ФГАОУ ВПО «Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова»
Инженерно-технический институт
Кафедра прикладной механики

Решение задач по дисциплине «Техническая механика» 270800 - Строительство

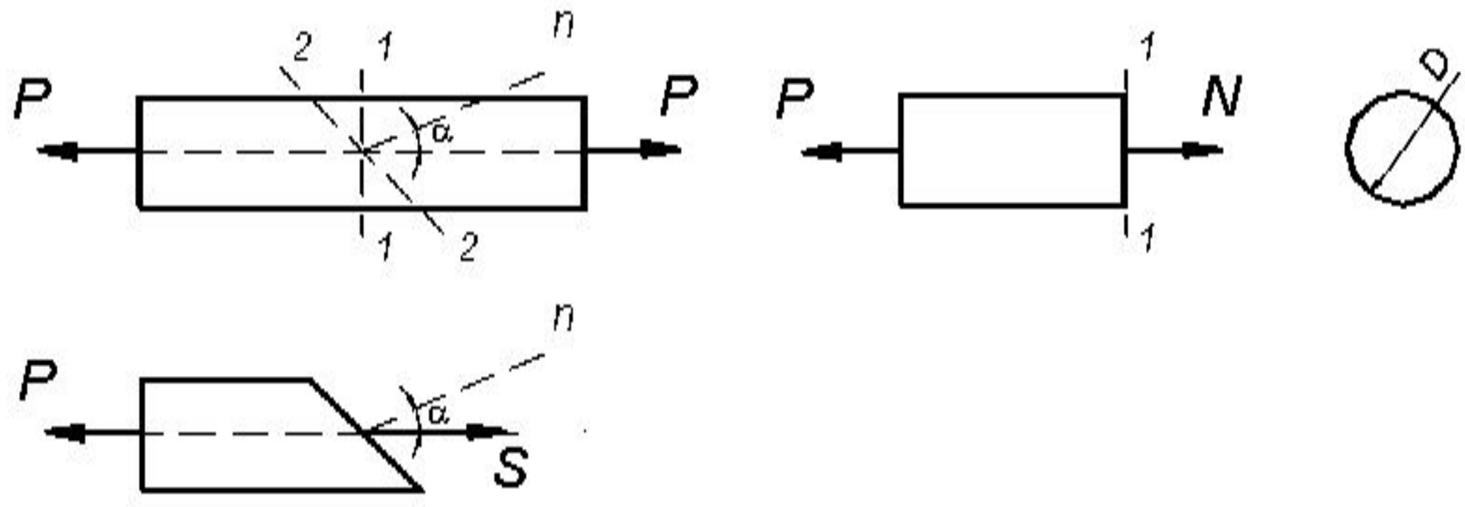
НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТА В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ

Задача 1

Стержень диаметром 75 мм растянут силами 350 кН.

Требуется:

- Определить полное напряжение в поперечном сечении;
- Определить полное, нормальное и касательное напряжения в сечении с нормалью, наклоненной под углом 15^0 к оси стержня;
- Определить, в каком сечении касательные напряжения достигают своего максимума, и вычислить их величины.



Решение:

1. Рассматривая равновесие отсеченной части сечением 1-1 части, определяем внутреннее усилие N:

$$\sum Z = N - P = 0, \qquad N = P = 350 \text{ кН}.$$

Определяем полное напряжение в поперечном сечении 1-1, которое равно нормальному напряжению:

$$p_{1-1} = \sigma = \frac{N}{A} = \frac{4 \cdot 350 \text{кН}}{3{,}14 \cdot 7{,}5^2} = 7{,}93 \ \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Из равновесия отсеченной части сечением 2-2 определяем внутреннее усилие S:

$$\sum Z = S - P = 0, \qquad S = P = 350 \text{ кН}.$$

2. Выразим площадь сечения 2-2 через площадь поперечного сечения стержня A:

$$A_\alpha = \frac{A}{\cos 15^0}$$

Полное напряжение в сечении 2-2:

$$p_\alpha = \frac{S}{A_\alpha} = \frac{P}{A} \cdot \cos 15^0 = \sigma \cdot \cos 15^0 = 7{,}66 \ \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Нормальное напряжение в сечении 2-2:

