лекция

Тема №4:

Дискретные случайные величины

План лекции:

- 1. Дискретные и непрерывные случайные величины
- 2. Числовые характеристики дискретных случайных величин
- 3. Биномиальный закон распределения
- 4. Закон распределения Пуассона
- 5. Функция распределения дискретной случайной величины
- 6. Законы распределения непрерывных случайных величин.

1. Дискретные и непрерывные случайные величины

- ***Случайной величиной*** называется переменная, которая в результате испытания принимает то или иное числовое значение.
- Случайная величина называется ***дискретной***, если число ее возможных значений конечно или счетно.
- ***Непрерывной*** случайной величиной называют случайную величину, которая в результате испытания принимает все значения из некоторого числового промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Законом распределения дискретной случайной величины называется такая таблица, в которой перечислены все возможные значения этой случайной величины (без повторений) с соответствующими им вероятностями.

В общем виде закон распределения для случайной величины, например, X :

X :

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
p_i	p_2	p_2	$\ldots$	p_k

где $p_i = P\left(X = x_i\right),\ i = 1,2,\ldots,k.$

$\boxed{p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1.}$ *основное свойство закона распределения*

2. Числовые характеристики дискретных случайных величин

- **Математическое ожидание дискретной случайной величины**
- **Дисперсия дискретной случайной величины**
- **Среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины**

Пусть закон распределения дискретной случайной величины X имеет вид

X :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
p_i	p_2	p_2	$\cdots$	p_k

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется число M(X), вычисляемое по формуле

$$\boxed{M(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k.}$$

- Пусть закон распределения случайной величины X тот же, что и выше
- ***Дисперсией*** дискретной случайной величины X называется число Д(X) определяемое равенством

$$D(X)=\sum_{i=1}^{k}(x_i-M(X))^2p_i=(x_1-M(X))^2p_1+(x_2-M(X))^2p_2+\ldots$$

$$+(x_k-M(X))^2p_k.$$

- Число Д(X) является мерой разброса значений случайной величины X около ее математического ожидания.

$\sqrt{D(X)}$ называется ***средним квадратическим отклонением*** случайной величины X и обычно обозначается через σ.

Наряду со средними величинами в качестве статистических характеристик вариационных рядов распределения рассчитываются структурные средние – **мода** и **медиана**.

Мода (Мо) представляет собой значение изучаемого признака, повторяющееся с наибольшей частотой, т.е. мода – значение признака, встречающееся чаще всего.

Медианой (Ме) называется значение признака, приходящееся на середину ранжированной (упорядоченной) совокупности, т.е. медиана – центральное значение вариационного ряда.

3. Биномиальный закон распределения

Случайная величина X имеет **биномиальный закон распределения** с параметрами n и p, если ее закон распределения имеет вид:

X:

x_i	0	1	2	…	n
p_i	$P_{0,n}$	$P_{1,n}$	$P_{2,n}$	…	$P_{n,n}$

,

где вероятности $P_{m,n}$ *вычисляются по формуле Бернулли:*

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m},$$

n *– положительное целое число,* $m = 0,1,2,\ldots,n$, $0 < p < 1$.

4. Закон распределения Пуассона

В пределе при $n \to \infty$ и $\lambda = np = const$ биномиальное распределение переходит в так называемое распределение Пуассона.

Определение. Говорят, что случайная величина X имеет **распределение Пуассона** с параметром λ, если ее закон распределения имеет вид:

X:

x_i	0	1	2	...
p_i	P_0	P_1	P_2	...

,

$$где\ P_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

$m = 0, 1, 2, \ldots,\ \lambda$ – *положительное число.*

5. Функция распределения дискретной случайной величины

Определение. ***Функцией распределения*** *случайной величины* X *называется такая функция* $F(x)$, *значение которой в точке* x *численно равно вероятности того, что в произвольном испытании значение случайной величины* X *окажется меньше чем* x, *т.е.*

$$\boxed{F(x) = P(X < x).}$$

Данное определение задает функцию распределения не только для дискретных, но и для непрерывных случайных величин.

Функция распределения случайной величины имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при\ x < x_1, \\ p_1, & при\ x_1 \le x < x_2, \\ p_1 + p_2, & при\ x_2 \le x < x_3, \\ \ldots, & \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}, & при\ x_{n-1} \le x < x_n, \\ 1, & при\ x \ge x_n. \end{cases}$$

У дискретной случайной величины функция распределения ступенчатая.

Например, для случайного числа очков, выпавших при одном бросании игральной кости, распределение, функция распределения и график функции распределения имеют вид:

1	2	3	4	5	6
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при -\infty < x < 1, \\ \frac{1}{6}, & при\ 1 \le x < 2, \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}, & при\ 2 \le x < 3, \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}, & при\ 3 \le x < 4, \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}, & при\ 4 \le x < 5, \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}, & при\ 5 \le x < 6, \\ 1, & при\ x \ge 6 \end{cases}$$