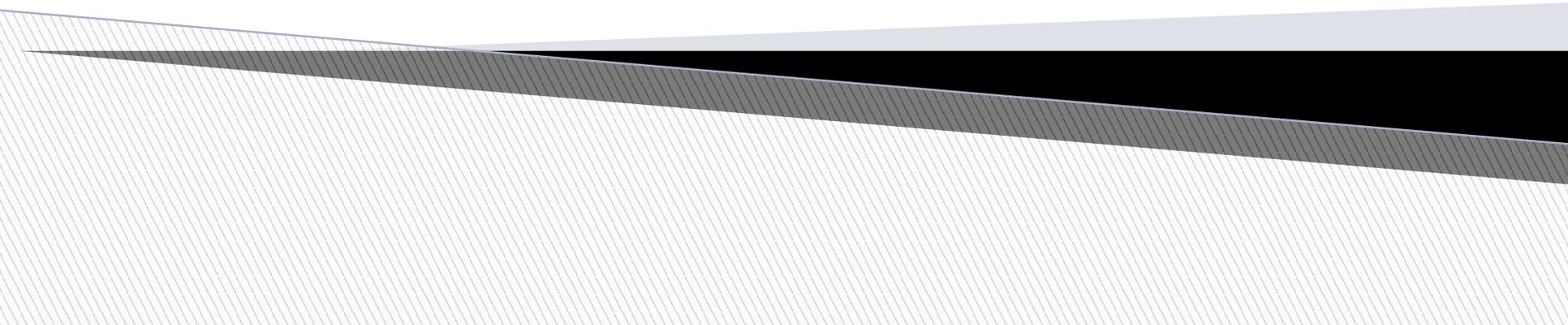
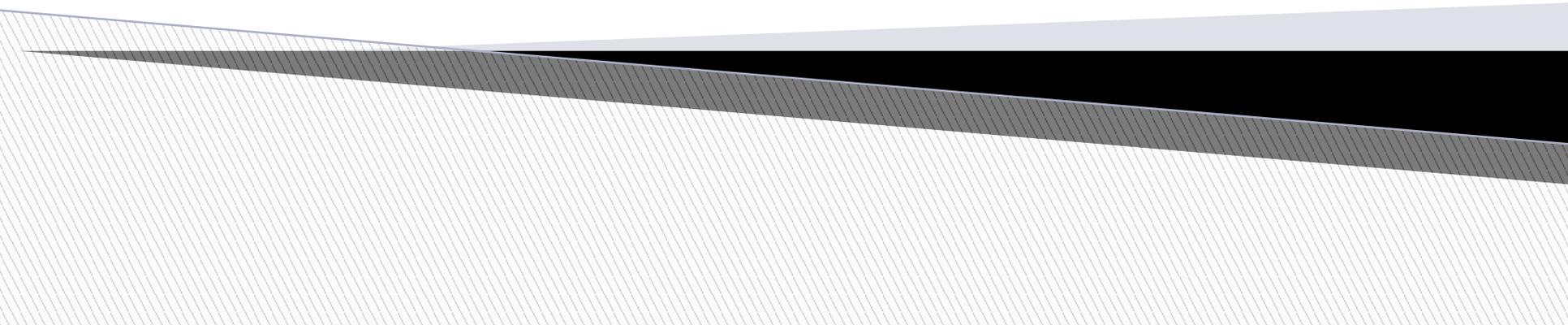


*ФГАОУ ВПО «Северо-Восточный федеральный университет им. М.К.
Аммосова»
Инженерно-технический институт
Кафедра прикладной механики*