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cdot \cos 15^0 = \sigma \cdot \cos^2 15^0 = 7{,}4 \ \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Касательное напряжение в сечении 2-2:

$$\tau_\alpha = p_\alpha \cdot \sin 15^0 = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin\left(2 \cdot 15^0\right) = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 30^0 = 1{,}98 \ \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

3. Из $\tau_\alpha = \dfrac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha$

видно, что касательные напряжения своего максимального значения достигают в сечении, наклоненном под углом 45^0 к оси стержня:

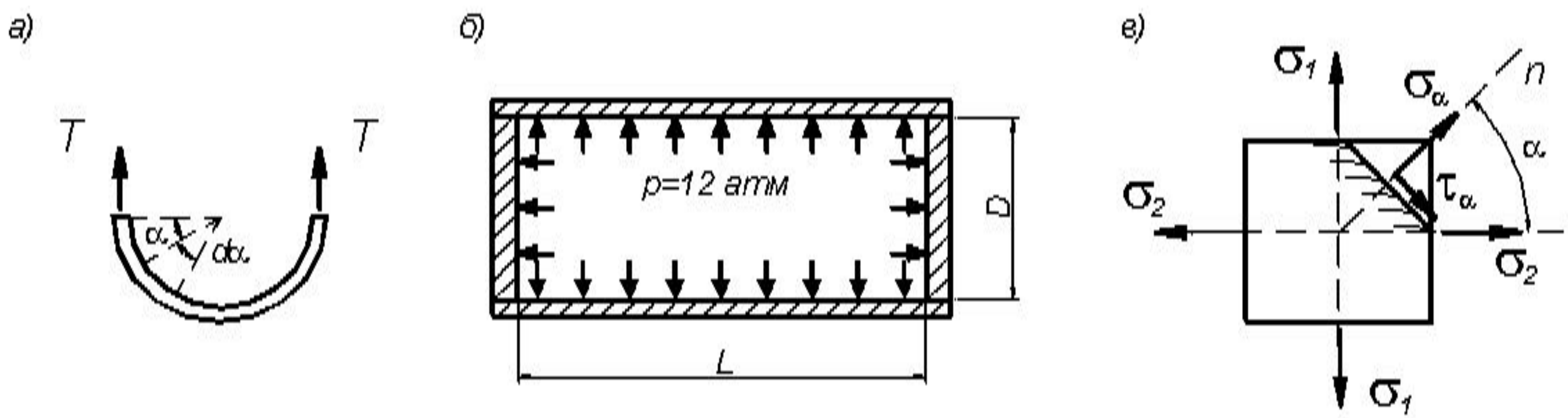
$$\tau_{\max} = \frac{7{,}93}{2} \cdot \sin 90^0 = 3{,}965 \ \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Задача 2

В котле с внутренним диаметром D=800 мм, длиной l=1,6 м и толщиной стенки t=10 мм создается внутреннее давление, равное p=12 атм=$12 \cdot 10^5$ Па.

Требуется:

- Определить напряжения, возникающие в стенке котла в поперечном и продольном сечениях;
- Определить возникающие напряжения в сечении под углом 30^0 к образующей стенки котла;
- Проверить прочность котла по 3-й и 4-й теориям прочности, если $[\sigma]$=180 МПа.



Решение:

1. Стенка котла от действия внутреннего давления подвержена плоскому напряженному состоянию.

Нормальные напряжения в поперечном сечении котла определяются из:

$$\sigma_2 = \frac{Q}{A_1} = \frac{p \cdot \pi \cdot D^2}{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t} = \frac{p \cdot D}{4 \cdot t} = \frac{12 \cdot 10^5 \cdot 0{,}8}{4 \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 2{,}4 \cdot 10^7 \text{ Па} = 24 \text{ МПа},$$

где $Q = \dfrac{p \cdot \pi D^2}{4}$ – растягивающие усилия стенки котла от давления торцевой части;

$A_1 = \pi \cdot D \cdot t$ – поперечное сечение стенки котла.

