ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Классическое определение вероятности.

Как было сказано выше, при большом числе *n* испытаний частота $P^*(A)=m/n$ появления события *A* обладает устойчивостью и дает приближенное значение вероятности события *A*, т.е. .

$$P(A) \approx P^*(A)$$

Это обстоятельство позволяет находить приближенно вероятность события опытным путем. Практически такой способ нахождения вероятности события не всегда удобен. В ряде случаев вероятность события удается определить до опыта с помощью понятия равновероятности событий (или равновозможности).

Два события называются *равновероятными* (или *равновозможными*), если нет никаких объективных причин считать, что одно из них может наступить чаще, чем другое.

Так, например, появления герба или надписи при бросании монеты представляют собой равновероятные события.

Рассмотрим другой пример. Пусть бросают игральную кость. В силу симметрии кубика можно считать, что появление любой из цифр 1, 2, 3, 4, 5 или 6 одинаково возможно (равновероятно).

События $E1$,$E2$, ..., EN в данном опыте образуют *полную группу*, если в результате опыта должно произойти хотя бы одно из них.

Так, в последнем примере полная группа событий состоит из шести событий — появлений цифр 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

Очевидно, любое событие *A* и противоположное ему событие образуют полную группу.

Событие *B* называется *благоприятствующим* событию *A*, если наступление события *B* влечет за собой наступление события *A*.

Так, если *A* — появление четного числа очков при бросании игральной кости, то появление цифры 4 представляет собой событие, благоприятствующее событию *A*.

Пусть события *E1*,*E2*, ..., *EN* в данном опыте образуют полную группу равновероятных и попарно несовместных событий. Будем называть их *исходами* испытания. Предположим, что событию *A* благоприятствуют *M* исходов испытания. Тогда вероятностью события *A* в данном опыте называют отношение *M/N*. Итак, мы приходим к следующему определению.

Вероятностью P(A) события в данном опыте называется отношение числа M исходов опыта, благоприятствующих событию A, к общему числу N возможных исходов опыта, образующих полную группу равновероятных попарно несовместных событий:

$$P(A) = \frac{M}{N}$$

Это определение вероятности часто называют *классическим*. Можно показать, что классическое определение удовлетворяет аксиомам вероятности.

Пример 1. На завод привезли партию из 1000 подшипников. Случайно в эту партию попало 30 подшипников, не удовлетворяющих стандарту. Определить вероятность P(A) того, что взятый наудачу подшипник окажется стандартным.

Решение:

Решение: Число стандартных подшипников равно 1000—30=970. Будем считать, что каждый подшипник имеет одинаковую вероятность быть выбранным. Тогда полная группа событий состоит из N=1000 равновероятных исходов, из которых событию A благоприятствуют M=970 исходов. Поэтому P(A)=M/N=970/1000=0.97

Пример 2. В урне 10 шаров: 3 белых и 7 черных. Из урны вынимают сразу два шара. Какова вероятность *p* того, что оба шара окажутся белыми?

Решение: Число *N* всех равновероятных исходов испытания равно числу способов, которыми можно из 10 шаров вынуть два, т. е. числу сочетаний из 10 элементов по 2:

$$N = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45$$

Число благоприятствующих исходов:

$$M = C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$$

Следовательно, искомая вероятность

$$p = \frac{M}{N} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$$

Пример 3. В урне 2 зеленых, 7 красных, 5 коричневых и 10 белых шаров. Какова вероятность появления цветного шара?

Решение: Находим соответственно вероятности появления зеленого, красного и коричневого шаров: *P(зел.)=2/24*; *P(кр.)=7/24*; *P(кор.)=5/24*.

Так как рассматриваемые события, очевидно, несовместны, то, применяя аксиому сложения, найдем вероятность появления цветного шара:

$$P(цв.) = P(зел.) + P(кр.) + P(кор.) = \frac{2}{24} + \frac{7}{24} + \frac{5}{24} = \frac{7}{12}$$

Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей.

Во многих задачах приходится находить вероятность совмещения событий *A* и *B*, если известны вероятности событий *A* и *B*.

Рассмотрим следующий пример. Пусть брошены две монеты. Найдем вероятность появления двух гербов. Мы имеем 4 равновероятных попарно несовместных исхода, образующих полную группу:

	1-я монета	**2-я монета**
1-й исход	герб	герб
2-й исход	герб	надпись
3-й исход	надпись	герб
4-й исход	надпись	надпись

Таким образом, *P(герб,герб)=1/4*.

Пусть теперь нам стало известно, что на первой монете выпал герб. Как изменится после этого вероятность того, что герб появится на обеих монетах? Так как на первой монете выпал герб, то теперь полная группа состоит из двух равновероятных несовместных исходов:

	1-я монета	**2-я монета**
1-й исход	герб	герб
2-й исход	герб	надпись

При этом только один из исходов благоприятствует событию (герб, герб). Поэтому при сделанных предположениях *P(герб,герб)=1/2*.

Обозначим через *A* появление двух гербов, а через *B* — появление герба на первой монете. Мы видим, что вероятность события *A* изменилась, когда стало известно, что событие *B* произошло.

Новую вероятность события *A*, в предположении, что произошло событие *B*, будем обозначать $P_{B(A)}$. Таким образом, $P(A)=1/4$; $P_{B(A)}=1/2$

Теорема умножения. *Вероятность совмещения событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие осуществилось, т. е.*

P(AB)=P(A)PA(B) (4)

Введем теперь следующее определение.

Два события A и B называются *независимыми*, если предположение о том, что произошло одно из них, не изменяет вероятность другого, т. е. если

$P_B(A) = P(A)$ и $P_A(B) = P(B)$

Пусть, например, событие A — появление герба при однократном бросании монеты, а событие B — появление карты бубновой масти при вынимании карты из колоды. Очевидно, что события A и B независимы.

В случае независимости событий A к B формула (4) примет более простой вид:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

т. е. вероятность совмещения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Исходя из этого определения, в случае независимости событий *A1, A2, ..., An* между собой в совокупности имеем

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n) \quad (5)$$

Пример 1.Какова вероятность того, что при десятикратном бросании монеты герб выпадет 10 раз ?

Решение: Пусть событие *Ai* — появление герба при *i*-м бросании. Искомая вероятность есть вероятность совмещения всех событий *Ai (i=1,2,3,...,10)*, а так как они, очевидно, независимы в совокупности, то применяя формулу (5), имеем

$$P(A_1A_2\ldots A_{10}) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_{10})$$

Но *P(Ai)=1/2* для любого *i*; поэтому

$$P(A_1A_2\ldots A_{10}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} \approx 0{,}001$$

Пример 2. Рабочий обслуживает три станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, для первого станка равна 0,9, для второго — 0,8, для третьего — 0,7. Найти: 1) вероятность р того, что в течение часа ни один из трех станков не потребует внимания рабочего; 2) вероятность того, что в течение часа по крайней мере один из станков не потребует внимания рабочего.

Решение: 1) Искомую вероятность р находим по формуле (5): $p = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504$

2) Вероятность того, что в течение часа станок потребует внимания рабочего для первого станка равна *1—0,9=0,1*, для второго и для третьего станков она соответственно равна *1—0,8=0,2* и *1—0,7=0,3*. Тогда вероятность того, что в течение часа все три станка потребуют внимания рабочего, на основании формулы (5) составляет $0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}006$

Событие *A*, заключающееся в том, что в течение часа все три станка потребуют внимания рабочего, противоположно событию $\overline{A}$, состоящему в том, что по крайней мере один из станков не потребует внимания рабочего. Поэтому по формуле (3) получаем

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}006 = 0{,}994$$