

Факультет фундаментальной подготовки

Кафедра теории электрических цепей и связи (ТЭЦ и С)

Дисциплина

Общая теория связи

Лектор:

Заведующий кафедрой
Шумаков Павел Петрович

Лекция № 5

Дискретные сигналы в инфотелекоммуникации.

Учебные вопросы:

1. Дискретизация аналогового сигнала.
2. Теорема Котельникова.
3. Дискретное преобразование Фурье.

Литература:

Стр. 55..60; 60..63;

Используя MathCAD рассчитать ДПФ и построить энергетические спектры для импульсных сигналов из таблицы 2.1 на стр 45. Четные номера : треугольный (2) и косинусоидальный (3).

Нечетные номера : Прямоугольный (1) и SINC-образный (5).

Если интервал дискретизации для четных номеров $T/Mp*12$, а для нечетных $T/Mp*14$



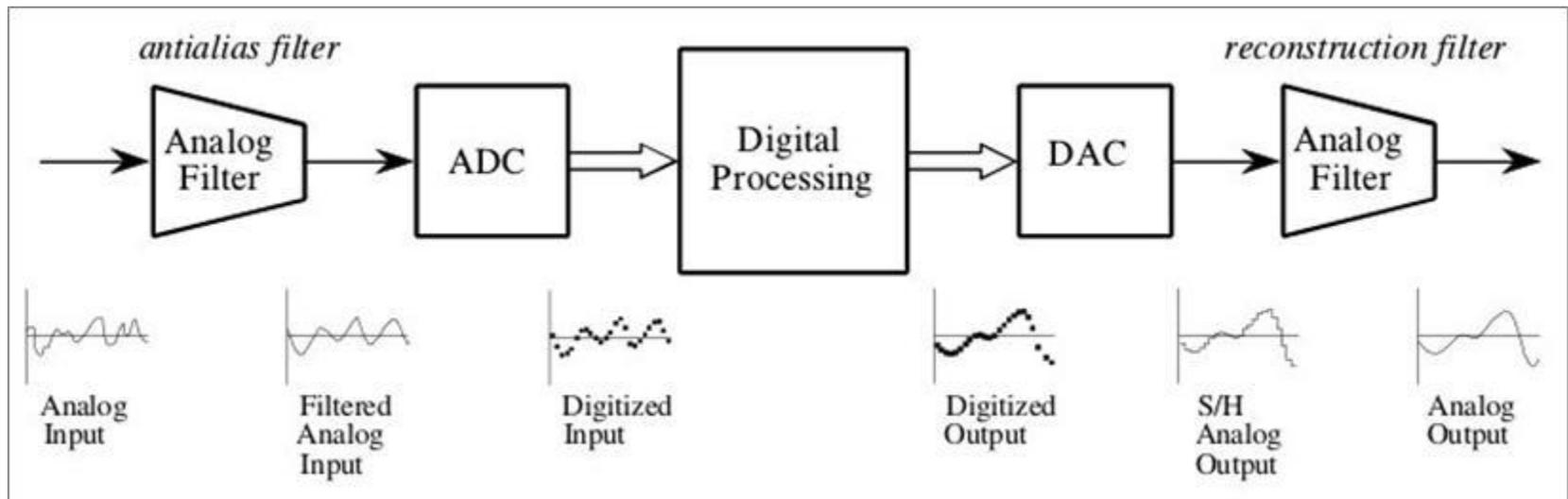
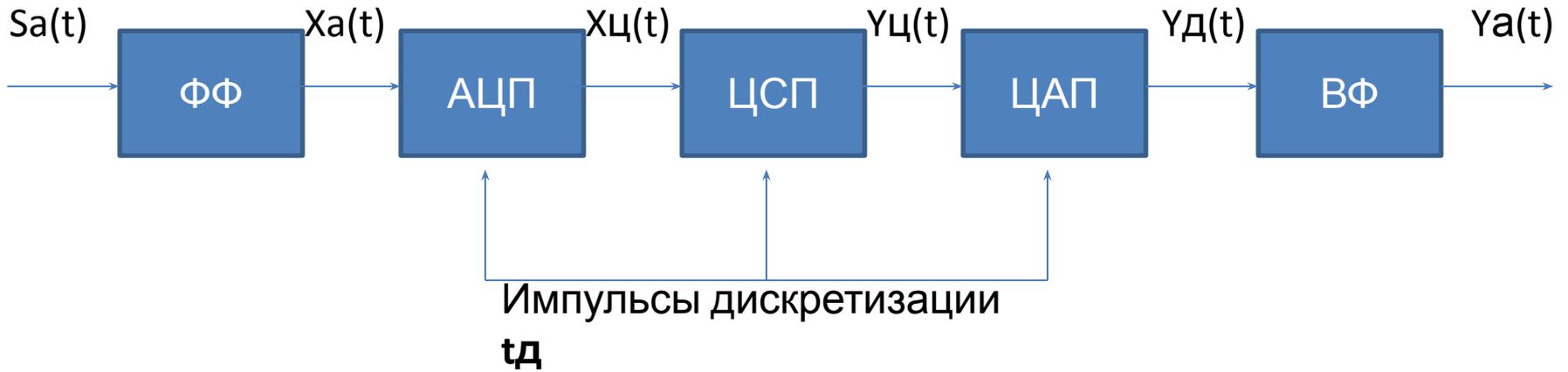
Дискретное преобразование Фурье

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \cdot W_N^{n \cdot k}, \quad k=0..N-1,$$

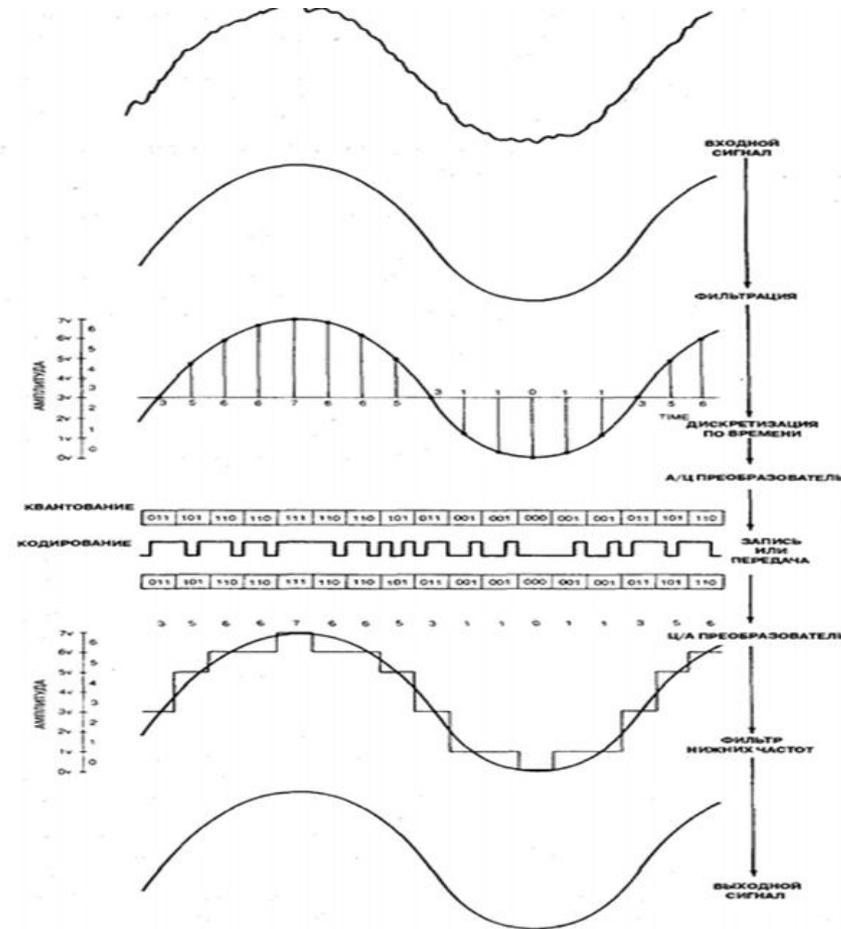
$$W_N^{n \cdot k} = \exp\left(-j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot n \cdot k\right).$$

$$W_N^{n \cdot k} = W_N^{(n-m+m) \cdot k} = W_N^{(n-m) \cdot k} \cdot W_N^{m \cdot k}$$

