

Отношения. Предикаты

Отношения

- **Определение 1**

а) Множество $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ называется *n-местным отношением* между элементами множеств A_1, A_2, \dots, A_n ;

Определение 2

Пусть $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ – *n* – местное отношение.

а) При $n=1$ $R \subseteq A_1$ называется *одноместным отношением* или *свойством*;

б) при $n=2$ $R \subseteq A_1 \times A_2$ называется *двухместным отношением* или *бинарным отношением* или просто *отношением*;

Примеры

- 1) $M = \{\text{сентябрь, февраль, январь}\}$, $R \subseteq M$
 $R = \{x \mid x - \text{зимний месяц}\}$ $R = \{\text{январь, февраль}\}$
- 2) $A = \{2;4;5;6\}$
 $R \subseteq A^2$, $R = \{(x, y) \mid \text{НОД}(x, y) = 1\}$ $R = \{(2;5), (5;2), (4;5), (5;4), (5;6), (6;5)\}$
- 3) $B = \{\text{Толстой, Достоевский, Пушкин}\}$
 $C = \{\text{Идиот, Аэлита, Овод, Братья Карамазовы}\}$
 $R \subseteq B \times C$, $R = \{(x, y) \mid x - \text{автор } y\}$
 $R = \{(\text{Толстой, Аэлита}), (\text{Достоевский, Идиот}), (\text{Достоевский, Братья Карамазовы})\}$
- 4) $X = \{ \square, \hexagon, \triangle \}$, $Y = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
 $R \subseteq X \times Y$, $R = \{(x, y) \mid y - \text{число вершин } x\}$
 $R = \{(\square, 4), (\hexagon, 6), (\triangle, 3)\}$

Предикаты

Каждому отношению можно поставить в соответствие некоторое логическое выражение P_R , зависящее от n переменных (n -местный предикат) и определяющее, будет ли кортеж принадлежать отношению R . Это логическое выражение называют **предикатом отношения**.

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R \quad \Leftrightarrow \quad P_R(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \notin R \quad \Leftrightarrow \quad P_R(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$$

Операции над бинарными отношениями

Определение 3

Пусть $R \subseteq A \times B$ – бинарное отношение. Тогда отношение $R^{-1} \subseteq B \times A$ называется *обратным* к R , если для любых $x \in A$ и $y \in B$

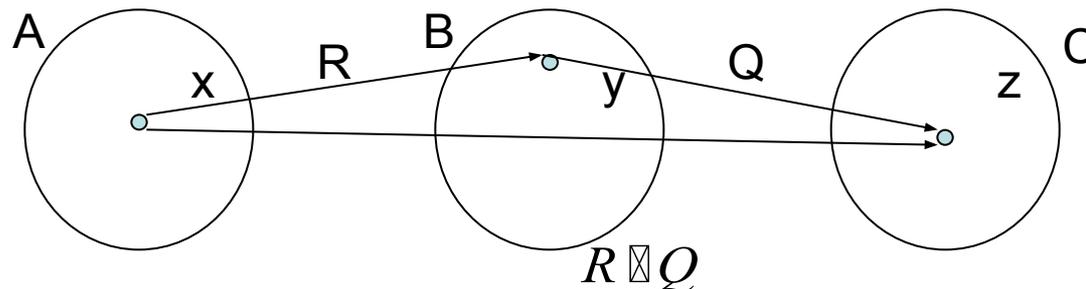
$$(x, y) \in R \leftrightarrow (y, x) \in R^{-1}$$

Определение 4

Пусть $R \subseteq A \times B, Q \subseteq B \times C$ – бинарные отношения, тогда отношение $R \circ Q \subseteq A \times C$ определяется следующим условием: для любых $x \in A, z \in C$

$$(x, z) \in R \circ Q \leftrightarrow \exists y \in B: (x, y) \in R \wedge (y, z) \in Q$$

