Презентація з математики на тему:

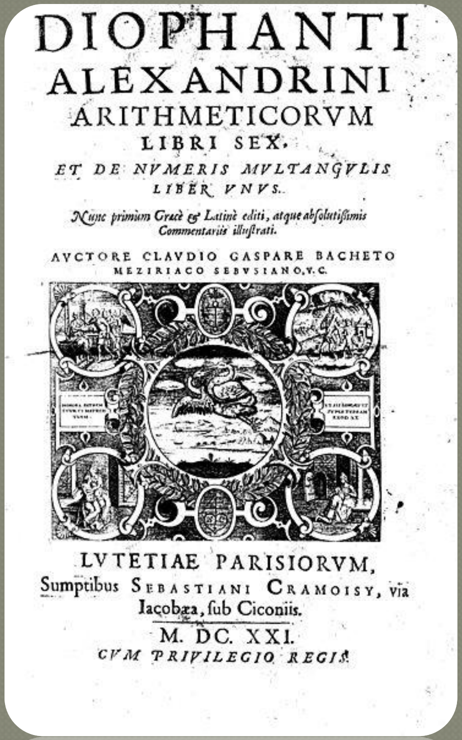
Діофантові рівняння

Виконавець:
Учень групи 10-1
Фінансово-економічного ліцею
М.Дніпропетровська
Іванов Данила

Мета роботи:

$$ax + by = c$$

Поглибити знання про методи розв’язування діофантових рівнянь


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis
Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via
Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Перший розділ: історичний екскурс

Надгробок Діофанта:

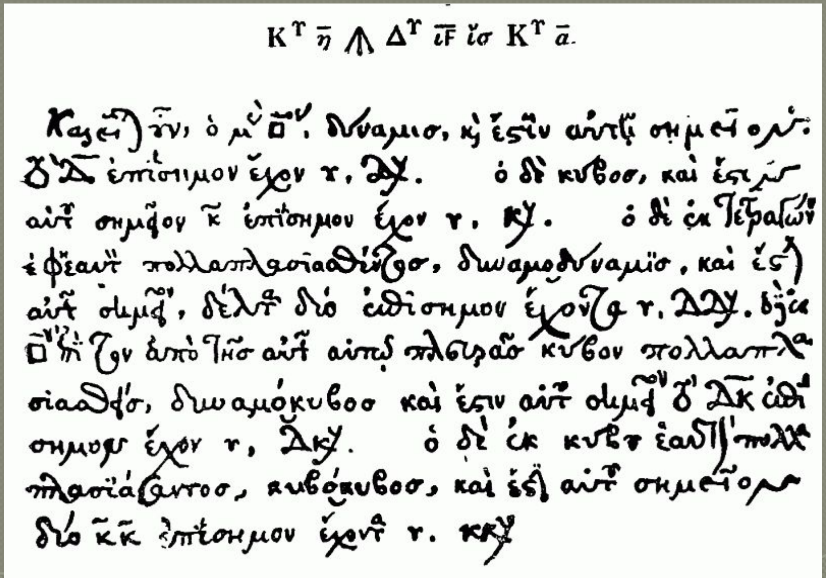
Прах Діофанта гробниця ховає: вдивися їй і камінь
Мудрим мистецтвом розкриє покійного вік:
З волі богів шосту частину життя був він дитина,
А ще половину шостої – стрів із пушком на щоках.
Тільки минула сьома, з коханою він одружився,
З нею п'ять років проживши, сина діждався мудрець.
Та півжиття свого тішився батько лиш сином:
Рано могила дитину у батька забрала.
Років двічі по два батько оплакував сина.
А по роках цих і сам стрів він кінець свій печальній…

Задача зводиться до рівняння

$$\boxed{\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x}$$

Отже Діофант прожив 84 роки.

У книзі "Арифметика" Діофант викладає теорію рівнянь першого степеня, розв'язує квадратні рівняння, але більше уваги приділено так званим невизначеним рівнянням та їх системам



Найпростіше діофантове рівняння
$ax + by = 1$

де a, b – цілі взаємно прості числа, має нескінченну множину розв'язків (якщо x_o, y_o – розв'язок, то числа $x = x_o + b \cdot n$, $y = y_o - a \cdot n$, $n \in Z$ також будуть розв'язками.)

