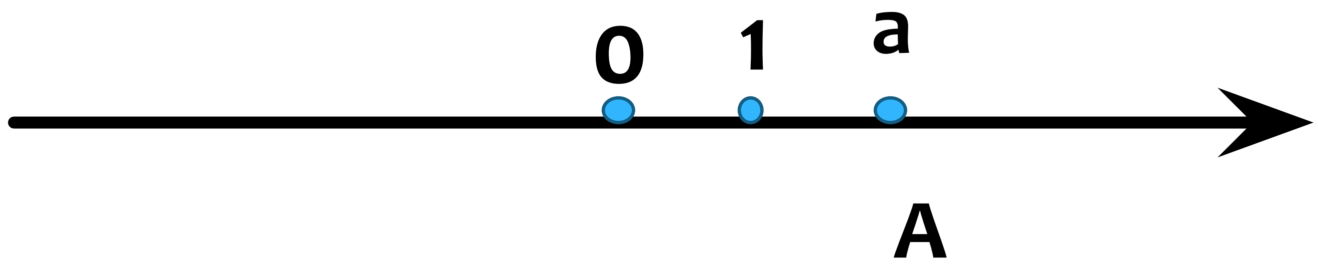
Метод координат и метод векторов при решении задач

Подготовила обучающаяся группы ПК-28

Орёл Ольга

Некоторые определения и вычислительные формулы

Координаты точки на прямой.



A(a)

Задачи на прямой в координатах

* **1. Вычисление длины отрезка АВ.**

Дано: $A(x_1)$, $B(x_2)$.

Найти АВ.

Решение:

$$\rho(A,B) = |x_2 - x_1|$$

Задачи на прямой в координатах

* **2. Вычисление координаты середины отрезка.**

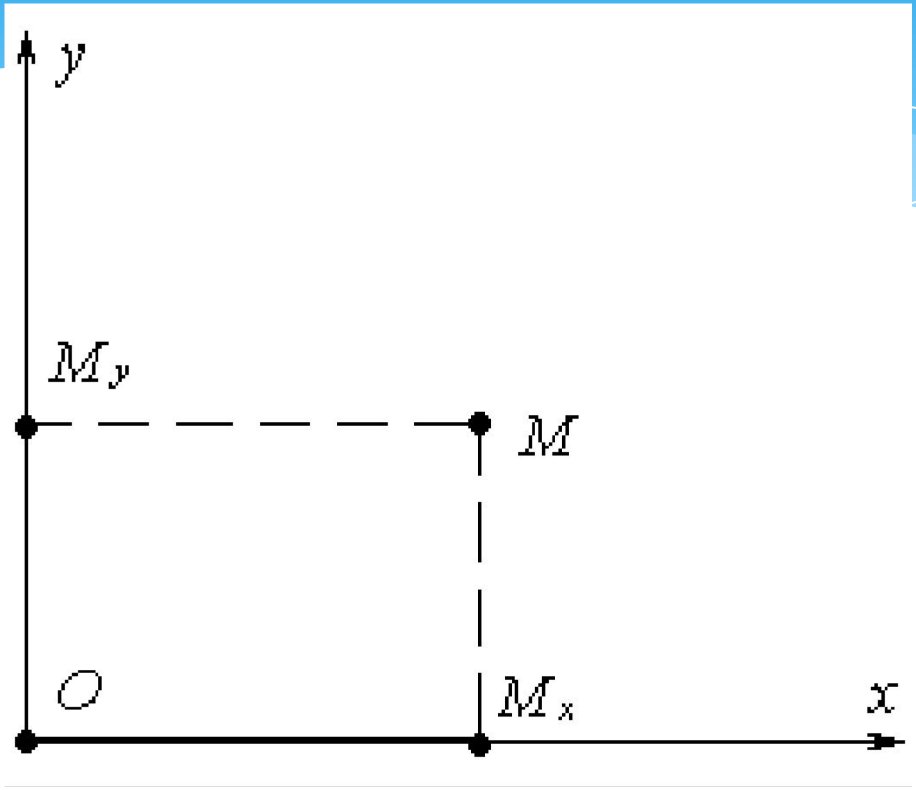
Дано: A(x_1), B(x_2), C – середина отрезка AB.