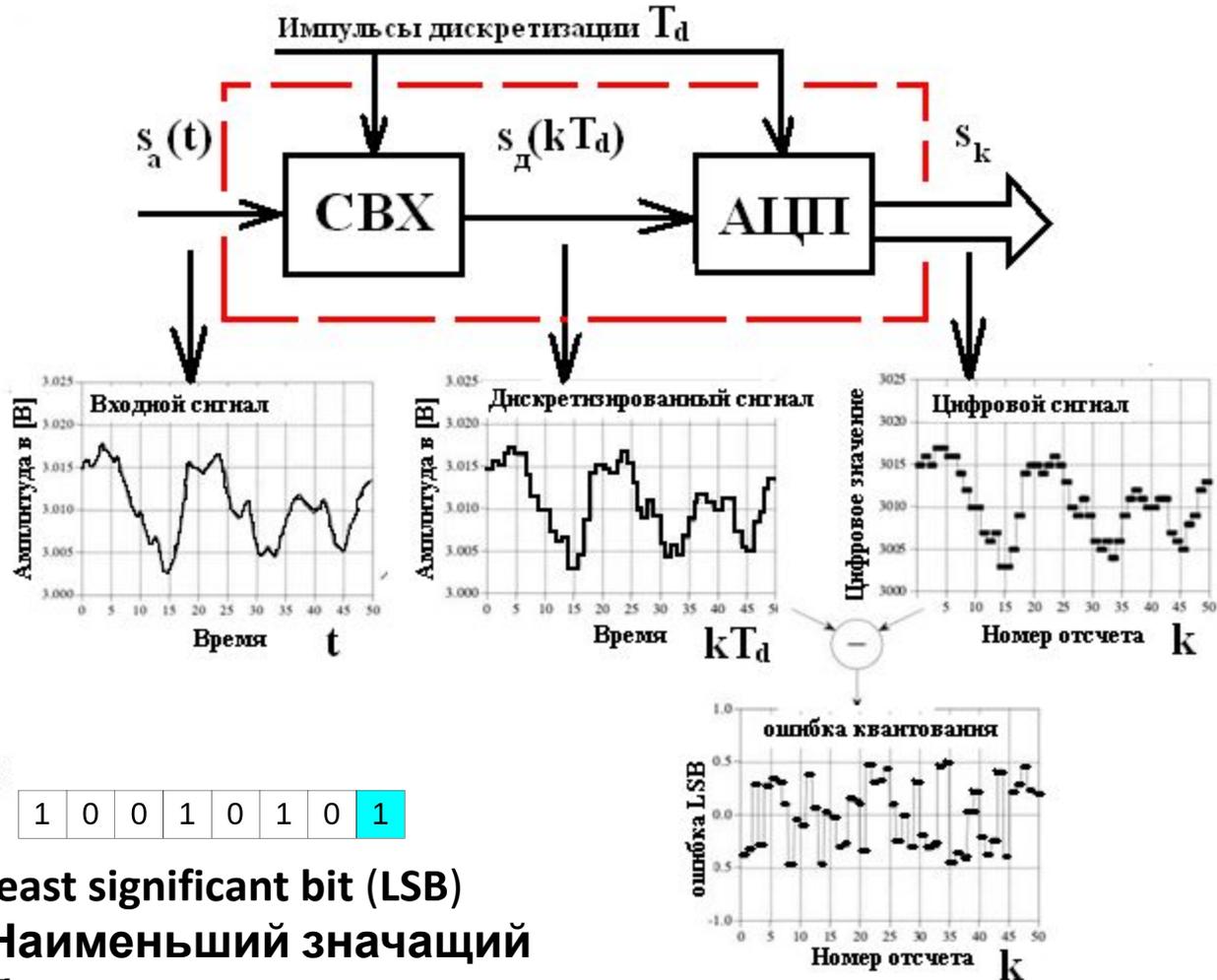
Устройство цифровой обработки сигналов



Этапы цифрового преобразования аналогового сигнала

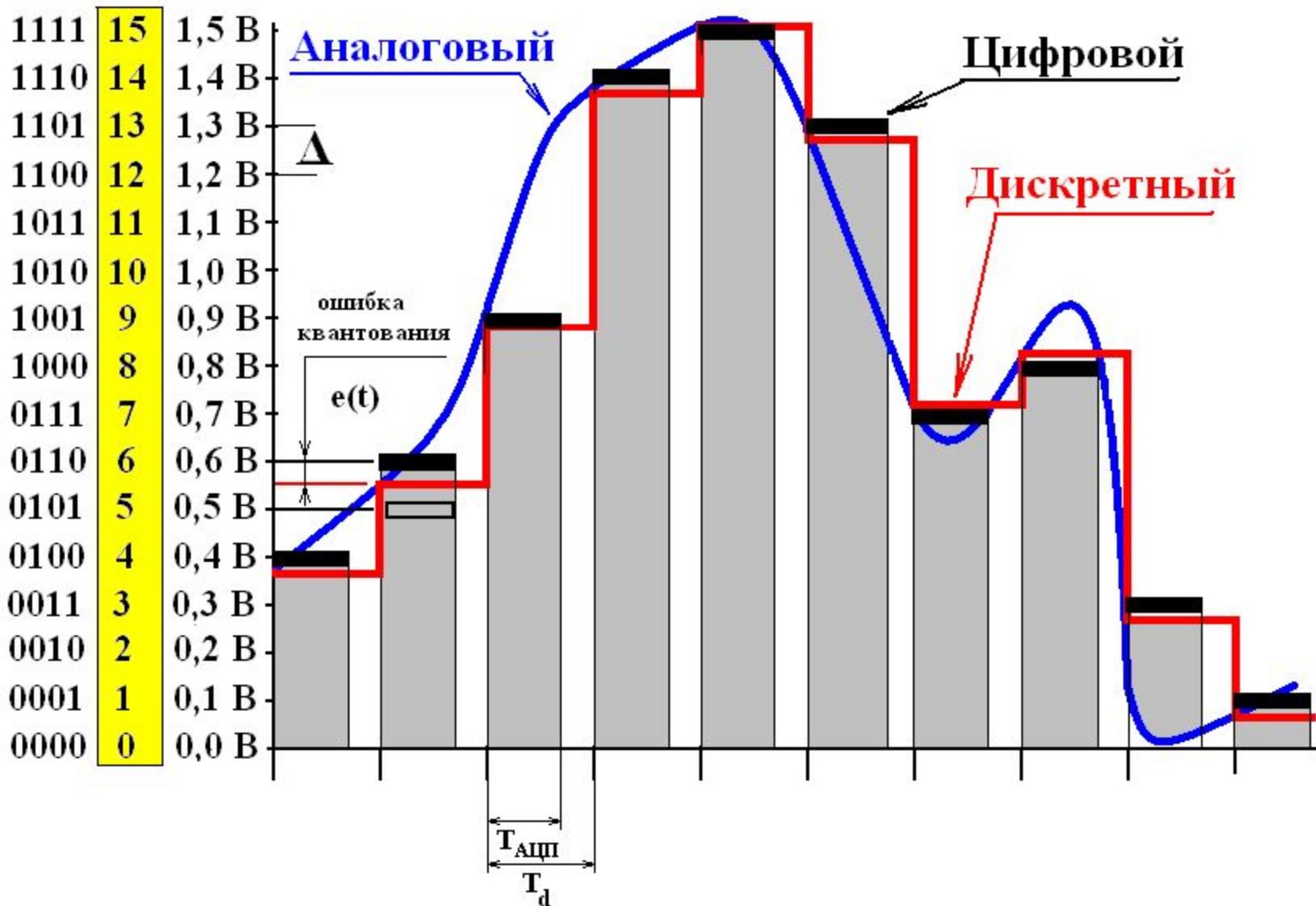


Вопрос №1. Дискретизация аналогового сигнала

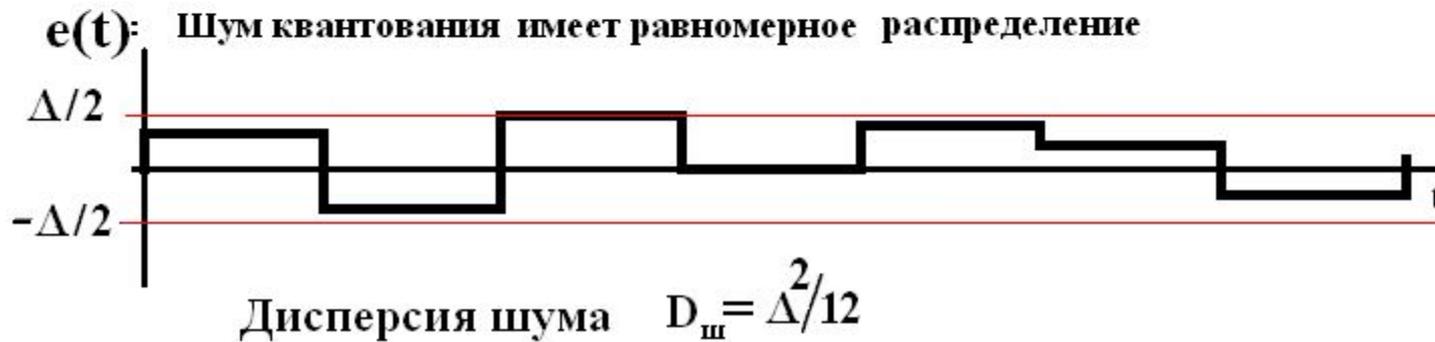
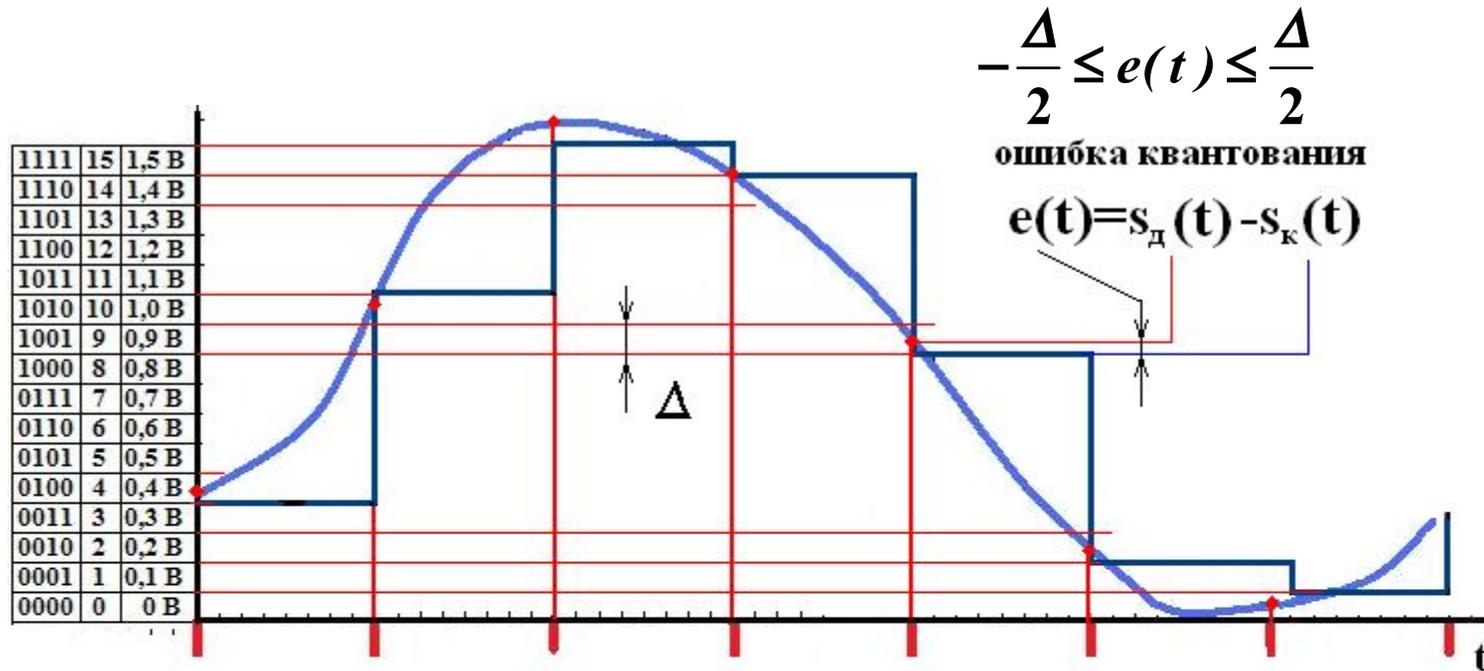


least significant bit (LSB)
 Наименьший значащий бит

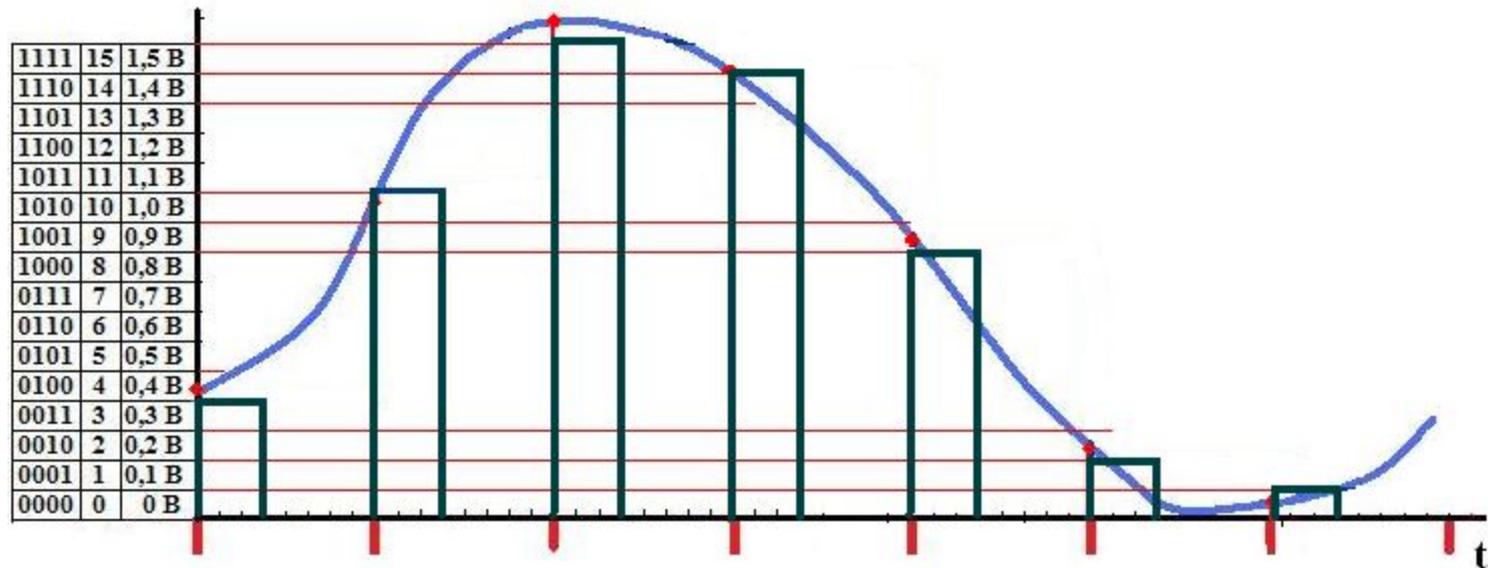
Дискретизация по времени и квантование по уровню.