Нормальные напряжения в сечении вдоль образующей стенки котла, вызванные тангенциальными усилиями, определяются:

$$\sigma_1 = \frac{T}{A_2} = \frac{p \cdot D}{2 \cdot t} = \frac{12 \cdot 10^5 \cdot 0{,}8}{2 \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 4{,}8 \cdot 10^7 \text{ Па} = 48 \text{ МПа},$$

где $A_2 = l \cdot t$, $T = p \cdot D \cdot l$ - тангенциальное усилие, которое получается из

$$\sum Y = 2T - \int_0^{S/2} pl \cdot \sin\alpha \cdot dS = 0 \quad dS = R \cdot d\alpha, \quad S = \pi D$$

2. Нормальные и касательные напряжения в сечении под углом 30^0 к образующей определяем:

$$\sigma_\alpha = \sigma_2 \cdot \cos^2\alpha + \sigma_1 \cdot \sin^2\alpha = 24 \cdot 0{,}75 + 48 \cdot 0{,}25 = 30 \text{ МПа},$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha = \frac{48 - 24}{2} \cdot \sin 60^0 = 10{,}4 \text{ МПа}.$$

3. Проверка прочности стенки котла:

- по 3-й теории прочности (по наибольшим касательным напряжениям):

$$\sigma_{экв_3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 48 - 0 = 48 \text{ МПа} < 180 \text{ МПа}$$

- по 4-й теории прочности (энергетической теории прочности):

$$\sigma_{экв_4} = \sqrt{\left\{[\frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]\right\}} =$$

$$= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} = \sqrt{48^2 + 24^2 - 48 \cdot 24} = 41{,}57 \text{ МПа} < 180 \text{ МПа}$$

Материал стенки котла по 3-й и 4-й теориям отвечает условиям прочности.

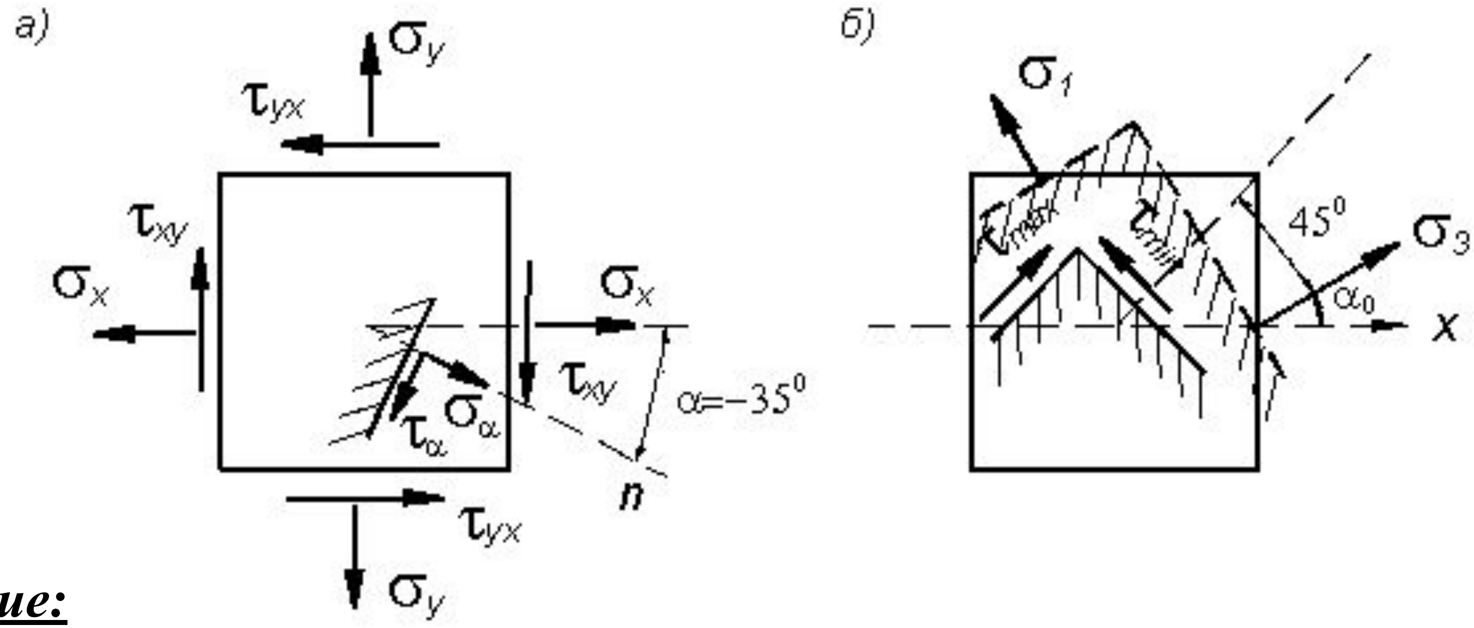
Задача 3

В элементе конструкции, подверженному плоскому напряженному состоянию, в окрестности некоторой точки действуют напряжения:

$\sigma_x = -140$ МПа, $\sigma_y = 80$ МПа, $\tau_{xy} = 60$ МПа.