Найти координату C.

Решение:

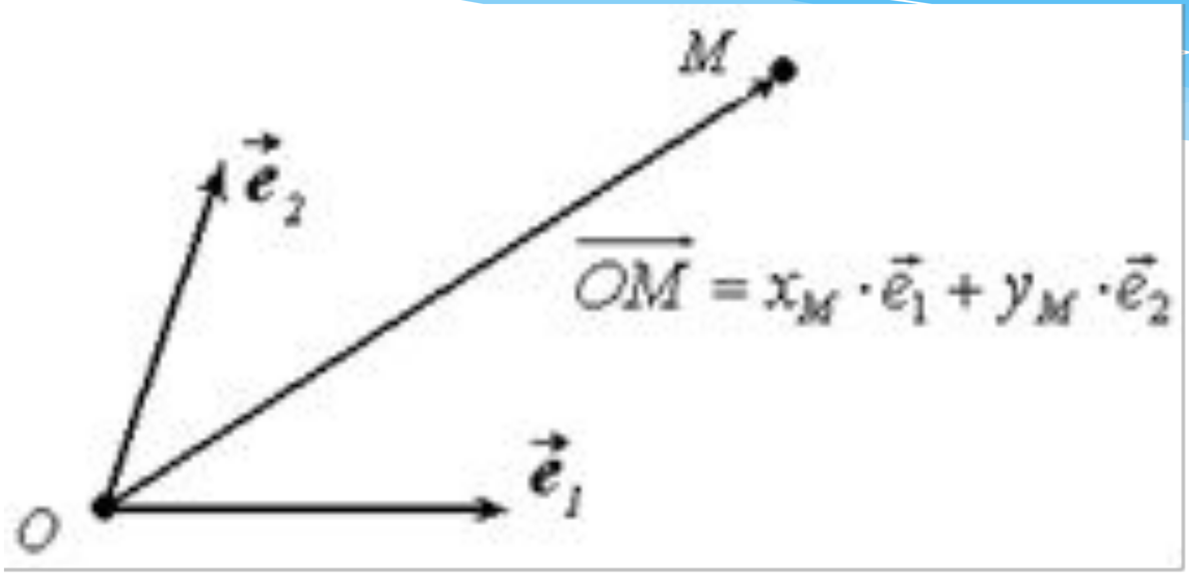
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Координаты точки на плоскости



Определение координат
точки методом проекций на оси.

Координаты точки на плоскости



Определение координат точки через координаты ее радиус-вектора.

Деление отрезка пополам.

Дано: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x, y)$ – середина отрезка AB.

Найти координаты C.

Решение:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Расстояние между точками

Дано: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

Найти AB.

Решение:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Некоторые свойства векторов

* ***Коллинеарность векторов***

* **Первый признак:** $\vec{a} = \lambda\vec{b}$

* **Второй признак:** $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

Некоторые свойства векторов

* *Вычисление координат вектора по координатам его начала и конца.*

$$\overline{AB}\{x_B - x_A, y_B - y_A\}$$

Некоторые свойства векторов

- ***Вычисление длины вектора и длины отрезка***

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Некоторые свойства векторов

* *Скалярное произведение векторов в прямоугольной системе координат*

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Некоторые свойства векторов

* ***Признак перпендикулярности векторов:***

  два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Некоторые свойства векторов

* ***Вычисление угла между векторами.***

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$$

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

Некоторые свойства векторов

* **Вычисление площади параллелограмма, построенного на двух векторах.** $\vec{a}\{a_1, a_2\}, \vec{b}\{b_1, b_2\}$

$$S = \left| a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \right|$$

Уравнения прямой и отрезка

* *Параметрические уравнения прямой.*

$$x = a_1 \cdot t + x_0$$

$$y = a_2 \cdot t + y_0,$$

Уравнения прямой и отрезка

* *Канонические уравнения прямой.*

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}$$

Уравнения прямой и отрезка

- ***Общее уравнение прямой.***

$$a\cdot x+b\cdot y+c=0$$

Уравнения прямой и отрезка

* ***Условие перпендикулярности двух прямых, заданных как графики линейных функций.***