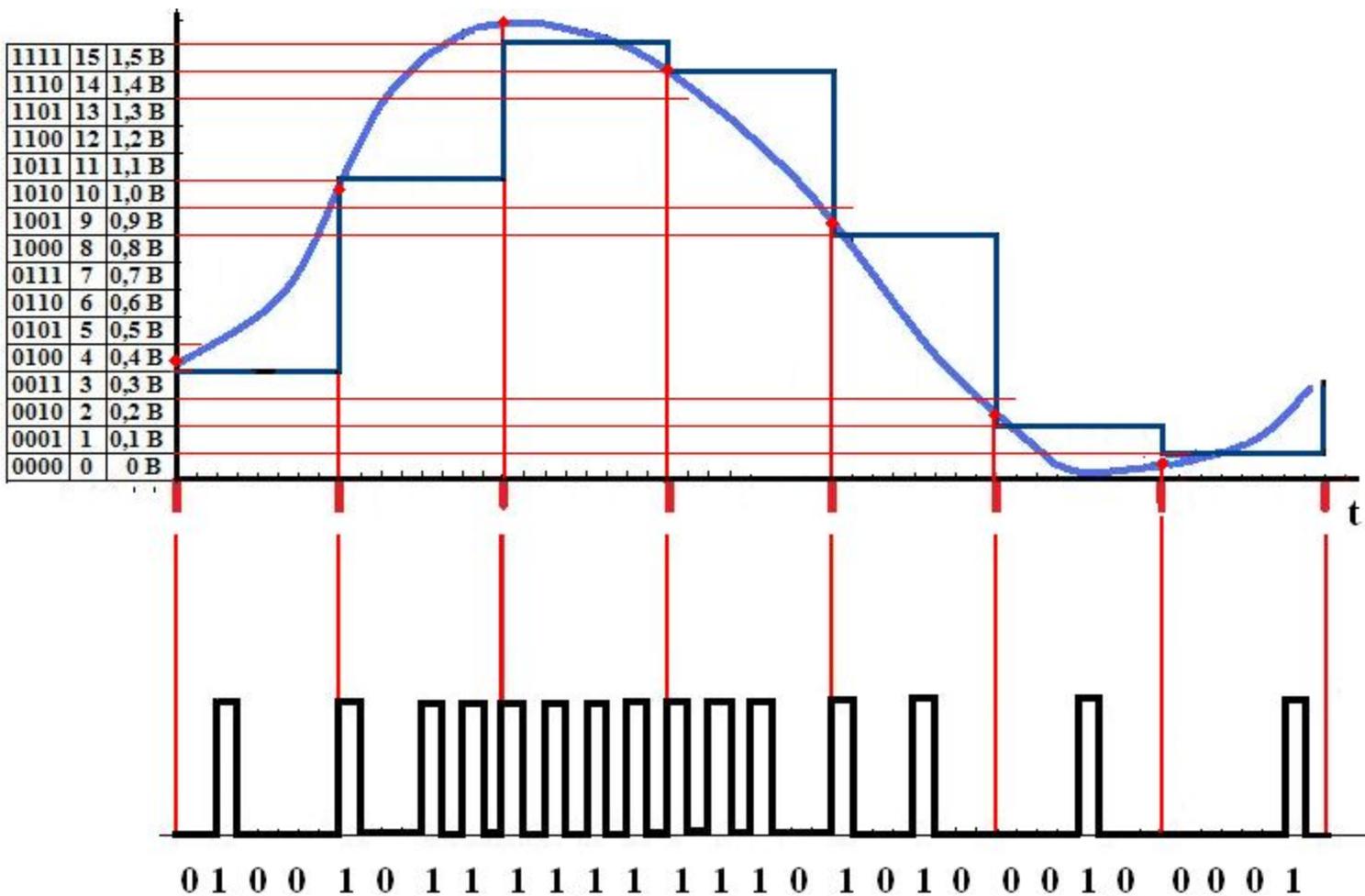
Шум квантования



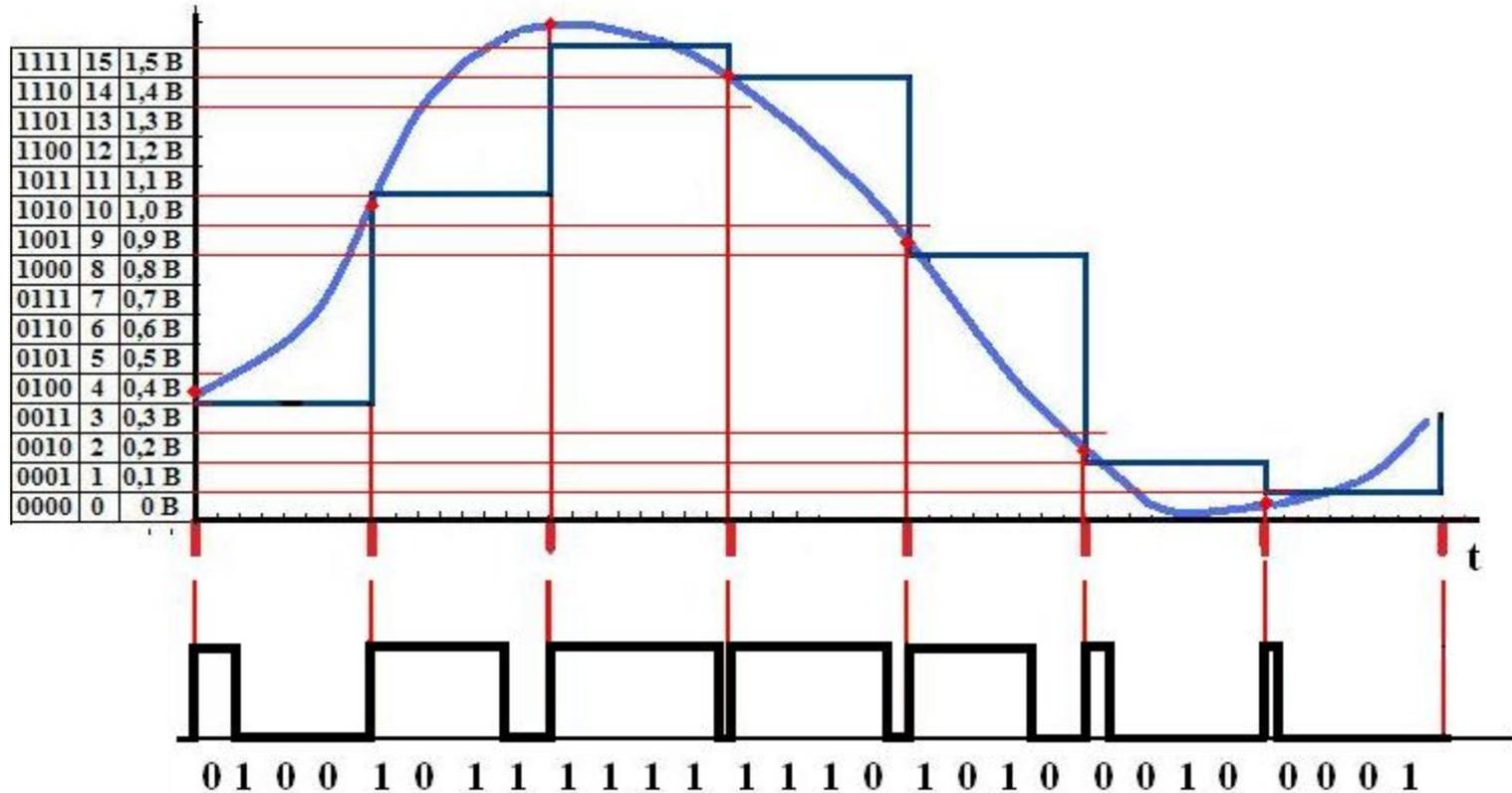
Аналогово-цифровое преобразование и Амплитудно-импульсная модуляция (АИМ)



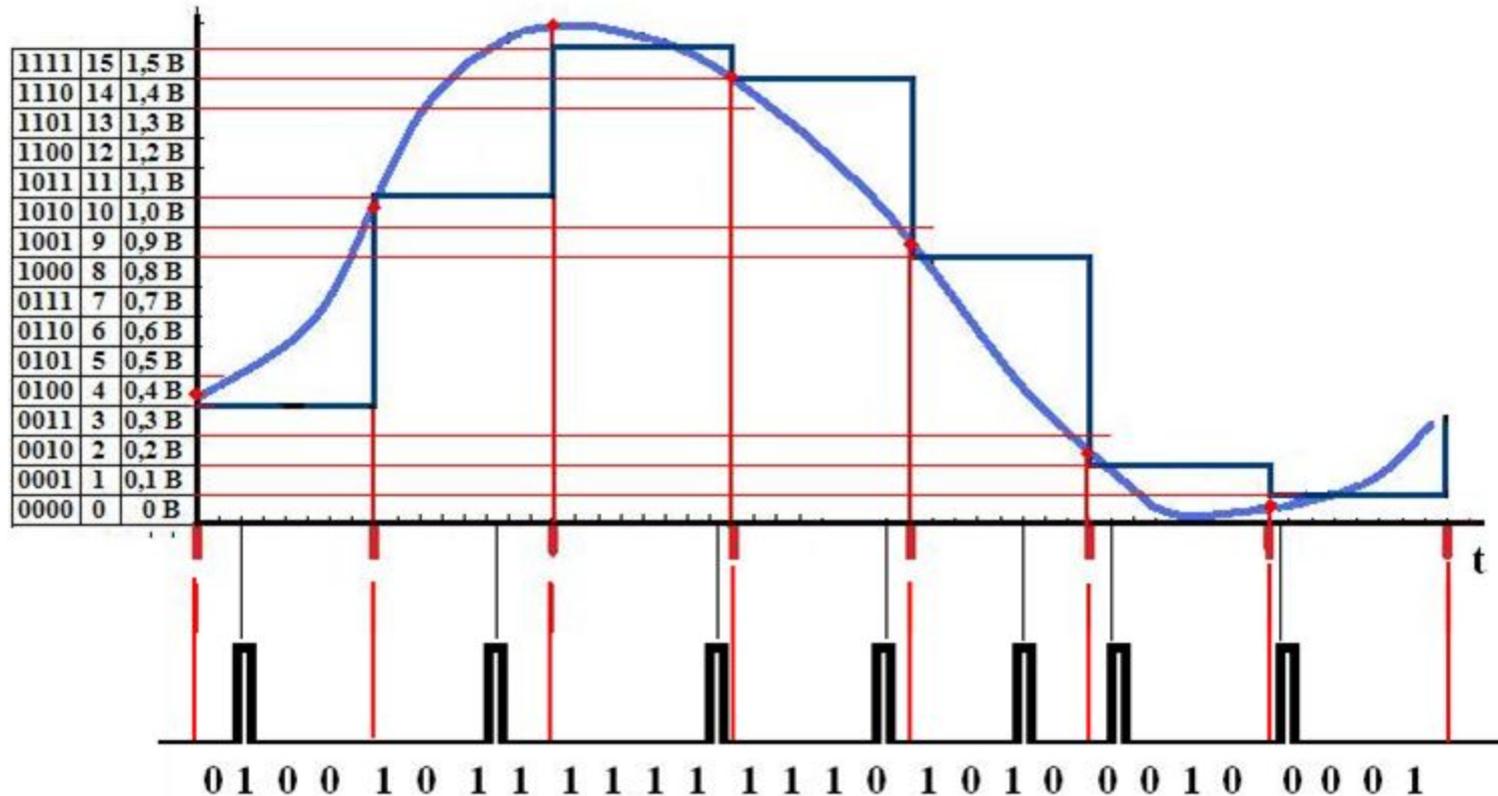
Аналогово-цифровое преобразование и Импульсно-кодовая модуляция (ИКМ)



Аналогово-цифровое преобразование и Широтно-импульсная модуляция (ШИМ)

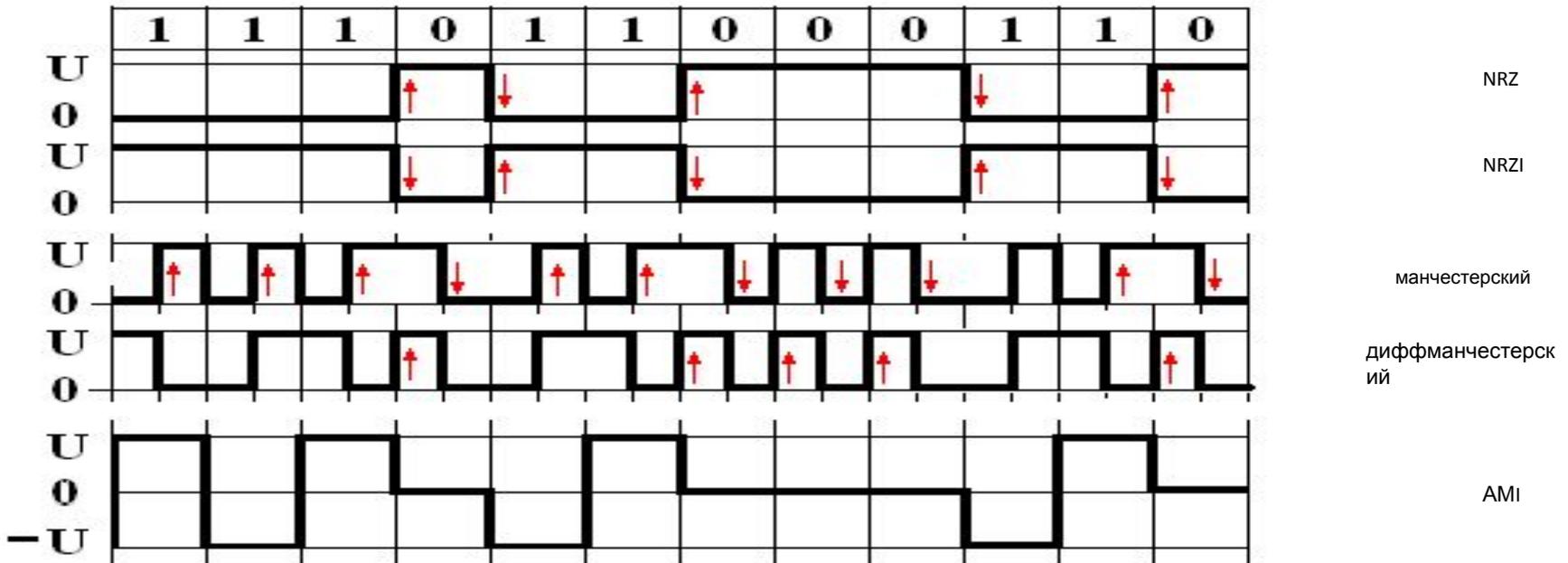


Аналогово-цифровое преобразование и Время-импульсная модуляция (ВИМ)



Методы кодирования цифровых сигналов

Каждый бит кодового слова передается или записывается с помощью дискретных сигналов, например, импульсов.



Методы кодирования цифровых сигналов

Способ представления исходного кода определенными сигналами определяется форматом кода.

Формат БВН (без возвращения к нулю) естественным образом соответствует режиму работы логических схем. Единичный бит передается в пределах такта, уровень не меняется. Положительный перепад означает переход из 0 к 1 в исходном коде, отрицательный — от 1 к 0. Отсутствие перепадов показывает, что значения предыдущего и последующего битов равны. Для декодирования кодов в формате БВН необходимы тактовые импульсы, так как в его спектре не содержится тактовая частота. Соответствующий коду формата БВН сигнал содержит низкочастотные компоненты (при передаче длинных серий нулей или единиц перепады не возникают).