Розв'язування: Застосувати алгоритм Евкліда до чисел a і b за схемою: 1) $a = bq_1 + r_1$, $0 \leq r_1 < b$;

2) $b = r_1q_2 + r_2$, $0 \leq r_2 < r_1$;

3) $r_1 = r_2q_3 + r_3$, $0 \leq r_3 < r_2$;

4) $r_2 = r_3q_4 + r_4$, $0 \leq r_4 < r_3$;

5) $r_3 = r_4q_5 + 1$, $r_5 = 1$;

6) $r_4 = r_5q_6$ (оскільки $(a, b) = 1$, то число кроків скінчене)

Знайти частинний цілий розв'язок рівняння 37x+23y=1.

Розв'язання.

$37 = 23 \cdot 1 + 14 \Rightarrow q_1 = 1$

$23 = 14 \cdot 1 + 9 \Rightarrow q_2 = 1$

$14 = 9 \cdot 1 + 5 \Rightarrow q_3 = 1$

$9 = 5 \cdot 1 + 4 \Rightarrow q_4 = 1$

$5 = 4 \cdot 1 + 1 \Rightarrow q_5 = 1, r_5 = 1$

$4 = 4 \cdot 1$

Підстановкою в рівняння визначаємо, що $\begin{cases} x_0 = 5 \\ y_0 = -8 \end{cases}$ - частинний розв'язок.

Відповідь. $\begin{cases} x_0 = 5 \\ y_0 = -8 \end{cases}$ - частинний розв'язок.

r_5	$-q_5 = -1$	$-q_4 = -1$	$-q_3 = -1$	$-q_2 = -1$	$-q_1 = -1$
1	-1	(-1)(-1)+1=2	2(-1)+(-1) =-3	(-3)(-1)+2=5	5(-1)+(-3)=-8

Знайти частинний і загальний розв'язки
7x-4y=2

Розв'язання

1) $y = \dfrac{7x-2}{4}$

2) **x**=0; 1; 2 $\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 3 \end{cases}$ - частинний розв'язок;

3) $\begin{cases} x = 2+4t \\ y = 3-7t \end{cases}$ або $\begin{cases} x = 2-4t \\ y = 3+7t \end{cases}$ - загальний розв'язок.

Відповідь: $\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 3 \end{cases}$ - частинний розв'язок;

$\begin{cases} x = 2+4t \\ y = 3-7t \end{cases}$ або $\begin{cases} x = 2-4t \\ y = 3+7t \end{cases}$

Приклади

Приклад 1.
Знайдіть усі цілі числа, які є розв'язками рівняння

$$y^3 - x^3 = 91.$$

Розв'язання. Оскільки $y^2 + xy + x^2 \geq 0$, а 7 і 13 – прості числа, то рівність можлива у випадках:

$$\begin{cases} y - x = 91 \\ y^2 + xy + x^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y - x = 1 \\ y^2 + xy + x^2 = 91 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - x = 7 \\ y^2 + xy + x^2 = 13 \end{cases} \qquad \begin{cases} y - x = 13, \\ y^2 + xy + x^2 = 7 \end{cases}$$

Розглянувши ці системи, знаходимо розв'язки рівняння: (5;6), (-6; -5), (-3;4), (-4;3).

Приклад 2.

Розв'яжіть рівняння $x^3 - y^3 = xy + 61$ на прикладі нату-ральних чисел.

Розв'язання. Скористаємося тотожністю

$$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$$

Позначивши $x - y = m$, $x \cdot y = n$, де $m \in Z, n \in Z$, дістанемо рівняння $m^3 + 3mn - n = 61$, звідки $n = \frac{61 - m^3}{3m-1}$. Оскільки $n \in Z$, то $m^3 < 61$, а отже, можливим значенням m будуть числа 1, 2, 3. . Перевіривши ці значення, дістанемо єдину пару натуральних чисел, які задовольняють рівняння: $m=1$; $n=30$. Отже, маємо: $\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 30 \end{cases}$, звідки $x=6$, $y=5$.

Зробивши перевірку, переконаємося, що ці числа є розв'язками рівняння.

Приклад 3.

Доведіть, що рівняння $x^2 + y^2 = z^2$ має нескінченну множину цілих розв'язків.

Розв'язання. Узявши до уваги рівність $3^2 + 4^2 = 5^2$ переконаємося в тому, що рівняння має нескінченну множину цілих розв'язків вигляду

$$x = 3\alpha, y = 4\alpha, z = 5\alpha$$

де α - довільне ціле число.

Дякую за увагу