$$y = k_1 \cdot x + b_1 \qquad y = k_2 \cdot x + b_2$$

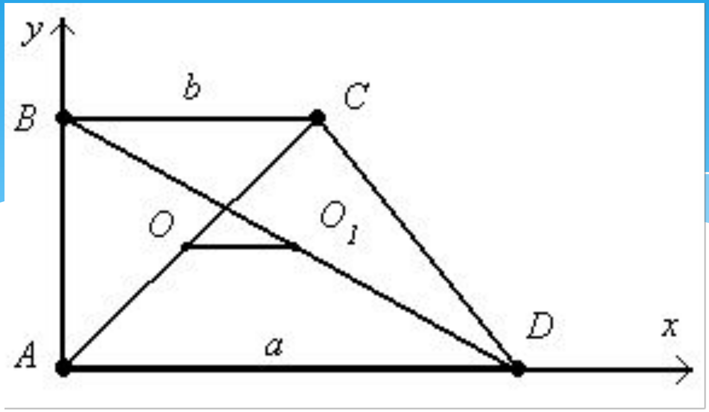
$$\vec{a}_1\{1, k_1\} \qquad \vec{a}_2\{1, k_2\}$$

$$1 + k_1 \cdot k_2 = 0 \qquad k_1 \cdot k_2 = -1$$

Уравнение окружности

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

Примеры решения задач



Задача 1. ***Дана прямоугольная трапеция с основаниями a и b. Найдите расстояние между серединами ее диагоналей.***

Решение. 1. Введем систему координат как указано на рисунке 3. Тогда вершины трапеции будут иметь координаты: A(*0*,*0*), B(*0*,*y*), C(*b*,*y*) и D(*a*,*0*). (*y* – высота трапеции, AB).

2. Найдем координаты середин диагоналей. Для точки O,

$$x_O = \frac{0+b}{2} = \frac{b}{2}; y_O = \frac{0+y}{2} = \frac{y}{2}$$

для точки O_1:

$$x_{O_1} = \frac{0+a}{2} = \frac{a}{2}; y_{O_1} = \frac{0+y}{2} = \frac{y}{2}$$

По формуле найдем расстояние между точками O и O_1:

$$|OO_1| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}-\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{a-b}{2}$$

МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

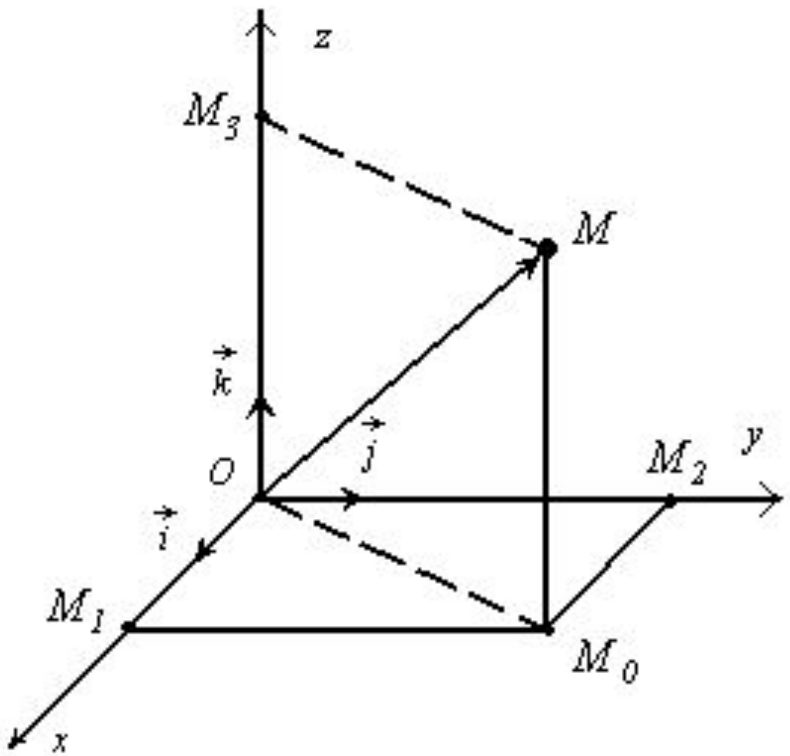


Рисунок 1

Основные формулы

- **Координаты вектора по координатам его начала и конца определяются так: если $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$**

