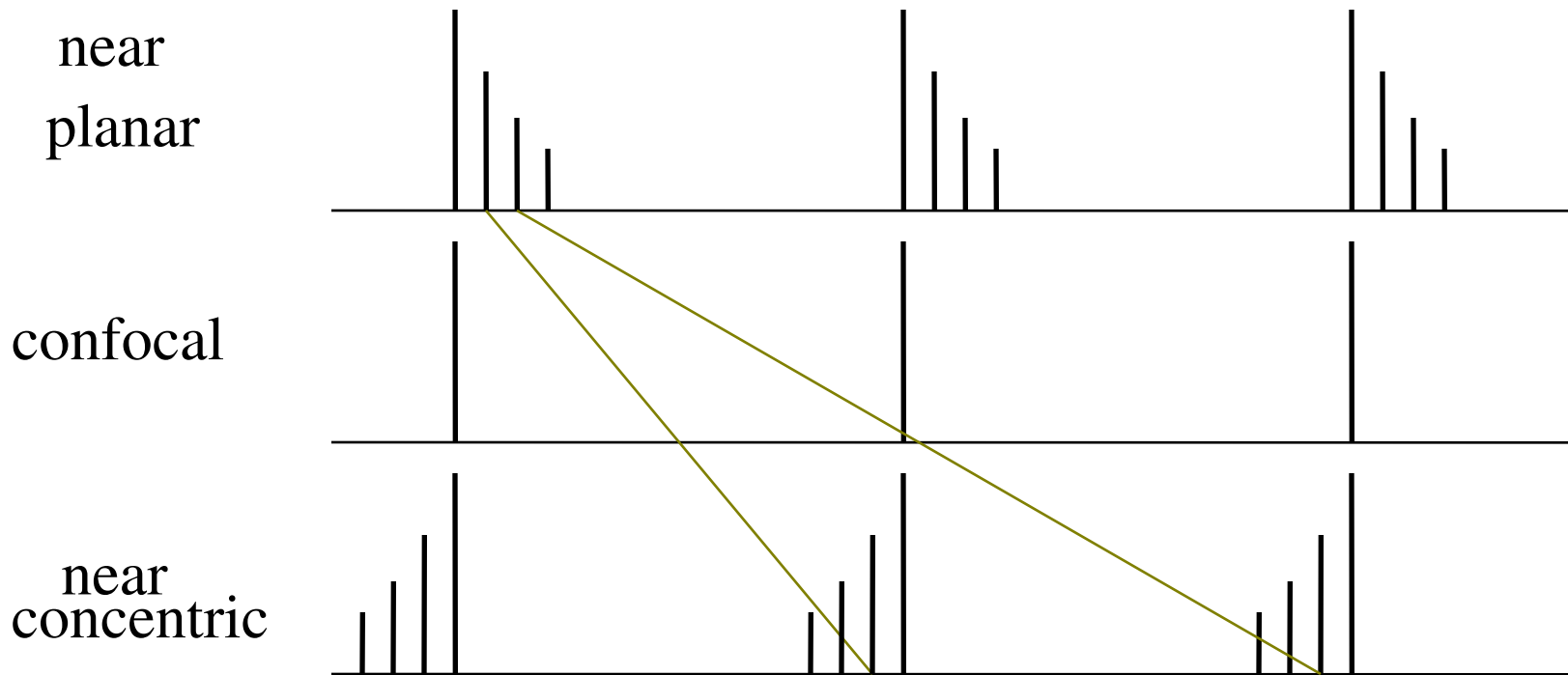


Laguerre-Gaussian modes

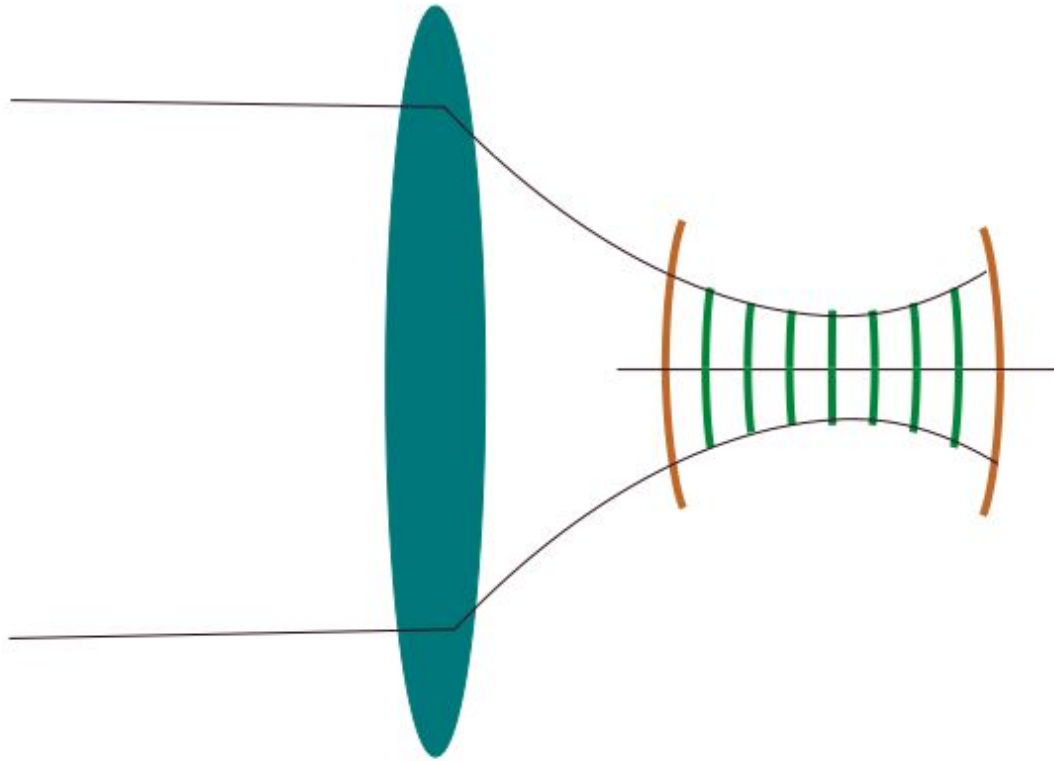


Frequency of Higher Order Modes

- $f_{qmn} = (q + (m+n+1)/\pi \cos^{-1}[\pm\sqrt{g_1 g_2}]) c/(2L)$



Mode Matching



In general will need to match the incoming mode shape to the cavity if you want to get the power in.

