# Дифференциалдық теңдеулер

**Медициналық биофизика, информатика және математикалық статистика кафедрасының доценті**
**Аймаханова Айзат Шалхаровна**

# Дәріс жоспары:

- Бірінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеулер. Жалпы және дербес шешімдер.
- Айнымалылары ажыратылатын бірінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеулер. Коши есебі.
- Бір текті дифференциалдық теңдеу.
- Бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулер. Лагранж әдісі. Бернулли әдісі.
- Медициналық – биологиялық есептерге дифференциалдық теңдеулер құру.

***Дифференциалдық теңдеу*** деп *x тәуелсіз айнымалыны, y ізделінді функцияны және оның әртүрлі ретті туындыларын байланыстыратын өрнекті айтады.*

*Дифференциалдық теңдеудің құрамына кіретін туындылардың ең жоғары реті сол* ***теңдеудің реті*** *деп аталады.*

*Егер y ізделінді функциясы бір айнымалыға тәуелді болса, онда д.т.* ***қарапайым дифференциалдық теңдеу*** *деп аталады.*

# *n*-ші ретті дифференциалдық теңдеулер :

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0$$

**n- дифференциалдық теңдеудің  реті**

$$y^{(n)} = F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

Жоғары туындыға қатысты шешілген д.т.

***Дифференциалдық теңдеудің шешімі*** деп сол теңдеуге қойғанда оны теңбе-теңдікке айналдыратын $y=y(x)$ функциясын айтады.

***Дифференциалдық теңдеудің шешімін табу есебі*** берілген ***дифференциалдық теңдеуді интегралдау есебі деп аталады.***

Дифференциалдық теңдеудің шешімінің графигі ***интегралдық қисық деп аталады.***

# *n*-ші ретті д.т. жалпы және дербес шешімдері

$y=\phi(x,C_1,..,C_n)$, - *жалпы шешім*, мұндағы $C_1,..,C_n$ кез келген тұрақты сандар.

$C_1,..,C_n$ нақты бір сандық мәндеріндегі шешім *дербес шешім* деп аталады.

# 1-ші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеу:

$$F(x,y,y')=0$$

***x – тәуелсіз айнымалы;  y - ізделінді функция; y' -  функция туындысы.***

$$y'=f\,(x,y)$$

**туындыға  қатысты шешілетін  бірінші ретті д.т.**

# Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

немесе

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y) = 0$$

мұндағы $f(x)$, $M(x), P(x)$ – $x$ айнымалысының қандай да бір функциясы;
$g(y)$, $N(y)$, $Q(y)$ - $y$ айнымалысының функциясы.

# Шешу жолы:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

$$y = \varphi(x, C)$$

**- жалпы шешім.**

# Коши есебі

$$y\big|_{x=x_0} = y_0$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын $\boldsymbol{y' = f\,(x,y)}$ теңдеуінің дербес шешімін табу есебі **Коши есебі** деп аталады.

# Бірінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеу

**Анықтама.** Егер $x$ және $y$ айнымалылары бойынша ноль өлшемді біртекті функция болатын болса, онда бірінші ретті дифференциалдық теңдеу

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

біртекті теңдеу деп аталады.

Біртекті теңдеудің шешуі. Шарт бойынша

$$f(x, y) = f(1, \frac{y}{x}).$$

Онда теңдеу төмендегі түрге ие болады:

$$\frac{dy}{dx} = f(1, y/x).$$

# Бірінші ретті біртекті дифференциалдық теңдеу

$u = \frac{y}{x}$ немесе $y = u \cdot x$ алмастыруын жасаймыз.

Соңғы теңдікті дифференциалдап, табатынымыз:

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}.$$

$y$ және $\frac{dy}{dx}$ -тің мәндерін берілген теңдеуге қойып,

$$u + x\frac{du}{dx} = f(1,u)$$

теңдеуіне ие боламыз. Бұл айнымалылары бөлінетін теңдеу:

$$x\frac{du}{dx} = f(1,u) - u$$ немесе $$\frac{du}{f(1,u) - u} = \frac{dx}{x}$$

Интегралдап табамыз:

$$\int \frac{du}{f(1,u) - u} = \int \frac{dx}{x} + \ln C$$ немесе $$\int \frac{du}{f(1,u) - u} = \ln|x| + \ln|C|.$$

# Бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеу

$$y' + p(x)\, y = f\,(x), \qquad (1)$$

***мұндағы*** $p(x)$ ***и*** $f(x)$ **— үздіксіз *функциялар*,**

***Егер*** $f\,(x) = 0$, **онда** $y'+p(x)y=0$

***біртекті сызықты д.т.***

**Егер** $f\,(x)\neq 0$, **онда** $y'+p(x)y=f\,(x)$,

***біртекті сызықты емес д.т.***

# Сызықты біртекті д.т. шешу әдісі

$$y'+p(x)\,y=0$$

$$y'=-p(x)\,y$$

$$y'=\frac{dy}{dx} \qquad \frac{dy}{dx}=-p(x)y, \qquad \frac{dy}{y}=-p(x)dx,$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int p(x)dx$$

$$\ln|y|=-\int p(x)dx+\ln|C_1|$$

# Біртекті сызықты емес д.т. шешу әдістері

$$y' + p(x)\,\mathrm{y} = f\,(\mathrm{x})$$

- **Тұрақтыны вариациялау әдісі**
  **( Лагранж әдісі)**

- **Бернулли әдісі**

# Тұрақтыны вариациялау әдісі

1. С.б.емес д.т. жалпы шешімін адымдап табу әдісі.

