Методы описания движения жидкости. Понятия о линиях и трубках тока. Расход элементарной струйки и расход через поверхность. Уравнения не разрывности (сплошности в разных формах). Ускорение жидкой частицы.

Выполнили: с-ты гр.БАЭ12-01

Потылицын В. Л., Фомин Л. В.

Содержание

- **Методы описания движения жидкости.**
- **Понятия о линиях и трубках тока. Расход элементарной струйки и расход через поверхность.**
- **Уравнения неразрывности.**
- **Ускорение жидкой частицы.**

Методы описания движения жидкости

Раздел гидравлики, в котором рассматриваются общие свойства движения жидкости

без выяснения причин его возникновения, называется *кинематикой.*

Главной кинематической особенностью жидкостей и газов является их *деформируе-*

мость, проявляющаяся в том, что в процессе движения изменяется расстояние между двумя любыми частицами. В кинематике существуют два способа описания движения – способ Лагранжа и способ Эйлера.

По способу Лагранжа движение жидкости задается путем указания зависимости координат

определенной (намеченной) частицы жидкости от ее начальных координат *x0, y 0, z0* и от

времени *t:*

$$\left.\begin{aligned} x &= x(x_0, y_0, z_0, t); \\ y &= y(x_0, y_0, z_0, t); \\ z &= z(x_0, y_0, z_0, t). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Система уравнений описывает траекторию движения частицы жидкости. Функции *x, y и z называются переменными Лагранжа. Для более полного описания состояния* жидкости нужно задать и плотность ρ как функцию тех же координат:

$$\rho = \rho(x_0, y_0, z_0, t).$$

На рис. 1 показана траектория движения частицы *A в неподвижной системе координат*, где за время *t координаты частицы изменились с x0, y0, z0 на x1, y1, z1*.

В переменных Лагранжа проекции скорости частицы *и определяют по фор*мулам

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \; u_y = \frac{dy}{dt}, \; u_z = \frac{dz}{dt},$$

проекции ускорения частицы по формулам

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \; a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \; a_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

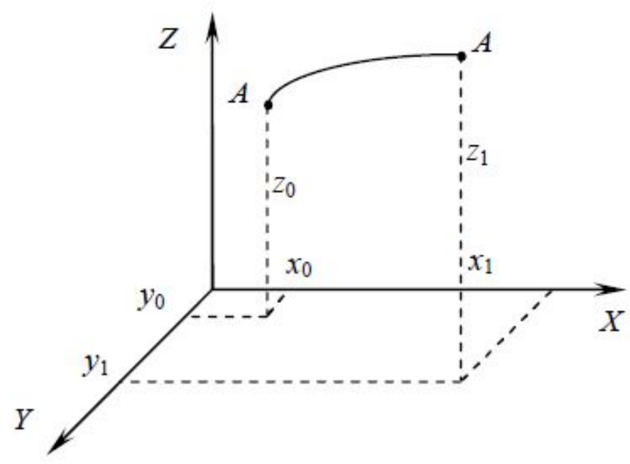

Рис. 1. Траектория движения частицы жидкости

Практически для решения большинства инженерных задач нет необходимости в знании параметров движения отдельных частиц, поэтому способ Лагранжа применяется только в особых случаях, например для описания переноса жидкостью мельчайших твердых частиц.

По способу Эйлера движение жидкости определяется полем скоростей частиц жидко-

сти в пространстве в каждый момент времени, т.е. описывается движение различных частиц, проходящих через определенные (намеченные) точки пространства. Проекции скорости частиц жидкости на координатные оси являются функцией координат точек пространства *x, y, z, относительно которых происходит движение, и времени:*

$$\left.\begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z, t), \\ u_y &= u_y(x, y, z, t), \\ u_z &= u_z(x, y, z, t). \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Для более полнс … кидкости нужно задать и плотность r как функцию тех же переменных:

$$\rho = \rho(x, y, z, t). \qquad (3)$$

Проекции ускорений частиц жидкости в определенных точках пространства определяются по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\left.\begin{aligned}
a_x &= \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial t};\\
a_y &= \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial u_y}{\partial t};\\
a_z &= \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial u_z}{\partial t}.
\end{aligned}\right\}$$