Основные формулы

- **Скалярное произведение векторов** $\vec{a}$ **=** (a_1, a_2, a_3) **и** $\vec{b}$ **=** (b_1, b_2, b_3) **в координатах равно:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Основные формулы

* **Длина вектора = (a_1, a_2, a_3) вычисляется по формуле**

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Основные формулы

* **Угол между векторами = (a_1, a_2, a_3) и = (b_1, b_2, b_3) из определения скалярного произведения**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b})$$

Основные формулы

* **Угол между векторами = (a_1, a_2, a_3) и = (b_1, b_2, b_3) из определения скалярного произведения**

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Основные формулы

* **Расстояние между двумя различными точками $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и M_2 (x_2, y_2, z_2) равно**

* $$\rho(M_1,M_2) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Основные формулы

- **Уравнение сферы с центром в точке С (x_0, y_0, z_0) и радиусом r имеет вид:**
- $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$

Основные формулы

- **Координаты точки $M(x,y,z)$ – середины отрезка M_1M_2, где $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и**
- **$M_2\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$, $M_1 \neq M_2$ находятся по формулам:**

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Основные формулы

* **Условие коллинеарности векторов = (*a_1*, *a_2*, *a_3*) и = (*b_1*, *b_2*, *b_3*) имеет вид**

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{c_3}{c_3}$$

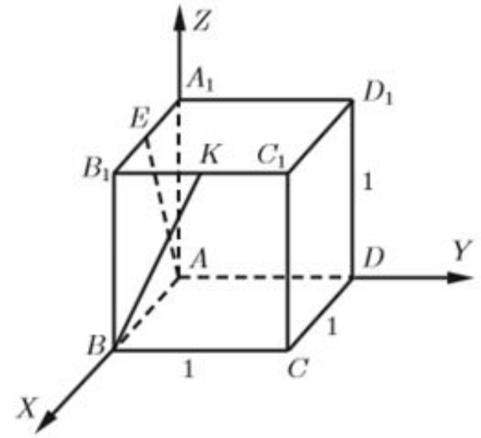
Алгоритм применения метода координат к решению геометрических задач сводится к следующему:

* **Выбираем в пространстве систему координат из соображений удобства выражения координат и наглядности изображения.**
* **Находим координаты необходимых для нас точек.**
* **Решаем задачу, используя основные задачи метода координат.**
* **Переходим от аналитических соотношений к геометрическим**

Примеры решения задач

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и K — середины ребер соответственно A_1B_1 и B_1C_1. Найдите косинус угла между прямыми AE и BK.

Если в задаче C2 вам достался куб — значит, повезло. Он отлично вписывается в прямоугольную систему координат. Строим чертеж:



Длина ребра куба не дана. Какой бы она ни была, угол между AE и BK от нее не зависит. Поэтому возьмем единичный куб, все ребра которого равны 1.

Прямые AE и BK — скрещиваются. Найдем угол между векторами $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{BK}$. Для этого нужны их координаты.

$A\ (0;\ 0;\ 0)$
$B\ (1;\ 0;\ 0)$
$E\ (\frac{1}{2};\ 0;\ 1)$
$K\ (1;\ \frac{1}{2};\ 1)$

Запишем координаты векторов:
$\overrightarrow{AE}\ (\frac{1}{2};\ 0;\ 1)$
$\overrightarrow{BK}\ (0;\ \frac{1}{2};\ 1)$
и найдем косинус угла между векторами $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{BK}$:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BK}}{\left|\overrightarrow{AE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BK}\right|} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 0 + 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot 1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2}\cdot\sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

* Многие задачи в математике решаются методом координат, суть которого состоит в следующем:
* Задавая фигуры уравнениями (неравенствами) и выражая в координатах различные геометрические соотношения, мы применяем алгебру к решению геометрических задач;
* Пользуясь координатами, можно истолковывать алгебраические соотношения геометрически, применяя геометрию к решению алгебраических задач.

СПАСИБО

ЗА

ВНИМАНИЕ!