2. Жалпы шешімнің формуласы:

$$y(x) = C_1 e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int f(x) e^{\int p(x)dx} dx$$

# Тұрақтыны вариациялау әдісі

Бұл әдіс үш этаптан тұрады.

А) $$\frac{dy_0}{dx} + P(x)y_0 = 0$$

сызықтық біртекті теңдеудің жалпы шешімін анықтаймыз.

$$\frac{dy_0}{y_0} = -P(x)dx \Rightarrow \quad \int \frac{dy_0}{y_0} = -\int P(x)dx$$

$$\ln y_0 = -\int P(x)dx + \ln C,$$

$$y_0 = C \cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

# Тұрақтыны вариациялау әдісі

В) теңдеудің дербес шешімін табу үшін $C \quad x$ айнымалының функциясы болсын да, бұл жерде белгісіз функция. Яғни, $C=C(x)$.

$$\left(C(x)e^{-\int P(x)dx}\right)' + P(x)\left(C(x)e^{-\int P(x)dx}\right) = Q(x)$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)\left(C(x)e^{-\int P(x)dx}\right) + P(x)\left(C(x)e^{-\int P(x)dx}\right) = Q(x)$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\frac{dC}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx} \qquad dC = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

$$C = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1$$

С) $C(x)$ функциясының табылған мәнін $y_0 = C \cdot e^{-\int P(x)dx}$ теңдікке қойып, табамыз:

$$y = \left( \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C_1 \right) e^{-\int P(x)dx} \qquad (*)$$

(*) - бірінші ретті сызықтық бір текті емес теңдеудің жалпы шешімі.

# Бернулли әдісі

С.б. емес д.т. шешімі мына түрде ізделінеді

$$y = u \cdot \upsilon$$

мұндағы $u = u(x)$ және $\upsilon = \upsilon(x)$ - белгісіз функциялар.

# Бернулли теңдеуі

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \cdot y^n$$

дифференциалдық теңдеуін қарастырайық.

Егер $n = 0$ немесе $n = 1$ болатын болса, онда сызықтық дифференциалдық теңдеуге ие боламыз. Сондықтан $n \neq 0$ және $n \neq 1$ жағдайда қарастырамыз. Бұл теңдеу Бернулли теңдеуі деп аталады және $z = y^{1-n}$ алмастыруы арқылы сызықтық дифференциалдық теңдеуге келтіріледі. Ол үшін теңдеудің екі жағын да $y^n$ бөліп:

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x) y^{1-n} = Q(x),$$

(1) теңдеуін аламыз.

$$z = y^{1-n} \quad (2)$$

алмастыруын жасаймыз.

(2) теңдікті дифференциалдап, табамыз:

$$\frac{dz}{dx} = (1-n) y^{-n} \frac{dy}{dx}. \quad (3)$$

$z$ және $\frac{dz}{dx}$ -тің мәндерін (1) теңдеуге қойып, төмендегі сызықтық дифференциалдық теңдеуге ие боламыз:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x). \quad (4)$$

Бұл теңдеудің жалпы интегралын тауып және $z$-ті $y^{1-n}$ арқылы алмастырып, Бернулли теңдеуінің жалпы интегралын табамыз.

# Кейбір жаратылыстану есептеріне д.т. құру:

# Бактериялардың көбею жылдамдығы жөніндегі есеп

Бактериялардың көбею жылдамдығы олардың санына пропорционал. Бастапқы мезетте 100 бактерия болды, ал 3 сағ. Ішінде олардың саны екі есе артты. Бактериялар санының уақытқа тәуелділігін табу керек. 9сағ. ішінде бактериялар саны неше есе артады?

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

# Химиялық реакцияларды сипаттайтын д.т.:

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)$$ - бірінші текті х.р.

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$ - екінші текті х.р.

# Радиоактивті ыдырау жөніндегі есеп

Радийдің ыдырау жылдамдығы уақыттың әрбір мезетінде оның бар массасына пропорционал. Бастапқы мезетте m0 г радийдің болғаны және радийдің жартылай ыдырау кезеңі (радийдің жарты массасының ыдырайтын уақыт кезеңі) 1590 жыл екендігі белгілі болса, онда радийдің ыдырау заңын табу керек.

$$\frac{d(m_0 - x)}{dt} = -\frac{dx}{dt}.$$

# Дененің тоңазуы жөніндегі есеп

Дененің ауада тоңазу жылдамдығы дене температурасы мен ауа температурасының айырмасына пропорционал. Ауа температурасы $20^0$ С тең. 20 мин. ішінде дененің 100 ден $60^0$ С. дейін тоңазитыны белгілі болса, дене температурасының t уақытқа тәуелді өзгеру заңын табу керек.

$$\frac{d\theta}{dt} = k(\theta - 20),$$

# Әдебиет:

*ҚАЗАҚ ТІЛІНДЕ*


•**Изтлеуов М.К., Беккужина А.И., Жалимбетова Н.К., Ахметова А.Б. Математика: Жоғары медицина оқу орындарына арналған оқулық. Полиграфия, 2005г.**

•**Қасымов К., Қасымов Е. Жоғары математика курсы. Оқу құралы.-Алматы: Санат, 1997.**


*ОРЫС ТІЛІНДЕ*


•**И.В. Павлушков** и др. **Основы высшей математики и математической статистики**. (учебник для медицинских и фармацевтических вузов)., М., 2003 г.

•**В.С. Шипачев. Курс высшей математики.** М., Проспект. 2004 г.

•**И.И. Баврин, В.Л. Матросов. Высшая математика.** М., ВЛАДОС.2002г.

•**Ю. Морозов. Основы высшей математики для мед. вузов**. М., 2000 г.

Назарларыңызға рахмет