Так как $\frac{dx}{dt} = u_x, \quad \frac{dy}{dt} = u_y, \quad \frac{dz}{dt} = u_z,$ то система уравнений может быть записана в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
a_x &= u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_x}{\partial t};\\
a_y &= u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial t};\\
a_z &= u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial t}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Кинематический смысл слагаемых в правой части уравнений системы состоит в следующем. Первые три слагаемых каждого уравнения представляют собой соответствующую проекцию конвективного ускорения, которое образуется за счет изменения координат частицы, соответст вующих ее передвижению (конвекции). Последнее слагаемое каждого уравнения представляет проекцию локального ускорения, которое обуславливается изменением поля скоростей со временем при фиксированных координатах. При решении большинства инженерных задач необходимо знать, с какими скоростями различные частицы жидкости проходят через определенные элементы технологических машин и аппаратов. Поэтому способ описания движения Эйлера принят основным.

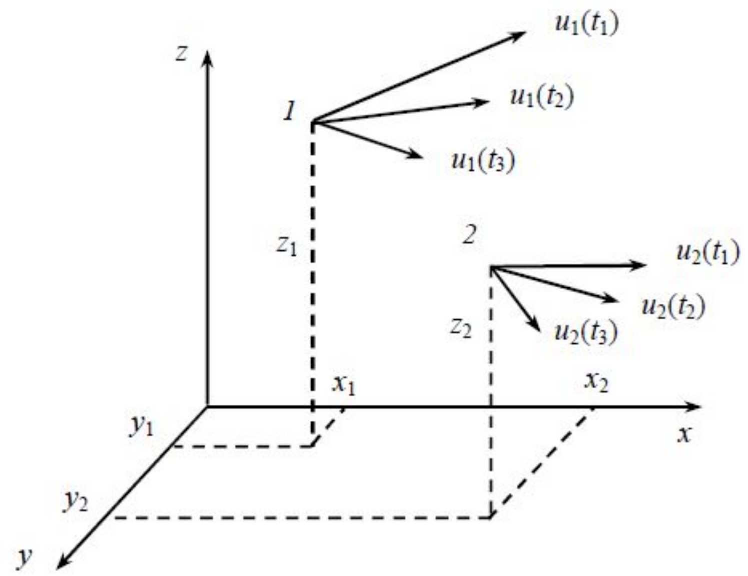

Рис. 2. Поле скоростей движения частиц жидкости в различные моменты времени

Понятия о линиях и трубках тока. Расход элементарной струйки и расход через поверхность

Линией тока называется кривая, в каждой точке которой в данный момент времени

вектор скорости жидкости совпадает с касательной к этой кривой. Бесконечно малый отрезок линии тока δl *можно считать прямолинейным и совпадающим по направлению с вектором* скорости. Если проекции отрезка δl *на координатные оси обозначить через* δx, δy *и* δz, *то из* геометрических представлений можно записать

$$\frac{u_x}{u} = \frac{\delta x}{\delta l}, \quad \frac{u_y}{u} = \frac{\delta y}{\delta l}, \quad \frac{u_z}{u} = \frac{\delta z}{\delta l},$$

из которых получаем уравнение линии тока

$$\frac{\delta x}{u_x} = \frac{\delta y}{u_y} = \frac{\delta z}{u_z}.$$

При неустановившемся движении линии тока в жидкости не совпадают с траектория-

ми ее частиц. На рис. 3 показаны линия тока в момент времени *t1 и траектория частицы A1 с* указанием ее вектора скорости в последующие моменты времени *t2*

и *t3*. В установившемся движении линии тока в жидкости совпадают с траекториями ее

частиц, так как поле скоростей во времени не меняется.

