METODE NUMERICE – curs 1

- ***Notare:***

Nota_finală = 0.3 * Nota_laborator + 0.7 * Nota_examinare

Nota_examinare = 0.2 * Nota_test + 0.8 * Nota_examen

Atenţie!!! Nota_laborator, Nota_examen, Nota_examinare – *minim 4.50*

☞ <u>Examen</u>: 4 subiecte egal punctate

- ***Condiţie intrare în examen:*** **maxim 1 absenţă la laborator**

    - **maxim 2 absenţe la laborator – recuperate în ultima săptămână din semestru**

    - **ore de laborator desfăşurate hibrid – la facultate şi online**

- ***Structurarea materiei:***

Cap. 1 Calculul în virgulă mobilă

Cap.2 Rezolvarea sistemelor determinate de ecuaţii algebrice liniare

Cap.3 Rezolvarea sistemelor supradeterminate de ecuaţii algebrice liniare

Cap.4 Calculul valorilor şi vectorilor proprii

Cap.5 Calculul valorilor singulare

Cap.6 Rezolvarea ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii neliniare

Cap.7 Aproximarea numerică a funcţiilor

Cap.8 Rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale

Cap. 1 Calculul în virgulă mobilă

1.1 Aritmetica în virgulă mobilă

- *reprezentarea numerelor în calculatorul numeric depinde de:*
  - ◇ tipul numerelor (întregi sau reale);
  - ◇ structura constructivă a echipamentului de calcul:
    - ▪ baza de reprezentare a numerelor;
    - ▪ lungimea cuvântului de memorie □ număr finit de cifre

☞ **Numerele întregi reprezentabile:**

- formează o mulţime finită, *I*;
- reprezentarea lor este exactă;
- aritmetica cu aceste numere este exactă (cu excepţia operaţiei de împărţire, în general)

$$I = \{z \in \mathbb{Z} / m_I \le z \le M_I\}$$

m_I, M_I – depinde de baza de numeraţie, lungimea cuvântului de memorie, precum şi modul de reprezentare α – baza de numeraţie; t_I – număr cifre în baza α ce pot fi reprezentate;

$$m_I = -\alpha^{t_I - 1} \qquad M_I = \alpha^{t_I - 1} - 1$$

Exemplu:

$$\alpha = 2, t_I = 16 \Rightarrow m_I = -2^{15};\ M_I = 2^{15} - 1$$

$$\alpha = 2, t_I = 32 \Rightarrow m_I = -2^{31};\ M_I = 2^{31} - 1$$

Observaţii:

- ☞ Încercarea de a opera cu numere care nu aparţin domeniului *I* de reprezentare, determină, la majoritatea calculatoarelor numerice, emiterea unor mesaje de eroare fatală, programele implicate fiind abandonate: “depăşire (binară) inferioară” (dacă $z < m_I$), respectiv “depăşire (binară) superioară” (dacă $z > M_I$).
- ☞ uzuală este reprezentarea în baza de numeraţie 2, alocându-se o cifră pentru reprezentarea semnului şi $t_I - 1$ cifre pentru reprezentarea valorii absolute a numărului ***reprezentare în cod complementar faţă de baza α***

- *reprezentare în cod complementar faţă de baza α*

$$z_c = \begin{cases} z, & z \geq 0 \\ \alpha^{t_I} - |z|, & z < 0 \end{cases}$$

☞ **Numerele reale**

- în general numerele reale se reprezintă aproximativ în calculatorul numeric
- în continuare se definesc două submulţimi ale numerelor reale:
  - G - conţine numerele reale care s-ar putea reprezenta în calculatorul numeric;
  - F - conţine numerele reale care se reprezint *efectiv* în calculatorul numeric;
- metoda cea mai larg folosită pentru reprezentarea numerelor reale a virgulei mobile.

☞ **Definiţie:**

Prin <u>aritmetica virgulei mobile</u> se înţeleg următoarele:

(a) *un model matematic de reprezentare a numerelor (definirea mulţimii* F*);*

(b) *o modalitate de reprezentare a numerelor din mulţimea* G *în calculatorul numeric, altfel spus o modalitate de implementare în calculator a modelului (definirea operatorului de rotunjire,* notat cu *fl);*

(c) *operaţiile elementare: adunarea, scderea, înmulţirea şi împărţirea definite cu numerele mulţimii* F.

METODE NUMERICE – curs 1

1.1.1 Numere în virgulă mobilă

Exemplu:

$$x = 1234.56789 = 1234.56789 \times 10^0 = 123456789.0 \times 10^{-5} =$$

$$= 0.00123456789 \times 10^6 = 0.123456789 \times 10^4$$

e - exponent

f - mantisă

β - bază

t – numărul cifrelor mantisei

Definiţie:

<u>Mulţimea F, de numere în virgulă mobilă</u> este:

$$F = \{x \in \mathbb{R} | x = f \cdot \beta^e\} \cup \{0\}$$

$$f = \pm\left(\frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{d_t}{\beta^t}\right), \quad d_i \in \{0,1,\cdots,\beta-1\}, \quad i = 1,2,\cdots,t, \quad L \le e \le U$$