Требуется определить:

- напряжения на площадке под углом (-35^0) к площадке с нормалью X;
- положение главной площадки и вычислить значения главных напряжений;
- значения главных напряжений, как экстремальные значения нормальных напряжений, и сравнить с результатами п.2;
- величины максимальных касательных напряжений и показать площадку их действия;
- наибольшие относительные линейные деформации элемента в окрестности рассматриваемой точки, если $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0{,}25$;
- величину удельной потенциальной энергии упругой деформации элемента;
- относительное изменение объема в окрестности, рассматриваемой точки;
- Проверить прочность материала элемента по 3-й и 4-й теориям прочности, если $[\sigma] = 180$ МПа.



Решение:

- Напряжения на площадке под углом (-35^0) (от оси *X* по ходу часовой стрелки) (рис.а) вычисляем:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cdot cos^2\alpha + \sigma_y \cdot \sin^2\alpha - \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha =$$

$$= -140 \cdot \cos^2\left(-35^0\right) + 80 \cdot \sin^2\left(-35^0\right) - 60 \cdot \sin\left(-2 \cdot 35^0\right) = -11{,}24 \text{ МПа},$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha =$$

$$= \frac{-140 - 80}{2} \cdot \sin\left(-2 \cdot 35^0\right) + 60 \cdot \cos\left(-2 \cdot 35^0\right) = 123{,}89 \text{ МПа}.$$

• Главная площадка лежит под углом α_0 к площадке с нормалью X:

$$tg2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot 60}{-140 - 80} = 0{,}545,$$

$$2\alpha_0 = arctg0{,}545 = 28{,}59^0, \qquad \alpha_0 = 14{,}3^0.$$

Угол α_0 откладываем против хода часовой стрелки от оси X, т.к. α_0 >0.

Величины главных напряжений вычисляем:

$$\sigma_{\alpha_0} = \sigma_x \cdot \cos^2\alpha_0 + \sigma_y \cdot \sin^2\alpha_0 - \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha_0 =$$

$$= -140 \cdot \cos^2 14{,}3^0 + 80 \cdot \sin^2 14{,}3^0 - 60 \cdot \sin 28{,}6^0 = -155{,}3 \ \text{МПа} = \sigma_3,$$

$$\sigma_{(\alpha_0+90)} = \sigma_x \cdot \sin^2\alpha_0 + \sigma_y \cdot \cos^2\alpha_0 + \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha_0 =$$

$$= -140 \cdot 0{,}061 + 80 \cdot 0{,}94 + 60 \cdot 0{,}479 = 95{,}3 \ \text{МПа} = \sigma_1.$$

•Значение главных напряжений вычисляем, как экстремальные значения нормальных напряжений в окрестности рассматриваемой точки:

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{-140+80}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(-140-80\right)^2 + 4\cdot 60^2} = -30 \pm 125{,}3;$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = 95{,}3\ \text{МПа}, \qquad \sigma_{\min} = -155{,}3\ \text{МПа}.$$

Сравнивая с результатами пункта 2, заключаем, что значения главных напряжений и положения главных площадок вычислены верно.

•Величины максимальных касательных напряжений вычисляем:

$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \pm\frac{95{,}3-(-155{,}3)}{2} = \pm 125{,}3\ \text{МПа},$$

или

$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(-140-80\right)^2 + 4\cdot 60^2} = \pm 125{,}3\ \text{МПа}.$$

Площадки их действия лежат под углом 45^0 к направлению главных площадок или от оси X на $\beta=45^0+\alpha_0=59{,}3^0$.