The different phase factors for higher order modes means that higher order modes have different resonant frequencies.

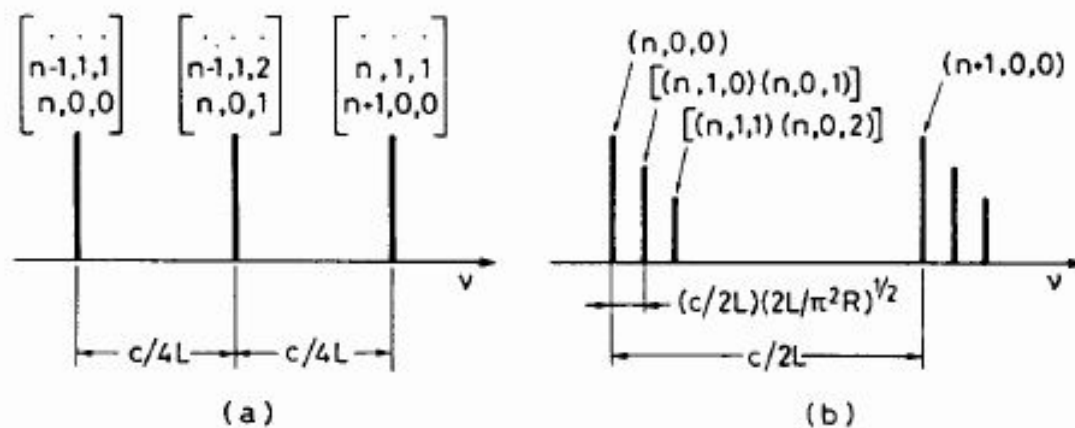


FIG. 5.10. (a) Mode spectrum of a confocal resonator and (b) mode spectrum of a near-plane resonator.