Формат БВН-1 (без возвращения к нулю с перепадом при передаче 1) является разновидностью формата БВН. В отличие от последнего в БВН-1 уровень не передает данные, так как и положительные и отрицательные перепады соответствуют единичным битам. Перепады сигнала формируются при передаче 1. При передаче 0 уровень не меняется. Для декодирования требуются тактовые импульсы.

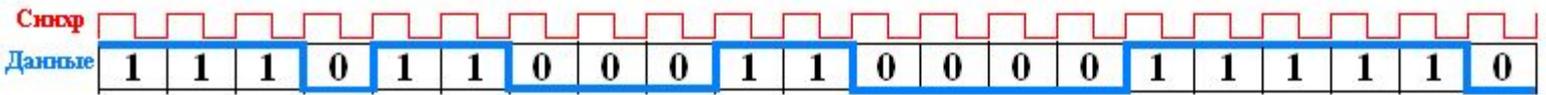
Формат БВН-0 (без возвращения к нулю с перепадом при передаче 0) является дополнительным к БВН-1 (перепады соответствуют нулевым битам исходного кода). В многорожечных системах записи цифровых сигналов вместе с кодом в формате БВН надо записывать тактовые импульсы. Возможным вариантом является запись двух дополнительных сигналов, соответствующих кодам в форматах БВН-1 и БВН-0. В одном из двух сигналов перепады происходят в каждом такте, что позволяет получить импульсы тактовой частоты.

Формат ВН (с возвращением к нулю) требует передачи импульса, занимающего только часть тактового интервала (например, половину), при одиночном бите. При нулевом бите импульс не формируется.

Формат ВН-П (с активной паузой) означает передачу импульса положительной полярности при единичном бите и отрицательной — при нулевом бите. Сигнал этого формата имеет в спектре компоненты тактовой частоты. Он применяется в ряде случаев для передачи данных по линиям связи.

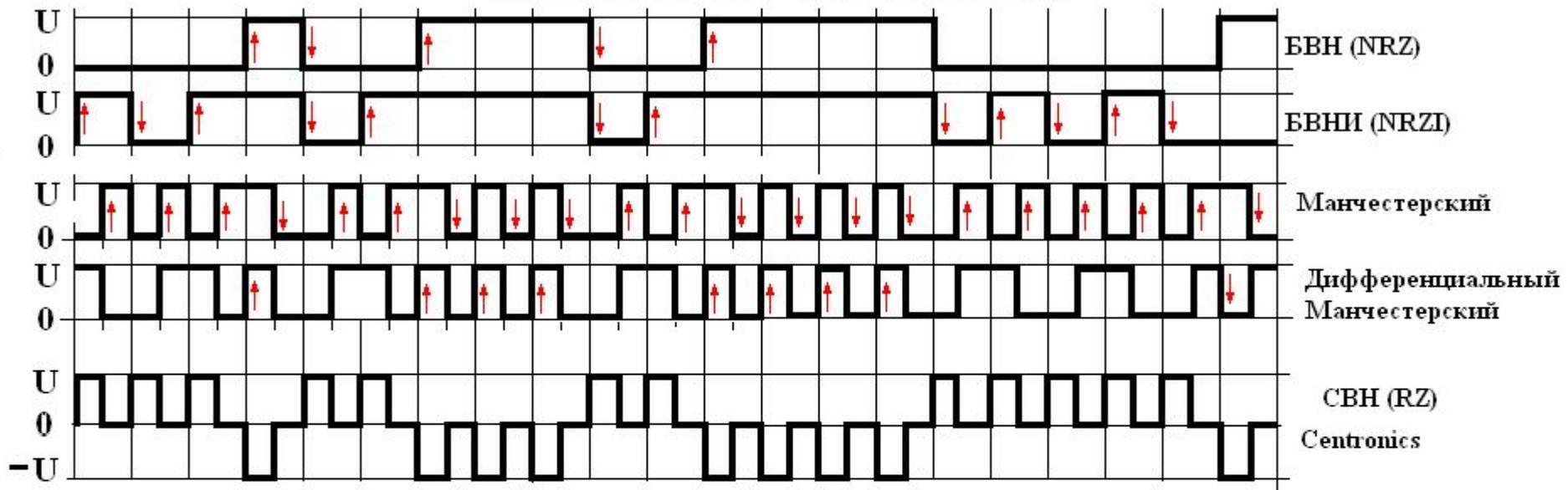
Формат ДФ-0 (двухфазный со скачком фазы при передаче 0) соответствует способу представления, при котором перепады формируются в начале каждого такта. При единичных битах сигнал в этом формате меняется с тактовой частотой, то есть в середине каждого такта происходит перепад уровня. При передаче нулевого бита перепад в середине такта не формируется, то есть имеет место скачок фазы. Код в данном формате обладает возможностью самосинхронизации и не требует передачи тактовых сигналов.

Направление перепада при передаче сигнала единицы не имеет значения. Поэтому изменение полярности кодированного сигнала не влияет на результат декодирования. Он может передаваться по симметричным линиям без постоянной составляющей. Это также упрощает его магнитную запись. Этот формат известен также под названием «Манчестер 1». Он используется в адресно-временном

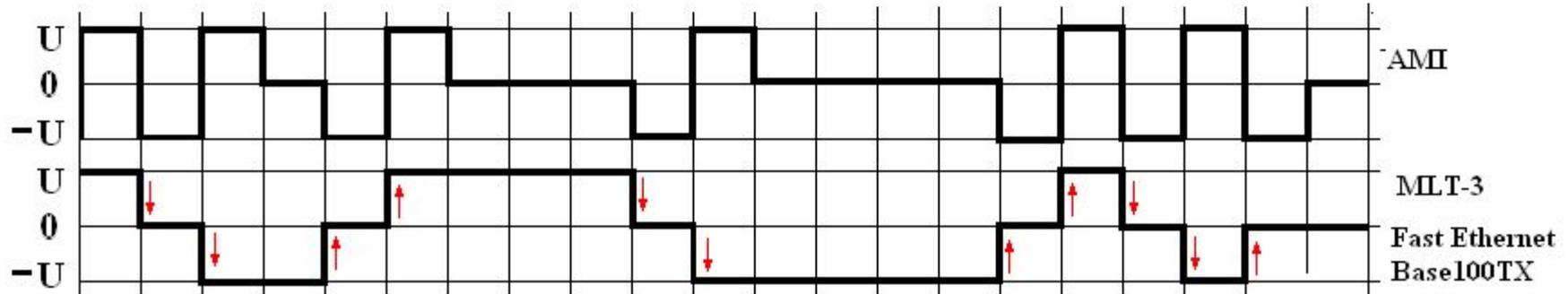


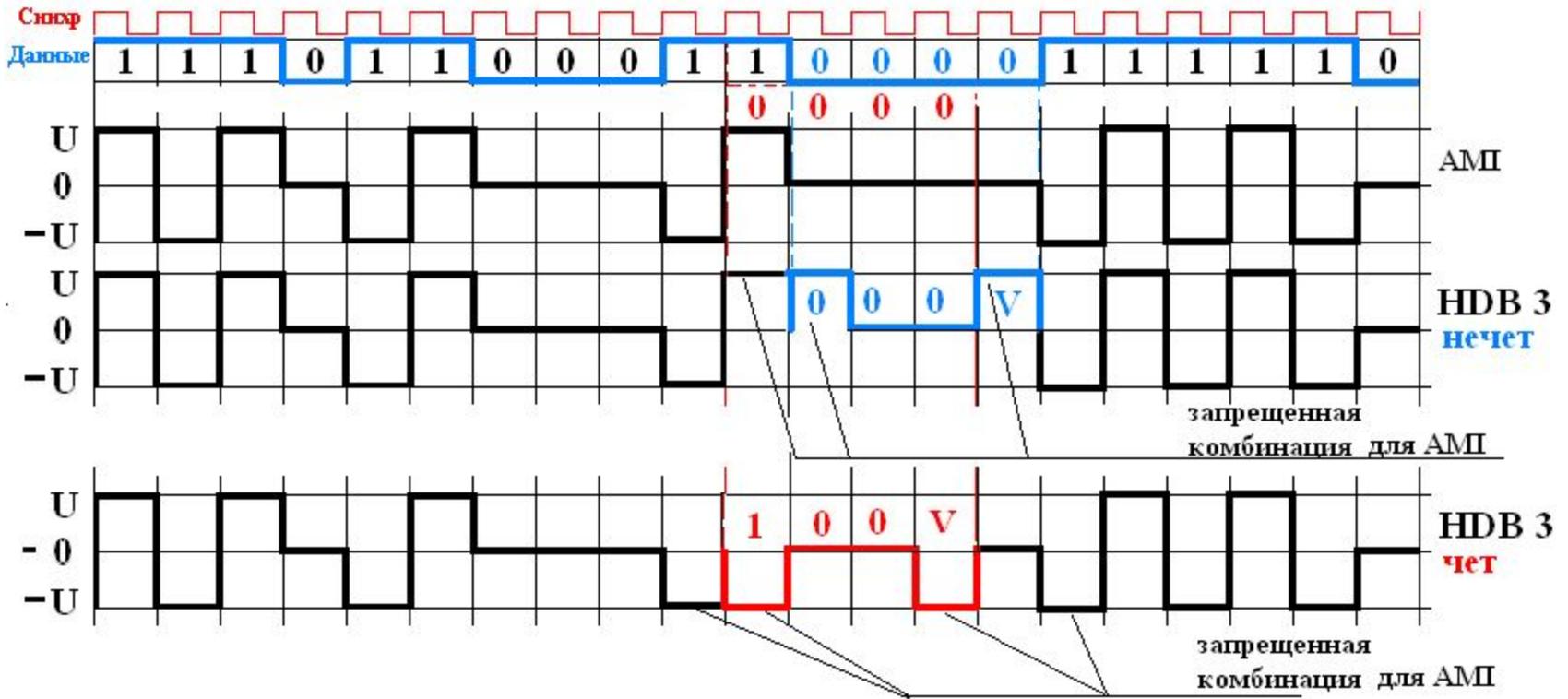
Бинарное кодирование Двух уровневый код

0



Тринарное кодирование Трехуровневый код

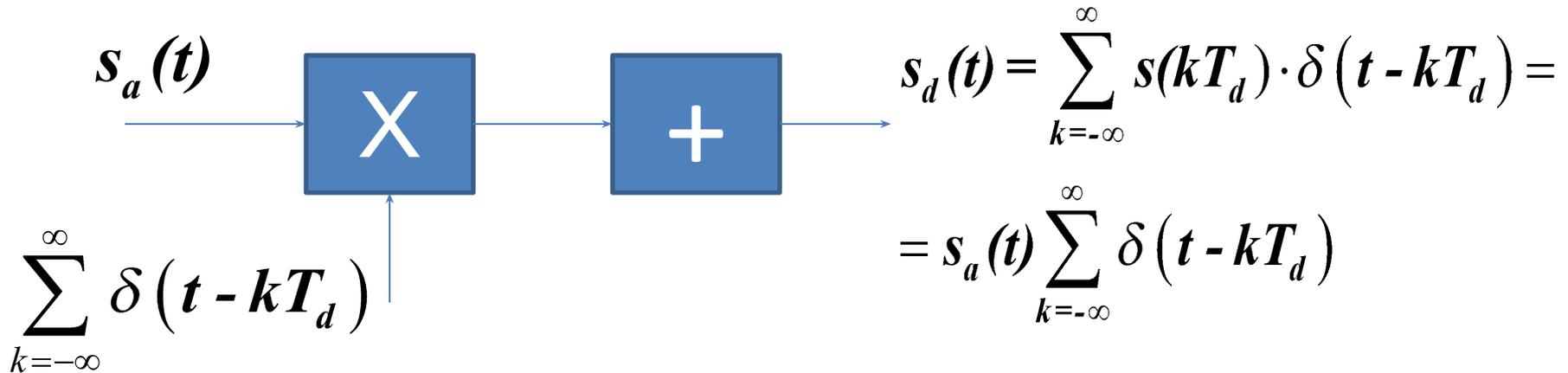




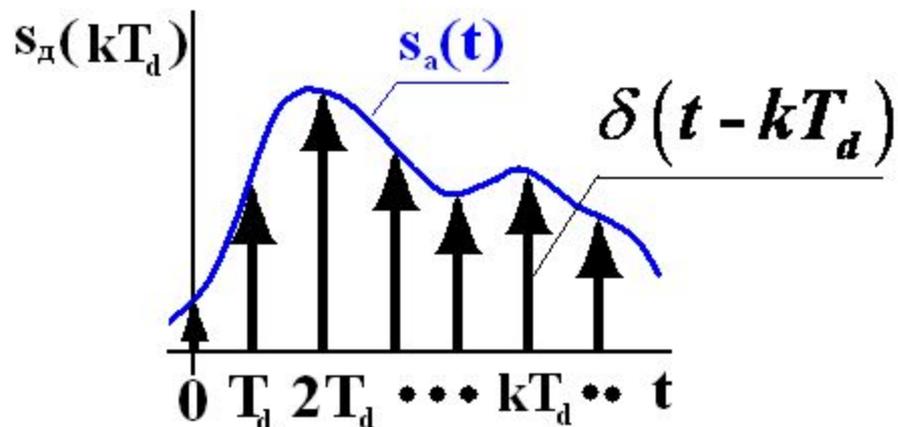
high density bipolar of order 3 (HDB3)