**Решение задач
по дисциплине «Техническая механика»
270800 - Строительство**



**НАПРЯЖЕННОЕ И
ДЕФОРМИРОВАННОЕ
СОСТОЯНИЕ ЭЛЕМЕНТА В
ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ**

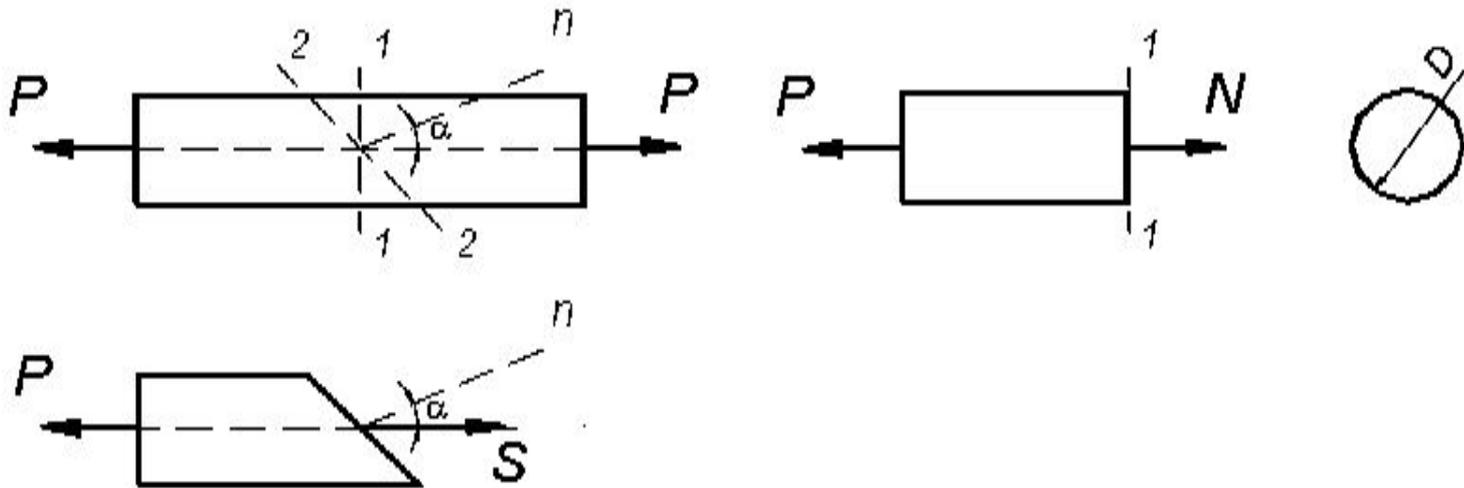


Задача 1

Стержень диаметром 75 мм растянут силами 350 кН.

Требуется:

- Определить полное напряжение в поперечном сечении;
- Определить полное, нормальное и касательное напряжения в сечении с нормалью, наклоненной под углом 15° к оси стержня;
- Определить, в каком сечении касательные напряжения достигают своего максимума, и вычислить их величины.



Решение:

1. Рассматривая равновесие отсеченной части сечением 1-1 части, определяем внутреннее усилие N :

$$\sum Z = N - P = 0, \quad N = P = 350 \text{ кН.}$$

Определяем полное напряжение в поперечном сечении 1-1, которое равно нормальному напряжению:

$$p_{1-1} = \sigma = \frac{N}{A} = \frac{4 \cdot 350 \text{ кН}}{3,14 \cdot 7,5^2} = 7,93 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Из равновесия отсеченной части сечением 2-2 определяем внутреннее усилие S :

$$\sum Z = S - P = 0, \quad S = P = 350 \text{ кН.}$$

2. Выразим площадь сечения 2-2 через площадь поперечного сечения стержня A :

$$A_\alpha = \frac{A}{\cos 15^\circ}$$

Полное напряжение в сечении 2-2:

$$p_\alpha = \frac{S}{A_\alpha} = \frac{P}{A} \cdot \cos 15^\circ = \sigma \cdot \cos 15^\circ = 7,66 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Нормальное напряжение в сечении 2-2:

$$\sigma_{\alpha} = p_{\alpha} \cdot \cos 15^{\circ} = \sigma \cdot \cos^2 15^{\circ} = 7,4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Касательное напряжение в сечении 2-2:

$$\tau_{\alpha} = p_{\alpha} \cdot \sin 15^{\circ} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin(2 \cdot 15^{\circ}) = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 30^{\circ} = 1,98 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