*Трубкой тока называется поверх*ность, образованная линиями тока, проведенными в данный момент времени через все точки бесконечно малого замкнутого контура, расположенного внутри движущейся жидкости. Жидкость, движущаяся внутри трубки тока, называется *элементарной струйкой. Элементарная струйка обладает сле*дующими свойствами:

1) частицы жидкости не выходят из элементарной струйки и не входят в нее через боковую поверхность;

2) скорости частиц жидкости во всех точках одного и того же поперечного сечения одинаковы вследствие малости площади поперечного сечения;

3) при установившемся движении форма элементарной струйки остается не изменной во времени.

Использование понятия "элементарная струйка" позволяет упростить рассмотрение движения жидкости. Выделяя в потоке реальной жидкости элементарные струйки, можно считать, что внутри струйки движется идеальная, т.е. невязкая, жидкость, что обусловлено свойствами элементарной струйки.

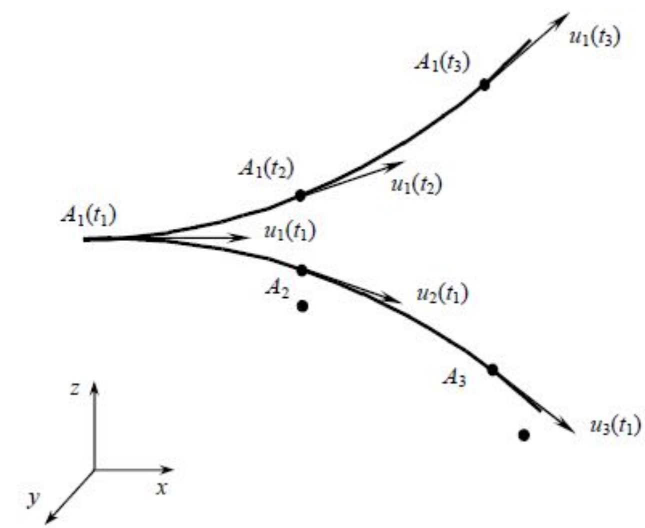

Рис. 3 Линия тока и траектория частицы жидкости в неустановившемся движении

Расходом элементарной струйки называется количество жидкости, протекающей в

единицу времени через живое сечение элементарной струйки. В зависимости от единицы измерения количества жидкости расход может быть объемным или массовым. Объемный расход элементарной струйки dQ определяется выражением

$dQ = u\ dS$, (5)

где u - скорость жидкости в данном живом сечении элементарной струйки площадью dS.

Массовый расход элементарной струйки

$dQm = r\ u\ dS$. (6)

Из дифференциальных уравнений (5) и (6) следует, что

$dQm = r\ dQ$.

Уравнения неразрывности

Основные уравнения гидродинамики выражают закон сохранения массы и закон сохранения энергии для движущейся жидкости.

Закон сохранения массы для установившегося потока несжимаемой жидкости в канале

с непроницаемыми стенками для условий сплошности (неразрывности) течения сводится к закону постоянства расхода вдоль канала и выражается уравнением объемного расхода

$$Q = \upsilon_{ср1} S_1 = \upsilon_{ср2} S_2 = \mathrm{const}\,, \qquad (7)$$

где $\upsilon_{ср1}$, $\upsilon_{ср2}$ - средние скорости потока в сечениях *1* и *2;*

S_1, S_2 – площади сечения 1 и 2.

Из уравнения следует, что средние по сечению скорости в потоке несжимаемой жидкости обратно пропорциональны площадям сечений:

$$\frac{\upsilon_{ср1}}{\upsilon_{ср2}} = \frac{S_2}{S_1}\,. \qquad (8)$$

Средней по нормальному сечению скоростью потока $(\upsilon_{ср})$ называется одинаковая для всех точек сечения скорость, обеспечивающая действительный расход через это сечение:

$$\upsilon_{ср} = \frac{Q}{S}\,. \qquad (9)$$

Эпюры скоростей в нормальном сечении потока в трубе для ламинарного и турбулентного течений при одинаковом расходе, а также эпюра средней по сечению скорости приведены на рис. 5.