Применяется по рекомендации МКТТ в Европейских сетях передачи данных

Дискретизированный сигнал – последовательность дельта-функций, взвешенных значениями дискретных отсчетов



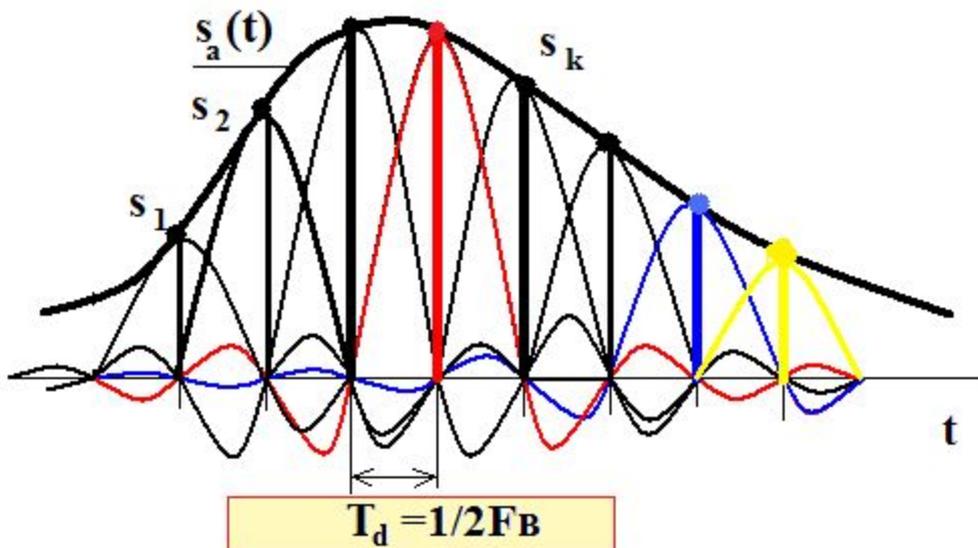
Решетчатая функция отсчетов
- периодический сигнал



Вопрос №2 Теорема Котельникова.

Обобщенный ряд Фурье по системе базисных (ортогональных) функций Котельникова

$$s_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \cdot \frac{\sin(x)}{x} \quad x = \frac{\pi}{T_d} \cdot (t - kT_d) = \pi \cdot F_d \cdot (t - kT_d)$$

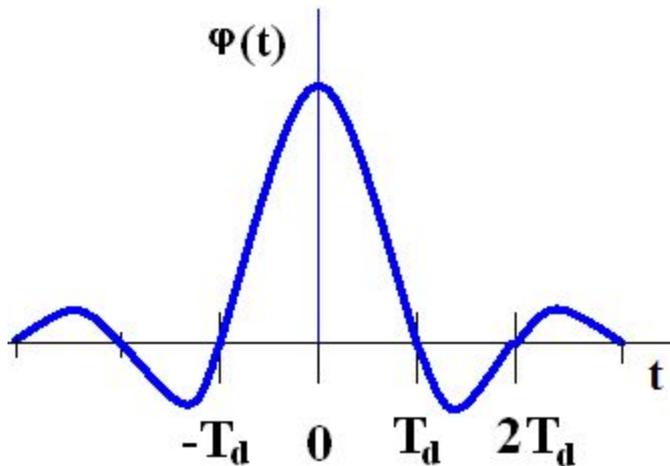


$$T_d \leq \frac{t}{2F_B} = \frac{1}{B}$$

Восстановление аналогового сигнала по дискретным отсчетам.

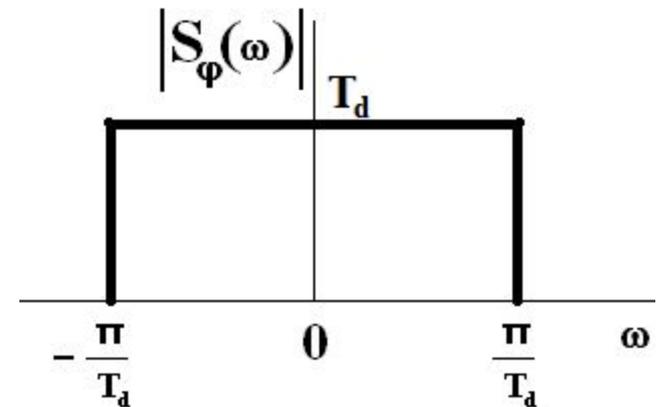
$$s_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k s_k \cdot \frac{\sin(x)}{x} \quad x = \frac{t - kT_d}{T_d} = \frac{t}{T_d} - k$$

Спектральная плотность базисных функций Котельникова.



ППФ

=

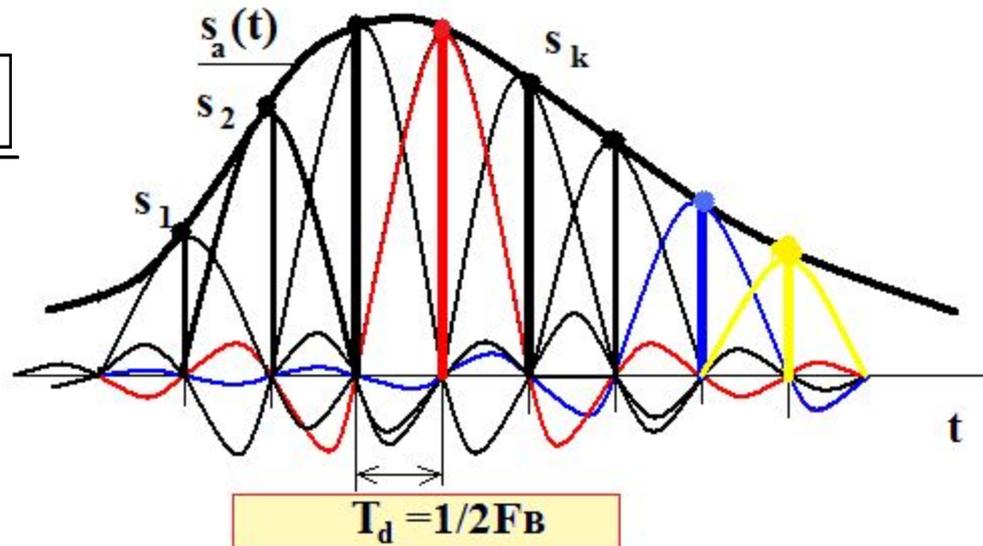


$$S_\varphi(j\omega) = \begin{cases} T_d, & |\omega| \leq \pi / T_d \\ 0, & |\omega| > \pi / T_d \end{cases}$$

Восстановление аналогового сигнала по его дискретным отсчетам

Восстановление аналогового сигнала по его дискретным отсчетам ведется весовым суммированием базисных функций Котельникова имеющих вид $\text{SIN}(x)/x$.

$$s_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \frac{\sin \left[2\pi F_B (t - kT_d) \right]}{2\pi F_B (t - kT_d)}$$



Для получения базисных функций Котельникова необходимо радиотехническое устройство (фильтр), которое в ответ на дискретный отсчет S_k выдает сигнал вида $\text{SIN}(x)/X$.

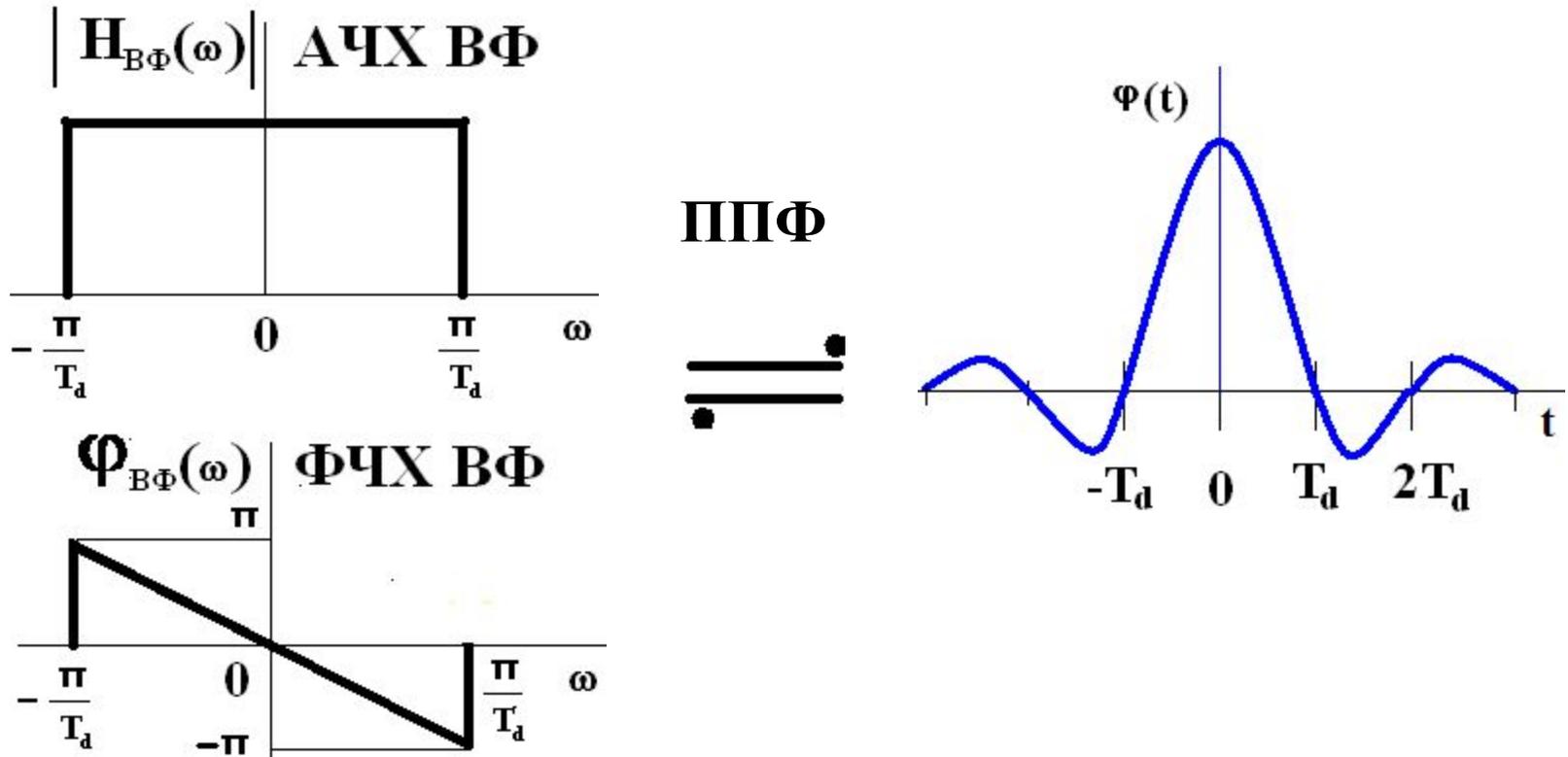
Так как дискретный отсчет является эквивалентом дельта функции, то реакция на него будет являться импульсной характеристикой фильтра.

Следовательно восстанавливающий фильтр должен иметь импульсную характеристику вида $\text{SIN}(x)/x$.

Восстанавливающий фильтр

Импульсная характеристика фильтра связана с его частотной характеристикой преобразованием Фурье.