3. Из
$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

видно, что касательные напряжения своего максимального значения достигают в сечении, наклоненном под углом 45° к оси стержня:

$$\tau_{\max} = \frac{7,93}{2} \cdot \sin 90^{\circ} = 3,965 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

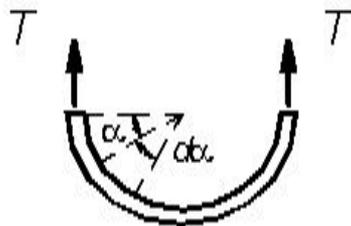
Задача 2

В котле с внутренним диаметром $D=800$ мм, длиной $l=1,6$ м и толщиной стенки $t=10$ мм создается внутреннее давление, равное $p=12$ атм $=12 \cdot 10^5$ Па.

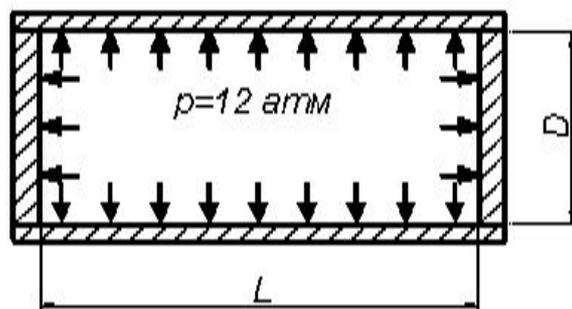
Требуется:

- Определить напряжения, возникающие в стенке котла в поперечном и продольном сечениях;
- Определить возникающие напряжения в сечении под углом 30° к образующей стенки котла;
- Проверить прочность котла по 3-й и 4-й теориям прочности, если $[\sigma]=180$ МПа.

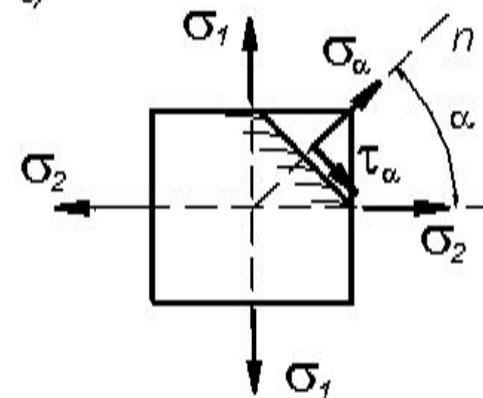
а)



б)



в)



Решение:

1. Стенка котла от действия внутреннего давления подвержена плоскому напряженному состоянию.

Нормальные напряжения в поперечном сечении котла определяются из:

$$\sigma_2 = \frac{Q}{A_1} = \frac{p \cdot \pi \cdot D^2}{4 \cdot \pi \cdot D \cdot t} = \frac{p \cdot D}{4 \cdot t} = \frac{12 \cdot 10^5 \cdot 0,8}{4 \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 2,4 \cdot 10^7 \text{ Па} = 24 \text{ МПа},$$

где $Q = \frac{p \cdot \pi D^2}{4}$ – растягивающие усилия стенки котла от давления торцевой части;

$A_1 = \pi \cdot D \cdot t$ – поперечное сечение стенки котла.