*Нормальное сечение – это сечение, нормальное в каждой точке к скорости потока (жи*вое сечение).

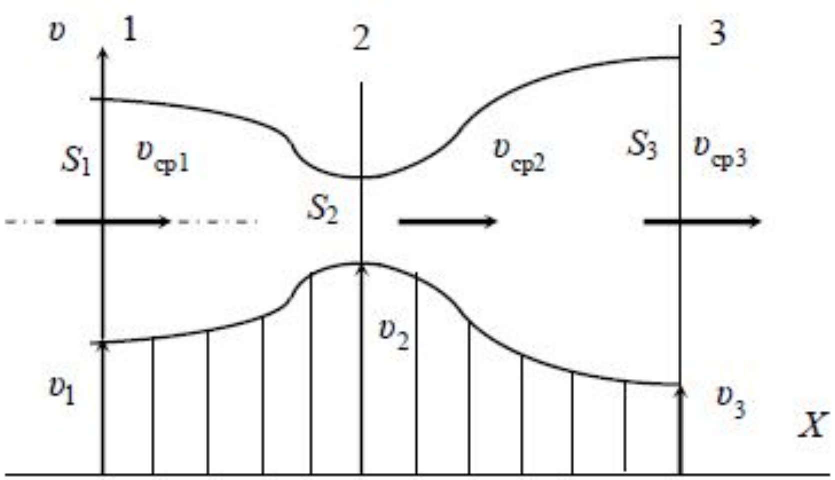

Рис. 4. Изменение корости вдоль турбины.

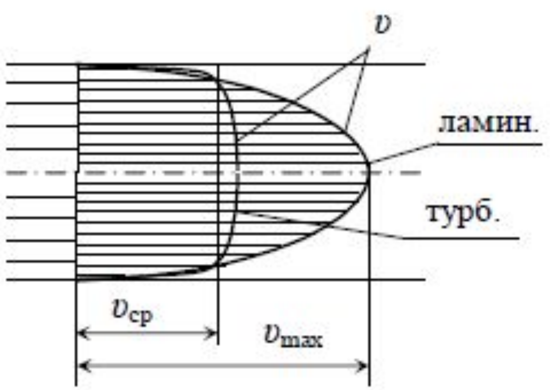

Рис. 5. Эпюра скоростей.

Уравнение неразрывности

Уравнение неразрывности в переменных Эйлера:

$$\frac{dp}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathrm{u} = q_m . \qquad (10)$$

Если не учитывается сжимаемость жидкой среды, то $\frac{dp}{dt} = 0$, и уравнение (10) принимает вид

$$\operatorname{div} \mathrm{u} = \frac{dq_m}{\rho} . \qquad (11)$$

При q_m=0

$$\operatorname{div} \mathrm{u} = 0$$

или

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \qquad (12)$$

Ускорение жидкой частицы

При движении идеальной жидкости из поверхностных сил на нее действуют только силы давления, а к массовым силам добавляются силы инерции. При составлении баланса сил движущегося объема жидкости необходимо учитывать, что силы инерции направлены в сторону, противоположную направлению ускорения. Единичной силой инерции, приходящейся на единицу массы жидкости, является ускорение $a = F_{и}/m$.

В гидростатике были выведены дифференциальные уравнения равновесия, включающие массовые силы и силы давления и записанные для единицы массы жидкости в проекциях на оси координат. Прибавив в левой части каждого из уравнений системы соответствующую проекцию ускорения ***a = du/dt** , взятую с обратным знаком (в соответствии с принципом Д 'Аламбера), получаем* дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера):

$$\left.\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{du_x}{dt} &= 0; \\ Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{du_y}{dt} &= 0; \\ Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{du_z}{dt} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

С учетом выражений для проекций ускорений уравнения (13) могут быть записаны в Виде

$$\left.\begin{aligned}
X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_x}{\partial t};\\
Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_y}{\partial t};\\
Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial t}.
\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

В уравнениях Эйлера содержится 5 неизвестных величин: u_x, u_y, u_z, p, ρ.