По свойству дуальности преобразования Фурье, таким устройством должен быть низкочастотный фильтр с идеальной (прямоугольной) АЧХ и линейной ФЧХ, частота среза которого равна половине частоты дискретизации аналогового сигнала



Спектр дискретизированного сигнала

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_d)$$

Решетчатая функция отсчетов - периодический сигнал, который можно разложить в ряд Фурье с коэффициентами:

$$C_n = \frac{1}{T_d} \int_{-T_d/2}^{T_d/2} y(t) e^{-j\omega_n t} dt = \frac{1}{T_d} \int_{-T_d/2}^{T_d/2} \delta(t - kT_d) e^{-j\omega_n t} dt = \frac{1}{T_d}$$

Ряд Фурье для решетчатой функции отсчетов:

$$y(t) = \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_n t} \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T_d} n = 2\pi F_d \cdot n$$

Новая модель дискретизированного сигнала

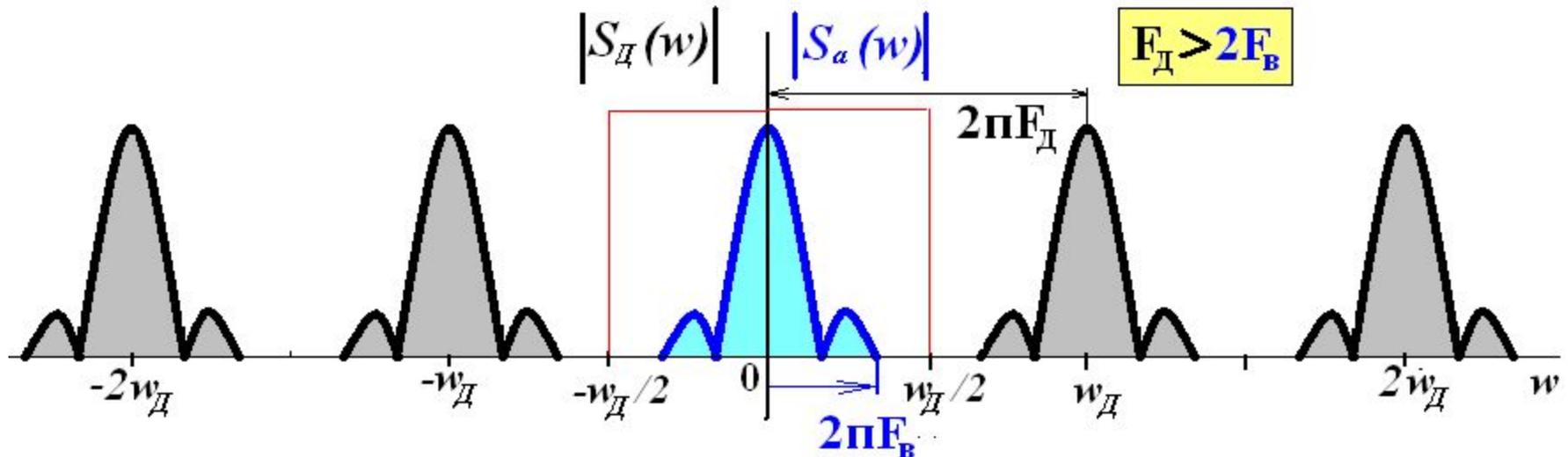
$$s_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT_d) \cdot \delta(t - kT_d) = s_d(t) = \frac{1}{T_d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_a(t) \cdot e^{j\omega_n t}$$

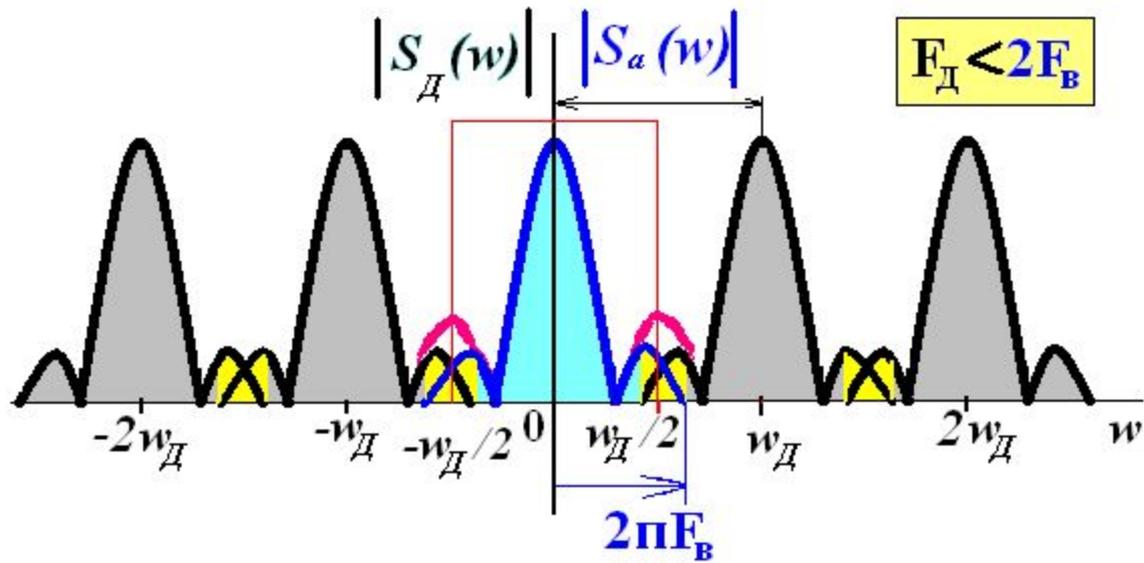
Спектр дискретизированного сигнала

Преобразование Фурье для дискретизированного сигнала

$$\begin{aligned} S_{\ddot{A}}(\omega) &= \frac{1}{T_d} \int_{-T_d/2}^{T_d/2} s_{\ddot{A}}(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T_d} \int_{-T_d/2}^{T_d/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_a(t) \cdot e^{j\omega_n t} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-T_d/2}^{T_d/2} s_a(t) \cdot e^{-j(\omega - \omega_n)t} dt = \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_a\left(\omega - \frac{2\pi}{T_d} n\right) \end{aligned}$$

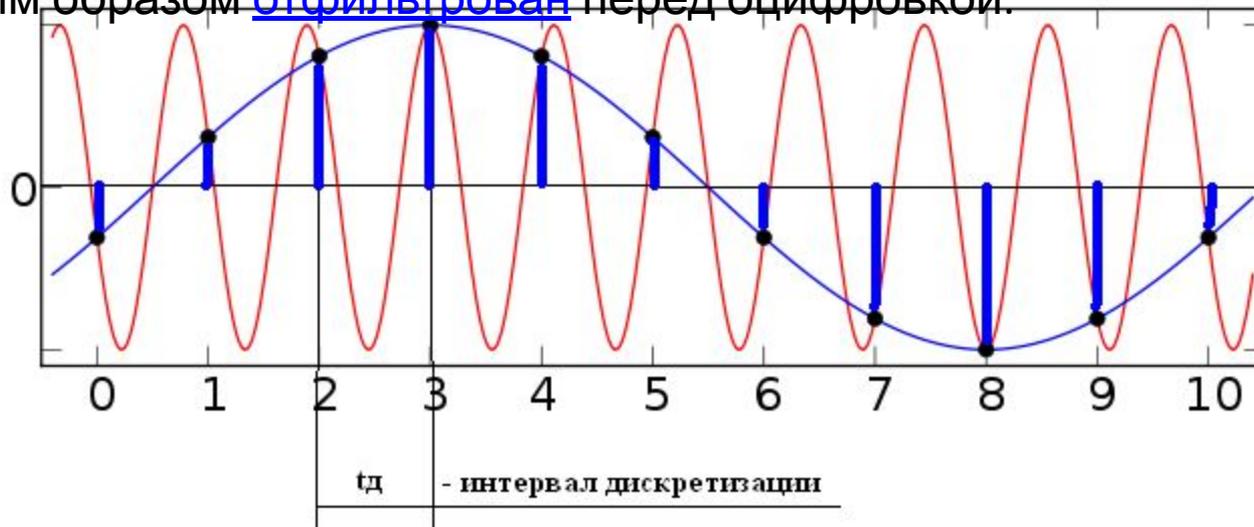
Спектр дискретизированного сигнала при правильном выборе интервала дискретизации





Элайзинг

Элайзинг(алиасинг)— одна из главных проблем при [аналого-цифровом преобразовании видео](#)- и [аудиосигналов](#). Неправильная дискретизация аналогового сигнала приводит к тому, что [высокочастотные](#) его составляющие накладываются на низкочастотные, в результате чего [восстановление сигнала](#) во времени приводит к его искажениям. Для предотвращения этого эффекта [частота дискретизации](#) должна быть достаточно высокой и сигнал должен быть надлежащим образом [отфильтрован](#) перед оцифровкой.



Аналоговый
сигнал

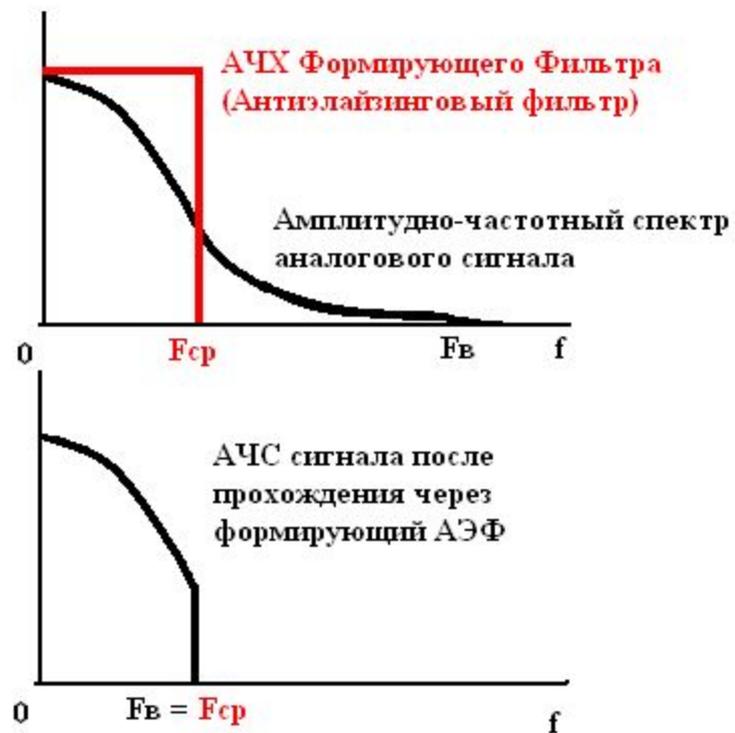
Антиэлайзингов
ый
фильтр

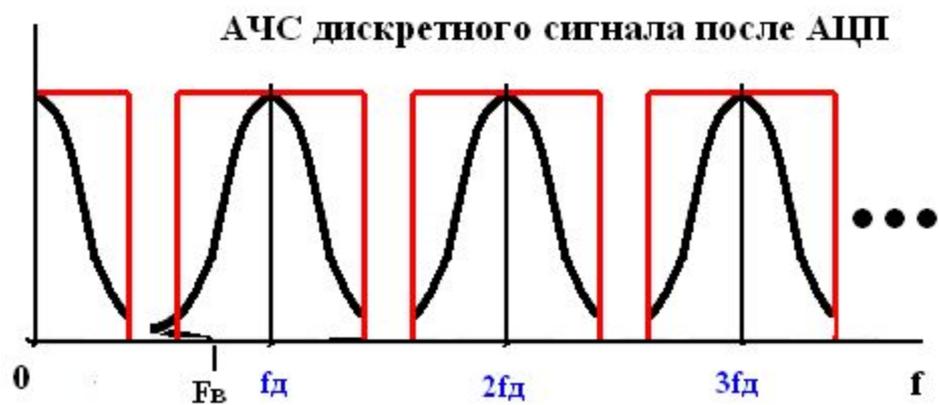
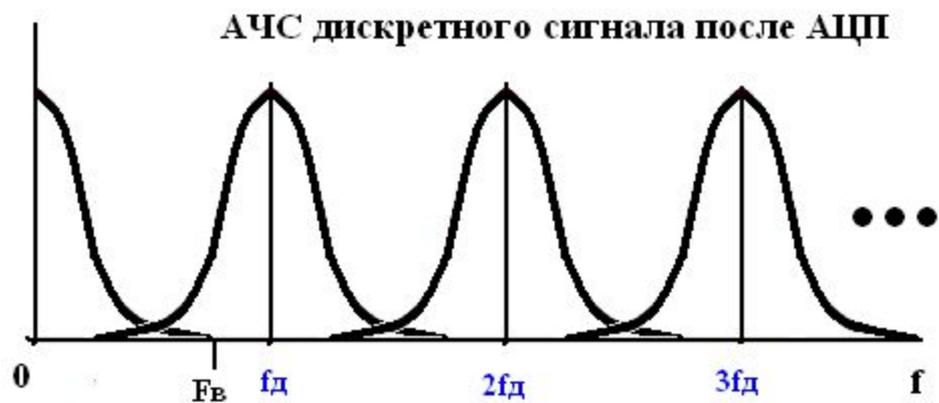
АЦП

Цифровой
сигнал

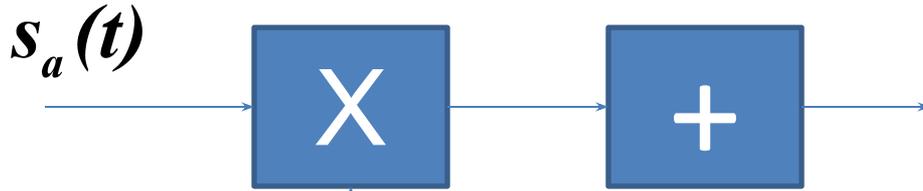
Импульсы
дискретизации

Назначение формирующего АЭФ



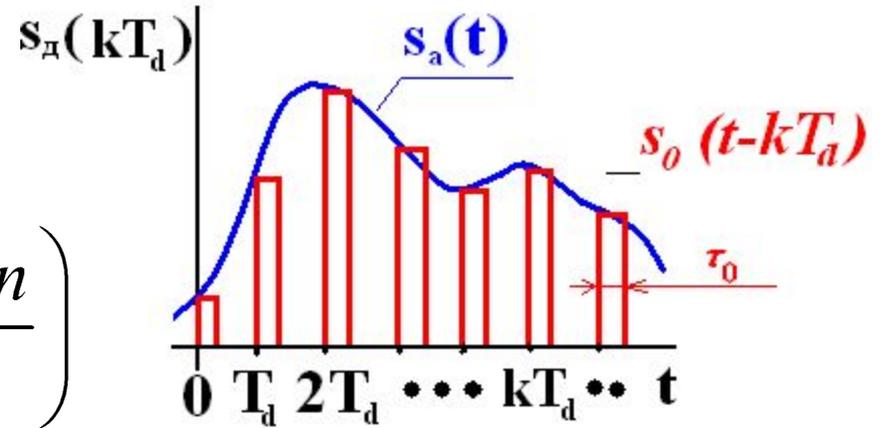


Спектр дискретизированного сигнала при произвольной форме дискретизирующих импульсов