Нормальные напряжения в сечении вдоль образующей стенки котла, вызванные тангенциальными усилиями, определяются:

$$\sigma_1 = \frac{T}{A_2} = \frac{p \cdot D}{2 \cdot t} = \frac{12 \cdot 10^5 \cdot 0,8}{2 \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 4,8 \cdot 10^7 \text{ Па} = 48 \text{ МПа},$$

где $A_2 = l \cdot t$, $T = p \cdot D \cdot l$ - тангенциальное усилие, которое получается из

$$\sum Y = 2T - \int_0^{S/2} pl \cdot \sin \alpha \cdot dS = 0 \quad dS = R \cdot d\alpha, \quad S = \pi D$$

2. Нормальные и касательные напряжения в сечении под углом 30° к образующей определяем:

$$\sigma_\alpha = \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha = 24 \cdot 0,75 + 48 \cdot 0,25 = 30 \text{ МПа},$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha = \frac{48 - 24}{2} \cdot \sin 60^\circ = 10,4 \text{ МПа}.$$

3. Проверка прочности стенки котла:

• по 3-й теории прочности (по наибольшим касательным напряжениям):

$$\sigma_{\text{экв}_3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 48 - 0 = 48 \text{ МПа} < 180 \text{ МПа}$$

• по 4-й теории прочности (энергетической теории прочности):

$$\sigma_{\text{экв}_4} = \sqrt{\left\{ \left[\frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \right\}} =$$

$$= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} = \sqrt{48^2 + 24^2 - 48 \cdot 24} = 41,57 \text{ МПа} < 180 \text{ МПа}$$

Материал стенки котла по 3-й и 4-й теориям отвечает условиям прочности.

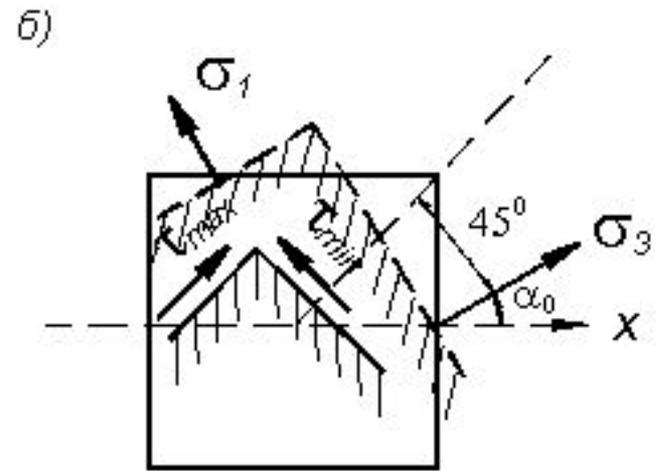
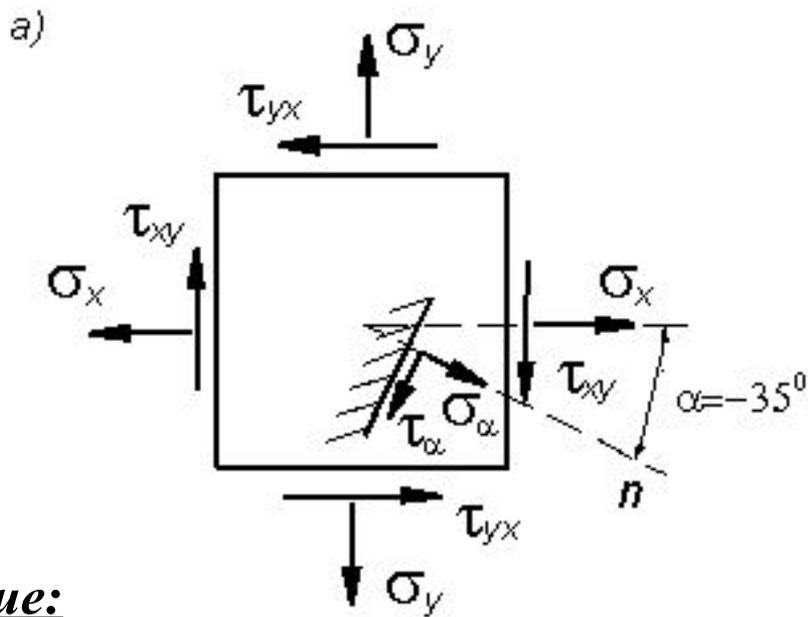
Задача 3