METODE NUMERICE – curs 1

Observaţii:

1. Mulţimea F este complet definită de următoarele mărimi:
   - baza maşinii de calcul, β;
   - numărul de cifre ale mantisei, t;
   - cel mai mic exponent, L (limita de depăşire inferioară);
   - cel mai mare exponent, U (limita de depăşire superioară).
2. Dacă pentru orice $x \in F\backslash\{0\}$, $d_1 \neq 0$, atunci mulţimea de numere în virgulă mobilă este normalizată. În acest caz ${}^1/_\beta \leq |f|$<1.
3. Orice număr $x \in F\backslash\{0\}$ este cuprins între:

$$m \leq |x| \leq M$$

m= β^{L-1}, $\quad M = \beta^U \cdot (1 - \beta^{-t})$

m – *cel mai mic număr real pozitiv reprezentabil;* M – *cel mai mare numr real pozitiv reprezentabil*

☞ Mulţimea realilor reprezentabili este:

$$G = \{x \in \mathbb{R} | m \le |x| \le M\} \cup \{0\} = [-M, -m] \cup \{0\} \cup [m, M]$$

Observaţie:

☞ Încercarea de a opera cu numere care nu aparţin domeniului *G* de reprezentare, determină, la majoritatea calculatoarelor numerice, emiterea unor mesaje de eroare fatală, programele implicate fiind abandonate:

- "depăşire flotantă inferioară" (dacă $|x| < m$);
- "depăşire flotantă superioară" (dacă $|x| > M$).

Exemplu:

Se consideră o mulţime de numere în virgulă mobile cu următoarele caracteristici:

$$\beta = 2;\ \ t = 3;\ \ L = -1;\ \ U = 2$$

$$\Downarrow$$

$$m = {}^{1}/_{4} \quad M = {}^{7}/_{2}$$

$$F: \quad 0;\ \pm 0.100 \times 2^{e}; \pm 0.101 \times 2^{e}; \pm 0.110 \times 2^{e}; \pm 0.111 \times 2^{e}; \quad e \in \{-1, 0, 1, 2\}$$

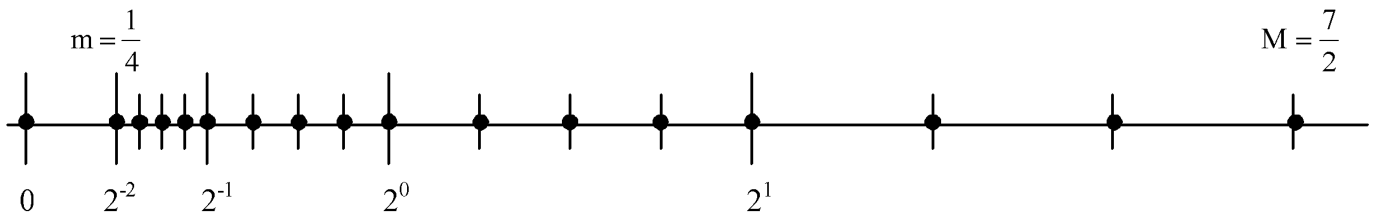

Fig. 1. Elementele pozitive ale mulţimii F de numere în virgulă mobilă

Concluzii:

a) Numerele aparţinând mulţimii F nu sunt echidistante în domeniul lor de existenţă; acestea sunt mai "dese" în apropierea originii (puterile lui β scad) şi mai "rare" spre extremităţile mulţimii F (puterile lui β cresc).

b) Numerele sunt echidistante numai între puterile succesive ale lui β .

c) Datorită faptului că mulţimea F are un număr finit de elemente, nu se pot reprezenta continuu, în detaliu, toate numerele reale; mai mult, fiecare număr din mulţimea F este asociat unui întreg interval din mulţimea G, deci unui întreg interval de numere reale.

<u>Observaţii</u>:

1. Uzuală este reprezentarea normalizată în baza de numeraţie doi, alocându-se o poziţie binară pentru semn, un număr de poziţii binare pentru exponent şi t cifre binare pentru mantisă. Deoarece tipul de semn al numărului este memorat, pentru fracţie se realizează o reprezentare a întregului $\overline{d_1 d_2 \cdots d_t}$.

2. Pentru a nu se memora semnul şi pentru exponent, se reprezintă un număr întreg pozitiv: C = e + E $\geq$0 (E - *deplasament*, C – *caracteristică*).

3. Cum reprezentarea este normalizată, prima cifră a fracţiei este $d_1 = 1$ şi nu se mai reprezintă. Astfel, se câştigă încă o poziţie binară pentru fracţie → reprezentare normalizată cu "poziţie binară ascunsă" (în limba engleză, "hidden bit").

4. Standardul IEEE (the Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. USA):
    - reprezentare *simplă precizie (32 biţi)*: $\beta = 2,\ t = 24, L = -126,\ U = 127$
      $m \cong 10^{-38}, \mathrm{M} \cong 10^{38}$;
    - reprezentare *dublă precizie (64 biţi)*: $\beta = 2,\ t = 53, L = -1022,\ U = 1023.$
      $m \cong 10^{-308}, \mathrm{M} \cong 10^{308}$