- Наибольшие относительные линейные деформации вычисляем по формулам обобщенного закона Гука, направления их совпадают с направлениями главных напряжений:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right) = \frac{1}{2{,}1\cdot 10^5}\left(95{,}3 - 0{,}25\left(-155{,}3\right)\right) = 63{,}87\cdot 10^{-5},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \mu\left(\sigma_1 + \sigma_3\right)\right) = -\frac{0{,}25}{2{,}1\cdot 10^5}\left(95{,}3 - 155{,}3\right) = 7{,}14\cdot 10^{-5},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \mu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right) = \frac{1}{2{,}1\cdot 10^5}\left(-155{,}3 - 0{,}25\cdot 95{,}3\right) = -85{,}3\cdot 10^{-5}.$$

- Удельная потенциальная энергия упругой деформации равна:

$$u = \frac{\sigma_1\cdot\varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2\cdot\varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3\cdot\varepsilon_3}{2} = \frac{95{,}3\cdot 63{,}87\cdot 10^{-5}}{2} + \frac{(-155{,}3)\cdot(-85{,}3\cdot 10^{-5})}{2} =$$

$$= 9666{,}95\cdot 10^{-5}\ \frac{\text{МДж}}{\text{м}^3}.$$

- Относительное изменение объема в окрестности рассматриваемой точки будет:

$$\theta = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 63{,}87 \cdot 10^{-5} + 7{,}14 \cdot 10^{-5} - 85{,}3 \cdot 10^{-5} = -14{,}25 \cdot 10^{-5},$$

знак «-» показывает, что объем элемента уменьшается.

- Проверяем прочность материала:
  - по 3-й теории прочности:

$$\sigma_{экв_3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 95{,}3 - (-155{,}3) = 250{,}3 \text{ МПа};$$

  - по 4-й теории прочности:

$$\sigma_{экв4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} = \sqrt{95{,}3^3 + (-155{,}3)^2 - 95{,}3(-155{,}3)} =$$

$$= 219{,}09 \text{ МПа}.$$

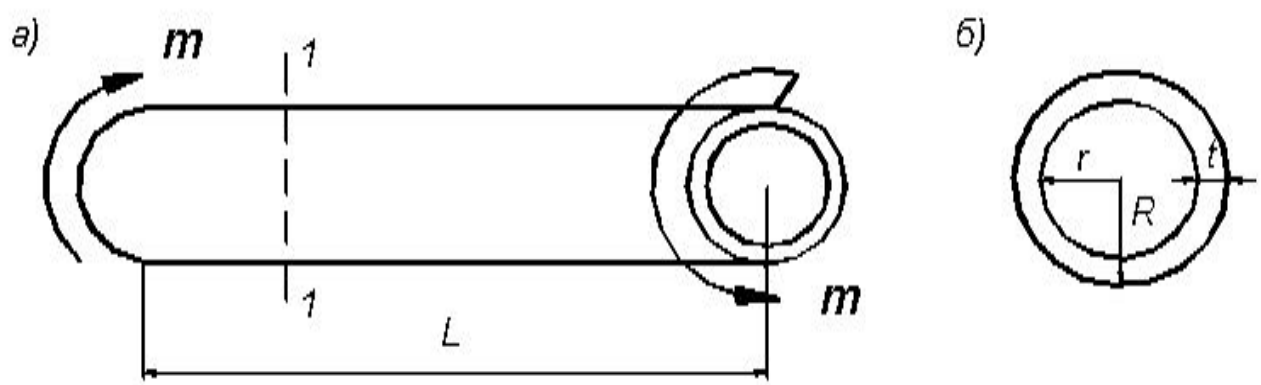
Прочность материала по 3-й и 4-й теориям прочности не удовлетворяет условиям прочности, так как допускаемое напряжение для материала элемента конструкции равно [σ]=180 МПа.

<u>Задача 4</u>

На вал (рис., а) кольцевого сечения с радиусами R=10 см и r =8 см действуют две пары сил противоположного направления с моментами m=50 кН · м на площадках, перпендикулярных к оси стержня.