В элементе конструкции, подверженному плоскому напряженному состоянию, в окрестности некоторой точки действуют напряжения:

$$\sigma_x = -140 \text{ МПа}, \quad \sigma_y = 80 \text{ МПа}, \quad \tau_{xy} = 60 \text{ МПа}.$$

Требуется определить:

- напряжения на площадке под углом (-35°) к площадке с нормалью X;
- положение главной площадки и вычислить значения главных напряжений;
- значения главных напряжений, как экстремальные значения нормальных напряжений, и сравнить с результатами п.2;
- величины максимальных касательных напряжений и показать площадку их действия;
- наибольшие относительные линейные деформации элемента в окрестности рассматриваемой точки, если $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\mu = 0,25$;
- величину удельной потенциальной энергии упругой деформации элемента;
- относительное изменение объема в окрестности, рассматриваемой точки;
- Проверить прочность материала элемента по 3-й и 4-й теориям прочности, если $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$.



Решение:

- Напряжения на площадке под углом (-35^0) (от оси X по ходу часовой стрелки) (рис.а) вычисляем:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_y \cdot \sin^2 \alpha - \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha = \\ &= -140 \cdot \cos^2(-35^0) + 80 \cdot \sin^2(-35^0) - 60 \cdot \sin(-2 \cdot 35^0) = -11,24 \text{ МПа,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha = \\ &= \frac{-140 - 80}{2} \cdot \sin(-2 \cdot 35^0) + 60 \cdot \cos(-2 \cdot 35^0) = 123,89 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

- Главная площадка лежит под углом α_0 к площадке с нормалью X :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot 60}{-140 - 80} = 0,545,$$

$$2\alpha_0 = \operatorname{arctg} 0,545 = 28,59^\circ, \quad \alpha_0 = 14,3^\circ.$$

Угол α_0 откладываем против хода часовой стрелки от оси X , т.к. $\alpha_0 > 0$.

Величины главных напряжений вычисляем:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha_0} &= \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha_0 + \sigma_y \cdot \sin^2 \alpha_0 - \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha_0 = \\ &= -140 \cdot \cos^2 14,3^\circ + 80 \cdot \sin^2 14,3^\circ - 60 \cdot \sin 28,6^\circ = -155,3 \text{ МПа} = \sigma_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{(\alpha_0+90)} &= \sigma_x \cdot \sin^2 \alpha_0 + \sigma_y \cdot \cos^2 \alpha_0 + \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha_0 = \\ &= -140 \cdot 0,061 + 80 \cdot 0,94 + 60 \cdot 0,479 = 95,3 \text{ МПа} = \sigma_1. \end{aligned}$$

- Значение главных напряжений вычисляем, как экстремальные значения нормальных напряжений в окрестности рассматриваемой точки:

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{-140 + 80}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-140 - 80)^2 + 4 \cdot 60^2} = -30 \pm 125,3;$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = 95,3 \text{ МПа}, \quad \sigma_{\min} = -155,3 \text{ МПа}.$$

Сравнивая с результатами пункта 2, заключаем, что значения главных напряжений и положения главных площадок вычислены верно.

- Величины максимальных касательных напряжений вычисляем:

$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \pm \frac{95,3 - (-155,3)}{2} = \pm 125,3 \text{ МПа},$$

ИЛИ

$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-140 - 80)^2 + 4 \cdot 60^2} = \pm 125,3 \text{ МПа}.$$

Площадки их действия лежат под углом 45° к направлению главных площадок или от оси X на $\beta = 45^\circ + \alpha_0 = 59,3^\circ$.