$R \circ Q$ называют суперпозицией отношений R и Q



Примеры

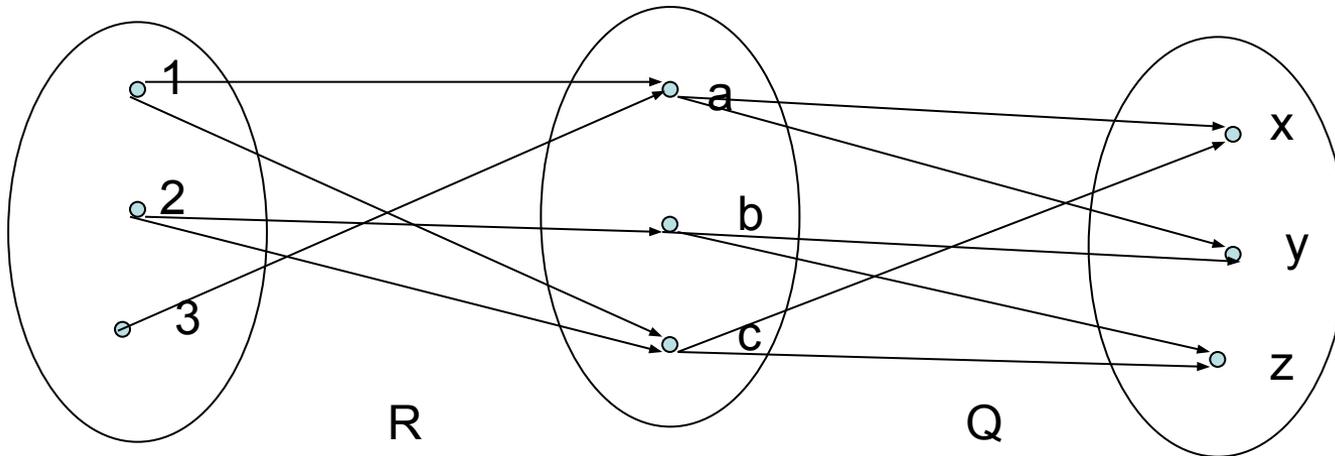
- $A=\{1,2,3\}, B=\{a, b, c\}, C=\{x, y, z\}$;
- $R=\{(1;a);(1;c);(2;b);(2;c);(3;a)\} \subseteq A \times B$
- $Q=\{(a; x);(a; y);(b; y);(b; z);(c; x);(c; z)\} \subseteq B \times C$

$$R^{-1} = ?$$

- $R^{-1}=\{(a;1);(c;1);(b;2);(c;2);(a;3)\}$

$$R \circ Q = ?$$

- $R \circ Q = \{(1;x);(1;y);(1;z);(2;x);(2;y);(2;z);(3;x);(3;y)\} = (A \times C) \setminus \{(3;z)\}$.



Матрица отношения

- **Определение 5**

- Матрицей бинарного отношения $R \subseteq A \times B$ называют матрицу
- $[P_R] = (p_{ij})_{m \times n}$, где

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (a_i, b_j) \in R, \\ 0, & \text{если } (a_i, b_j) \notin R. \end{cases}$$

- **Пример**

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c\}, C = \{x, y\}; \\ R &= \{(1; a); (1; c); (2; b); (3; a)\} \\ Q &= \{(a; x); (b; y); (c; x)\} \end{aligned}$$

$$Q^{-1} = \{(x; a); (x; c); (y; b)\}$$

$$A \times C = \{(1; x); (2; x); (3; x); (1; y); (2; y); (3; y)\}$$

$$R \boxtimes Q = \{(1; x); (2; y); (3; x)\}$$

$$[P_R] = \begin{matrix} & a & b & c \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$[P_Q] = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$[P_{Q^{-1}}] = \begin{matrix} & a & b & c \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$[P_{R \boxtimes Q}] = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad 7$$

Операции над отношениями в матричном виде

Пусть $R, Q \subseteq A \times B, [P_R] = (r_{ij})_{m,n}, [P_Q] = (q_{ij})_{m,n}$, тогда

$$1) [P_{R \cup Q}] = (r_{ij} \vee q_{ij})$$

$$2) [P_{R \cap Q}] = (r_{ij} \wedge q_{ij})$$

$$3) [P_{R \setminus Q}] = (r_{ij} \wedge \bar{q}_{ij})$$

$$4) [P_R^{-1}] = [P_R]^T$$

Пусть $R \subseteq A \times B, Q \subseteq B \times C$, тогда

$$5) [P_{R \circ Q}] = \left(\bigvee_k r_{ik} \wedge q_{kj} \right)$$

Пример

Дано:

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{b_1, b_2\}$$

$$R = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_2), (a_3, b_1)\},$$

$$Q = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_2)\}$$

Найти

$$R \cup Q, R \cap Q, Q \setminus R, Q^{-1}, R \boxtimes Q^{-1}$$

Решение:

P_R	b_1	b_2
a_1	1	1
a_2	0	1
a_3	1	0

P_Q	b_1	b_2
a_1	1	0
a_2	0	1
a_3	0	1

$P_{R \cup Q}$	b_1	b_2
a_1	1	1
a_2	0	1
a_3	1	1

$P_{R \cap Q}$	b_1	b_2
a_1	1	0
a_2	0	1
a_3	0	0

$P_{Q \setminus R}$	b_1	b_2
a_1	0	0
a_2	0	0
a_3	0	1

P_Q^{-1}	a_1	a_2	a_3
b_1	1	0	0
b_2	0	1	1

$P_{R \boxtimes Q^{-1}}$	a_1	a_2	a_3
a_1	1	1	1
a_2	0	1	1
a_3	1	0	0

$$1 \cdot 0 \vee 1 \cdot 1 = 1$$