Требуется:

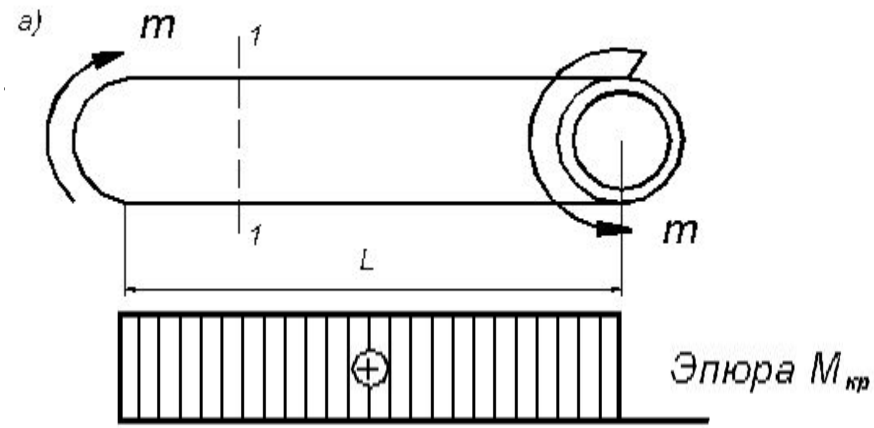
- Построить эпюру крутящих моментов $M_к$;
- Определить касательные напряжения в поперечном сечении вала от действия крутящего момента;
- Определить положение главных площадок и действующие на них главные напряжения;
- Проверить условие прочности по 1-й и 2-й теориям прочности, если $[\sigma]_р$=60 МПа, μ = 0,15;
- Показать направление возможного раскрытия трещин.



Решение:

1.Из условия равновесия отсеченной части вала определяем крутящий момент и строим эпюру :

$$\sum m_z = M_к - m = 0; \qquad M_к = m = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}$$



2. Максимальные касательные напряжения в трубе от действия крутящего момента определяем по:

$$\tau = \frac{M_{кр} \cdot \rho_{\max}}{I_\rho} = \frac{M_{кр}}{W_\rho} = \frac{M_{кр} \cdot 2}{\pi R^3 \left(1 - \alpha^4\right)} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot 2}{3{,}14 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} \left(1 - 0{,}8^4\right)} = 53{,}94 \text{ МПа}.$$

Так как в поперечном сечении вала возникают только касательные напряжения, то вал испытывает деформацию чистого сдвига.

3.Положение главных площадок на наружной площадке трубы определяем по:

$$tg 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2\tau}{0 - 0} = -\infty, \quad \text{отсюда} \quad \alpha_0 = -45^0$$

Величины главных напряжений определяем по:

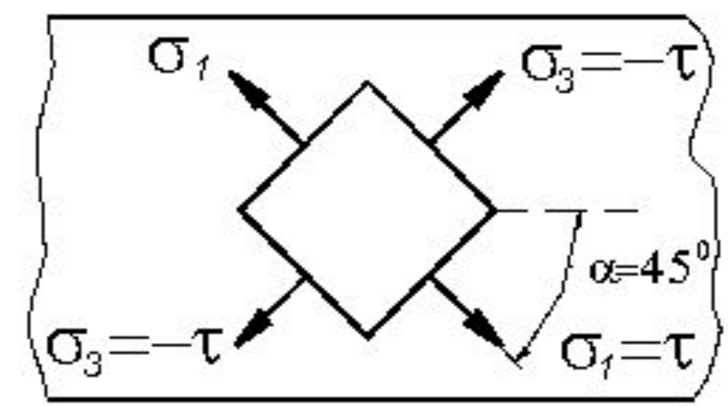
$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} =$$

$$= \pm\tau = \pm 53{,}94 \text{ МПа};$$

$$\sigma_1 = 53{,}94 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3 = -53{,}94 \text{ МПа}$$

г)



4. Проверяем прочность вала по 1-й теории прочности, наибольшее растягивающее напряжение не должно превышать допускаемое напряжение при растяжении: $\sigma_{экв_1} = \sigma_1 = 53{,}94 \le [\sigma]_p = 60 \text{ МПа},$

следовательно, по 1-й теории прочности материал вала удовлетворяет условиям прочности.

Проверяем прочность вала по 2-й теории прочности, наибольшая растягивающая деформация не должно превышать допускаемую линейную деформацию: $\varepsilon_1 \le [\varepsilon]$

$$\sigma_{экв_2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = 53{,}94 - 0{,}15 \cdot (-53{,}94) = 62{,}03 \ \text{ МПа} > [\sigma]_р$$

следовательно, по 2-й теории прочности материал вала не удовлетворяет условиям прочности.

5. Трещины в вале появятся от действия растягивающих напряжений σ_1, *следовательно, направления трещин будут перпендикулярными к направлению* σ_1 *т.е. под углом* 45^0 *к оси вала.*