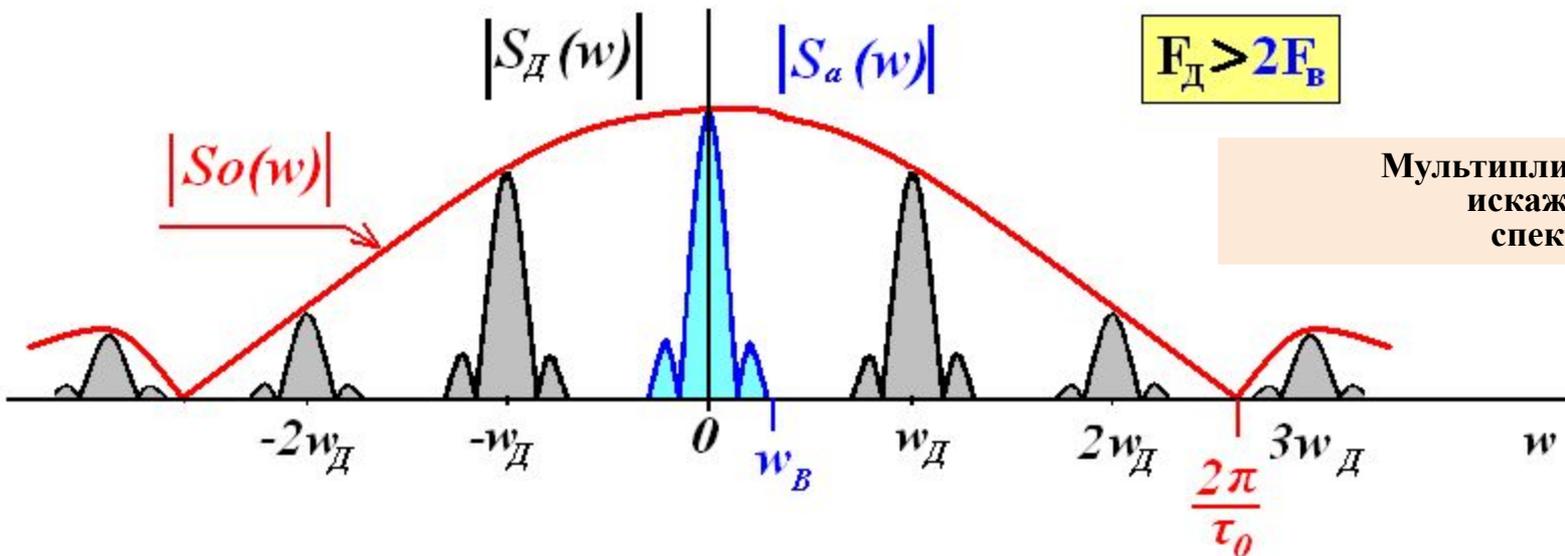
$$s_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_a(t - kT_d) \cdot s_0(t - kT_d)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} s_0(t - kT_d)$$



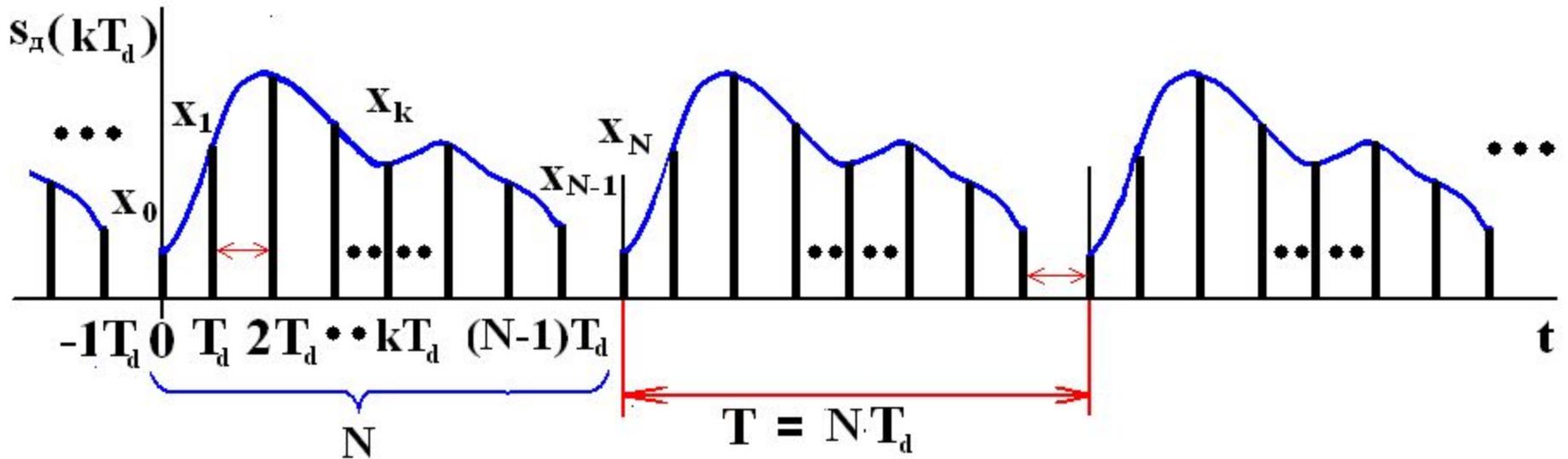
$$S_d(\omega) = \frac{S_0(\omega)}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_a\left(\omega - \frac{2\pi n}{T_d}\right)$$

$$F_D > 2F_B$$



Мультипликативные искажения спектра

Вопрос №3 Дискретное преобразование Фурье



$$x_k = x_{k+N}$$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta(t - kT_d)$$

1. Сигнал $s(t)$ периодический с периодом $T=NT_d$.

Значит расстояние по частоте между соседними гармониками $2\pi/T=2\pi/NT_d$

2. Сигнал $s(t)$ дискретный,

следовательно его спектр периодический с периодом $2\pi/T_d$.

3. Один период спектра дискретного сигнала содержит

$$2\pi/T_d : 2\pi/NT_d = N \quad \text{гармоник}$$

Вывод формулы для спектра периодического дискретного сигнала (ДПФ)

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{NT_d} \int_0^{NT_d} s(t) e^{-j\omega_n t} dt = \frac{1}{NT_d} \int_0^{NT_d} \left[\sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot \delta(t - kT_d) \right] \cdot e^{-j\omega_n t} dt = \\ &= \frac{1}{NT_d} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \int_0^{NT_d} \delta(t - kT_d) e^{-j\omega_n t} dt = \frac{1}{NT_d} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\omega_n kT_d} = \frac{1}{NT_d} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \end{aligned}$$

Это линейная комбинация из отсчетов сигнала.

Реальный масштаб по частоте определяется величиной $1/T_D$

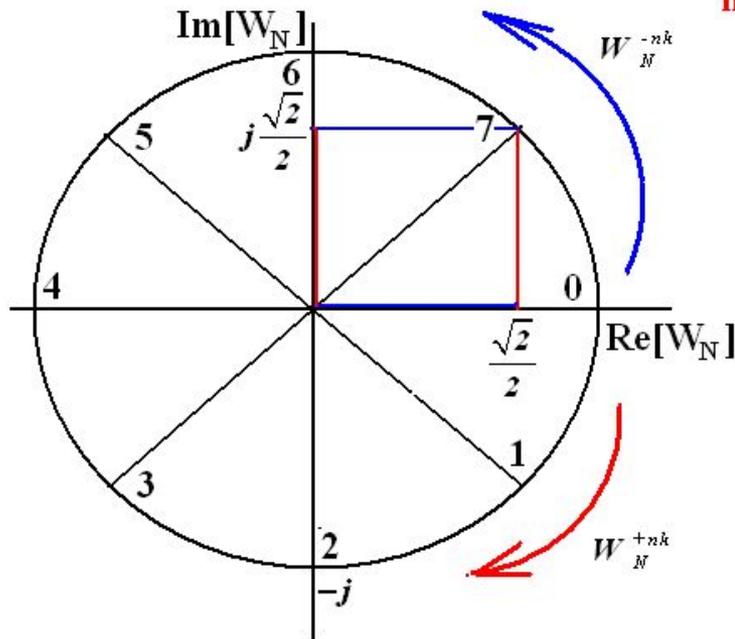
Если сигнал – дискретная числовая последовательность, то оперируют номерами отсчетов k по времени и n – по частоте.

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot W_N^{n \cdot k} \qquad x_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} X_n \cdot W_N^{-n \cdot k}$$

$$W_N^{n \cdot k} = e^{-j\frac{2\pi}{N}n \cdot k} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}n \cdot k\right) - j \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N}n \cdot k\right)$$

Поворачивающие множители и их свойства

$$W_N^{n \cdot k} = e^{-\frac{j 2\pi}{N} n \cdot k} = \cos\left(\frac{2\pi}{N} n \cdot k\right) - j \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} n \cdot k\right)$$



$$W_N^{n \cdot k} = W_N^{(n-m+m) \cdot k} = W_N^{(n-m) \cdot k} \cdot W_N^{m \cdot k}$$

- n · k**
- 0 $W_8^0 = e^{-\frac{j 2 \cdot \pi}{8} \cdot 0} = \cos\left(\frac{2\pi}{8} \cdot 0\right) - j \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{8} \cdot 0\right) = 1 - j \cdot 0 = 1$
 - 1 $W_8^1 = e^{-\frac{j 2 \cdot \pi}{8} \cdot 1} = \cos\left(\frac{2\pi}{8} \cdot 1\right) - j \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{8} \cdot 1\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707 - j0.707$
 - 2 $W_8^2 = e^{-\frac{j 2 \cdot \pi}{8} \cdot 2} = \cos\left(\frac{2\pi}{8} \cdot 2\right) - j \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{8} \cdot 2\right) = 0 - j \cdot 1 = -j$
 - 3 $W_8^3 = e^{-\frac{j 2 \cdot \pi}{8} \cdot 3} = \cos\left(\frac{2\pi}{8} \cdot 3\right) - j \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{8} \cdot 3\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -0.707 - j \cdot 0.707$
 - 4 $W_8^4 = e^{-\frac{j 2 \cdot \pi}{8} \cdot 4} = \cos\left(\frac{2\pi}{8} \cdot 4\right) - j \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{8} \cdot 4\right) = -1 - j \cdot 0 = -1$
 - 5 $W_8^5 = e^{-\frac{j 2 \cdot \pi}{8} \cdot 5} = \cos\left(\frac{2\pi}{8} \cdot 5\right) - j \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{8} \cdot 5\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -0.707 + j0.707$
 - 6 $W_8^6 = e^{-\frac{j 2 \cdot \pi}{8} \cdot 6} = \cos\left(\frac{2\pi}{8} \cdot 6\right) - j \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{8} \cdot 6\right) = 0 + j \cdot 1 = j$
 - 7 $W_8^7 = e^{-\frac{j 2 \cdot \pi}{8} \cdot 7} = \cos\left(\frac{2\pi}{8} \cdot 7\right) - j \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{8} \cdot 7\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707 + j0.707$

Свойства ДПФ

Линейность $x1_k \Leftrightarrow X1_n \quad x2_k \Leftrightarrow X2_n \quad [a \cdot x1_k + b \cdot x2_k] = y_k \Leftrightarrow Y_n = a \cdot X1_n + b \cdot X2_n$