- Наибольшие относительные линейные деформации вычисляем по формулам обобщенного закона Гука, направления их совпадают с направлениями главных напряжений:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)) = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} (95,3 - 0,25(-155,3)) = 63,87 \cdot 10^{-5},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)) = -\frac{0,25}{2,1 \cdot 10^5} (95,3 - 155,3) = 7,14 \cdot 10^{-5},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} (\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)) = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} (-155,3 - 0,25 \cdot 95,3) = -85,3 \cdot 10^{-5}.$$

- Удельная потенциальная энергия упругой деформации равна:

$$u = \frac{\sigma_1 \cdot \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \cdot \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \cdot \varepsilon_3}{2} = \frac{95,3 \cdot 63,87 \cdot 10^{-5}}{2} + \frac{(-155,3) \cdot (-85,3 \cdot 10^{-5})}{2} =$$

$$= 9666,95 \cdot 10^{-5} \frac{\text{МДж}}{\text{м}^3}.$$

- Относительное изменение объема в окрестности рассматриваемой точки будет:

$$\theta = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 63,87 \cdot 10^{-5} + 7,14 \cdot 10^{-5} - 85,3 \cdot 10^{-5} = -14,25 \cdot 10^{-5},$$

знак «-» показывает, что объем элемента уменьшается.

- Проверяем прочность материала:

- по 3-й теории прочности:

$$\sigma_{\text{экв}_3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 95,3 - (-155,3) = 250,3 \text{ МПа};$$

- по 4-й теории прочности:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{экв}_4} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} = \sqrt{95,3^2 + (-155,3)^2 - 95,3(-155,3)} = \\ &= 219,09 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

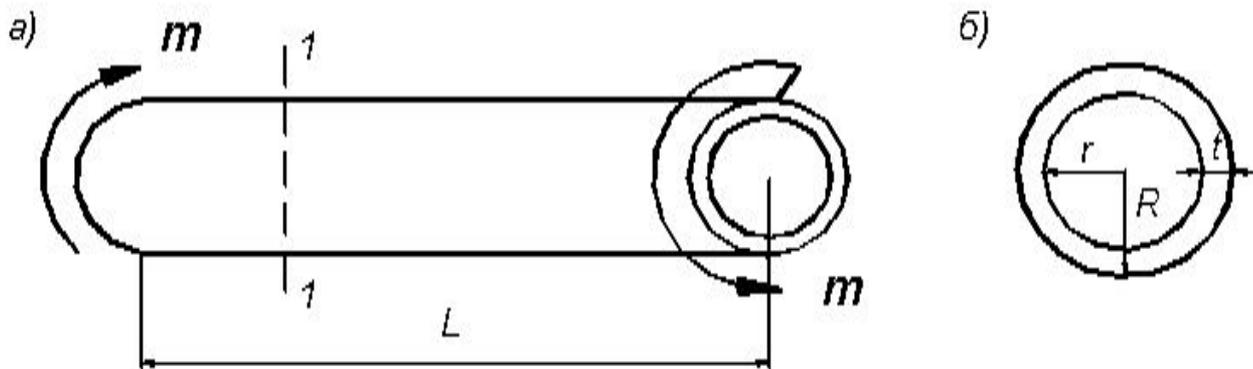
Прочность материала по 3-й и 4-й теориям прочности не удовлетворяет условиям прочности, так как допускаемое напряжение для материала элемента конструкции равно $[\sigma]=180$ МПа.

Задача 4

На вал (рис., а) кольцевого сечения с радиусами $R=10$ см и $r=8$ см действуют две пары сил противоположного направления с моментами $m=50$ кН·м на площадках, перпендикулярных к оси стержня.

Требуется:

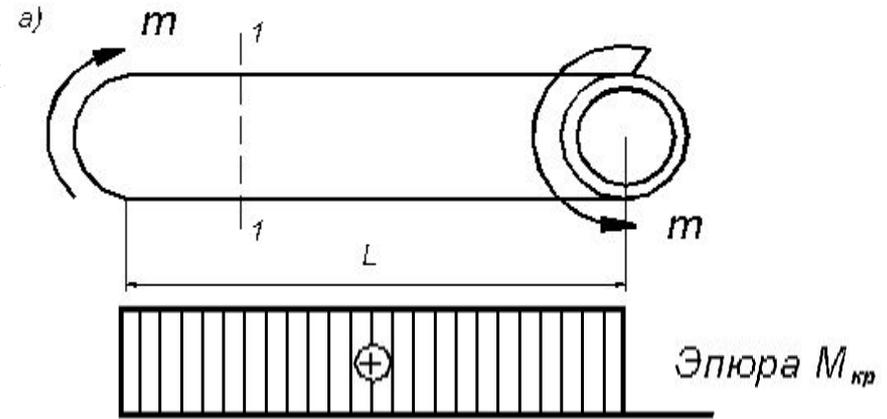
- Построить эпюру крутящих моментов M_k ;
- Определить касательные напряжения в поперечном сечении вала от действия крутящего момента;
- Определить положение главных площадок и действующие на них главные напряжения;
- Проверить условие прочности по 1-й и 2-й теориям прочности, если $[\sigma]_p=60$ МПа, $\mu=0,15$;
- Показать направление возможного раскрытия трещин.



Решение:

1. Из условия равновесия отсеченной части вала определяем крутящий момент и строим эпюру :

$$\sum m_z = M_k - m = 0; \quad M_k = m = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}$$



2. Максимальные касательные напряжения в трубе от действия крутящего момента определяем по:

$$\tau = \frac{M_{кр} \cdot \rho_{\max}}{I_{\rho}} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}} = \frac{M_{кр} \cdot 2}{\pi R^3 (1 - \alpha^4)} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot 2}{3,14 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} (1 - 0,8^4)} = 53,94 \text{ МПа.}$$

Так как в поперечном сечении вала возникают только касательные напряжения, то вал испытывает деформацию чистого сдвига.

3. Положение главных площадок на наружной площадке трубы определяем по:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2\tau}{0 - 0} = -\infty, \quad \text{отсюда} \quad \alpha_0 = -45^0$$

Величины главных напряжений определяем по:

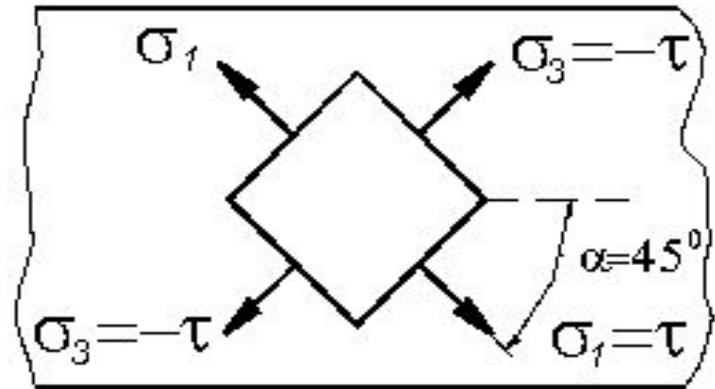
$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} =$$

$$= \pm \tau = \pm 53,94 \text{ МПа};$$

$$\sigma_1 = 53,94 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3 = -53,94 \text{ МПа}$$

е)



4. Проверяем прочность вала по 1-й теории прочности, наибольшее растягивающее напряжение не должно превышать допускаемое напряжение при растяжении:

$$\sigma_{\text{экв}_1} = \sigma_1 = 53,94 \leq [\sigma]_p = 60 \text{ МПа},$$

следовательно, по 1-й теории прочности материал вала удовлетворяет условиям прочности.

Проверяем прочность вала по 2-й теории прочности, наибольшая растягивающая деформация не должно превышать допускаемую линейную деформацию: $\varepsilon_1 \leq [\varepsilon]$

$$\sigma_{\text{экв}_2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = 53,94 - 0,15 \cdot (-53,94) = 62,03 \text{ МПа} > [\sigma]_p$$

следовательно, по 2-й теории прочности материал вала не удовлетворяет условиям прочности.

5. Трещины в вале появятся от действия растягивающих напряжений σ_1 , следовательно, направления трещин будут перпендикулярными к направлению σ_1 т.е. под углом 45° к оси вала.