Задержка

$$y_k = x_{k-1} \Leftrightarrow Y_n = X_n e^{-j \frac{2\pi}{N} n}$$

Симметрия для вещественного

$$X_{N-n} = X_{-n} = X_n^*$$

Постоянная составляющая спектра дискретного вещественного сигнала при $n=0$

$$X_0 = \sum_{k=0}^{N-1} x_k$$

Значение спектральной компоненты с номером $N/2$ при четном N

$$X_{N/2} = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k x_k$$

ДПФ произведения двух последовательностей

$$[x1_k \times x2_k] = y_k \Leftrightarrow Y_n = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X1_i X2_{n-i}^* \right]$$

$$X2_i = X2_{i \pm N}$$

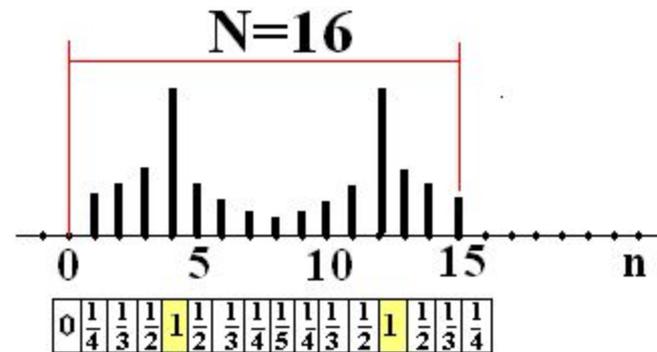
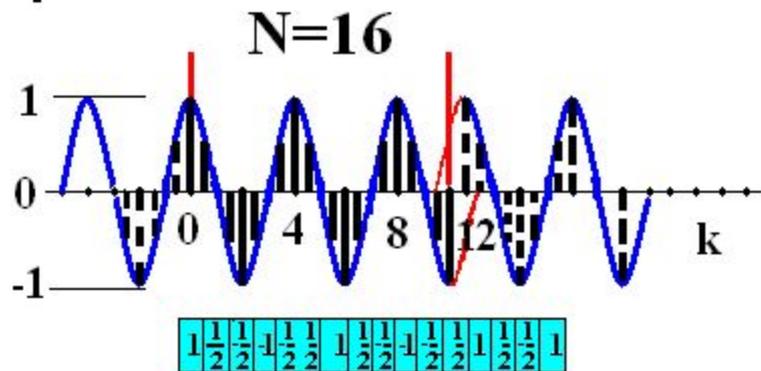
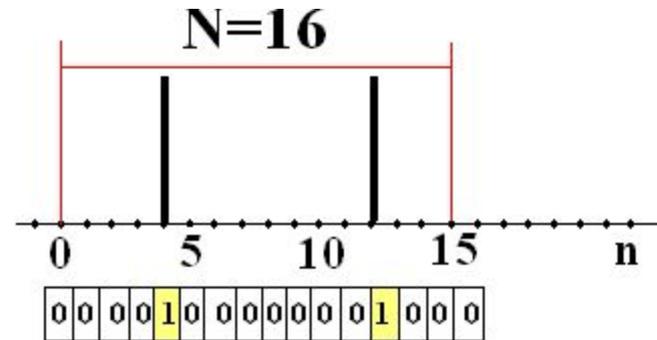
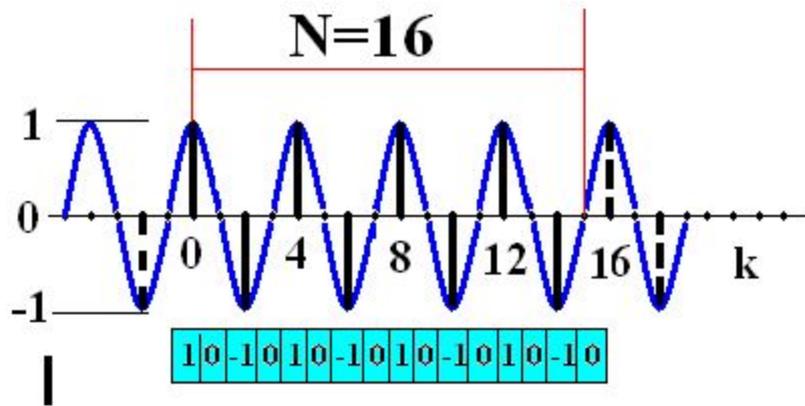
Формула Рэля для дискретного сигнала

$$[x_k \times x_k^*] = y_k \Leftrightarrow Y_0 = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X_i X_i^* \right]$$

Равенство Парсеваля для вещественного дискретного сигнала

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_k^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |X_i|^2$$

Примеры ДПФ



Если отношение $N\omega T_d/2\pi$ не целое число в спектре дискретной гармонике присутствуют дополнительные составляющие

Восстановление непрерывного сигнала с помощью ДПФ

Заменив номер дискретного k отсчета на непрерывное нормированное время t/T_d получим

$$x(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X_n e^{-j \frac{2\pi}{NT_d} nt} \quad N = 2p \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

$$x(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} X_n e^{-j \frac{2\pi}{NT_d} nt} \quad N = 2p + 1$$

Аналоговый сигнал, подвергнутый дискретизации с интервалом T_d и имеющий верхнюю граничную частоту $F_B = \pi/T_d$

Число математических операций, необходимых для расчета N - точечного ДПФ

Число умножений комплексных чисел $N^2 \implies (4N)^2 = 16N^2$ умножений вещественных чисел $(a+jb)(c+jd) = ac - bd + jbc + jad$

Число сложений комплексных чисел $N(N-1) \implies (2N)(2N-1) = 4N^2 - 2N$ $(a+jb) + (c+jd) = a+c + j(b+d)$

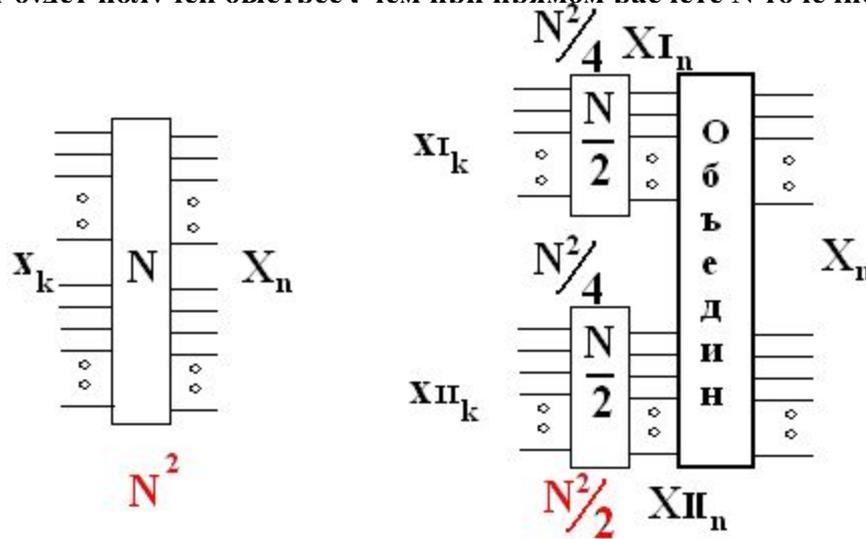
При $N=1024$ надо выполнить приблизительно $2N^2 = 1000000$ операций комплексного умножения+сложения с числами, имеющими например 16 разрядов. На это потребуется не менее 100 000 000 машинных тактов. Это очень долго.

Быстрое преобразование Фурье (БПФ).

Основная идея ускорения вычислений ДПФ.

Если исходную последовательность отсчетов разбить на две меньшей длины (например на две длиной $N/2$), то сделав два $N/2$ точечных ДПФ, выполним $2(N/2)^2 = N^2/2$ операций комплексного умножения.

Если теперь объединить результаты двух $N/2$ точечных ДПФ в одно N точечное и сэкономить хотя бы одну операцию умножения, то результат будет получен быстрее, чем при прямом расчете N точечного ДПФ.



Алгоритмы БПФ по основанию 2.

1. Алгоритмы БПФ с прореживанием по времени.

Математическое обоснование алгоритма при разбиении отсчетов на четные и нечетные:

$$X_n = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} \cdot W_N^{2m \cdot n} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} \cdot W_N^{(2m+1) \cdot n} = \sum_{m=0}^{N/2-1} y_m \cdot W_N^{2m \cdot n} + \sum_{m=0}^{N/2-1} z_m \cdot W_N^{(2m+1) \cdot n}$$

$$W_N^{2m \cdot n} = e^{-j \frac{2\pi}{N} 2m \cdot n} = e^{-j \frac{2\pi}{N/2} m \cdot n} = W_{N/2}^{m \cdot n}$$

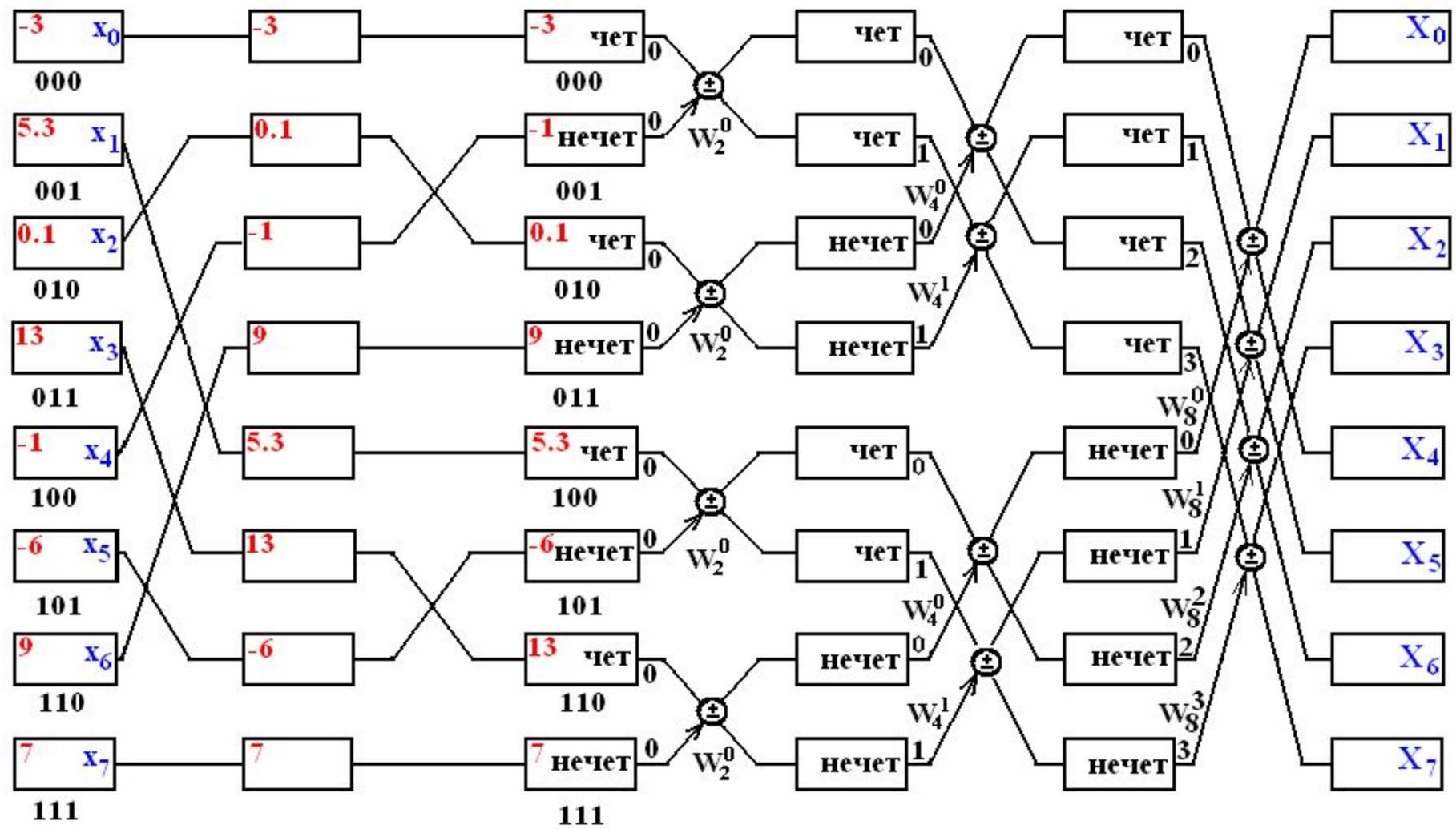
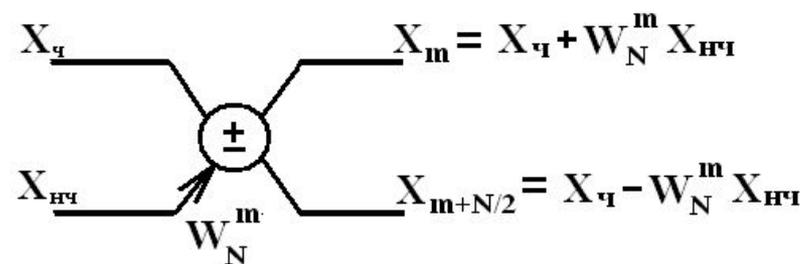
$$W_N^{(2m+1)n} = e^{-j \frac{2\pi}{N} 2m \cdot n} e^{-j \frac{2\pi}{N} n} = e^{-j \frac{2\pi}{N/2} m \cdot n} = W_{N/2}^{m \cdot n} \cdot W_N^n$$

$$X_n = \sum_{m=0}^{N/2-1} y_m \cdot W_{N/2}^{m \cdot n} + W_N^n \cdot \sum_{m=0}^{N/2-1} z_m \cdot W_{N/2}^{m \cdot n} = Y_n + W_N^n \cdot Z_n \quad 0 \leq n < N/2$$

$$Y_{n+N/2} = Y_n \quad Z_{n+N/2} = Z_n$$

$$X_n = \sum_{m=N/2}^{N-1} y_m \cdot W_{N/2}^{m \cdot n} + W_N^n \cdot \sum_{m=N/2}^{N-1} z_m \cdot W_{N/2}^{m \cdot n} = Y_{n-N/2} + W_N^{n-N/2} \cdot Z_{n-N/2} \quad N/2 \leq n < N$$

Базовая операция «бабочка» алгоритма БПФ с прореживанием по времени.



2. Алгоритмы БПФ с прореживанием по частоте.

