Тема 2 «Дифференциальное исчисление функций одного переменного и его приложения»

Лекция № 3

«Выпуклость и точки перегиба графика функции. Асимптоты»

Учебные вопросы:

1. Выпуклость графика функции. Достаточное условие выпуклости графика функции .
2. Точки перегиба графика функции. Необходимое и достаточное условия точки перегиба графика функции .
3. Асимптоты графика функции .

Цели занятия:

Введение понятий выпуклой кривой, точки перегиба кривой, критической точки функции по второй производной, асимптот кривой. Рассмотрение достаточного условия выпуклости кривой, необходимого и достаточного условий существования точки перегиба, необходимого и достаточного условий существования невертикальной асимптоты.

Межпредметные связи

Выпуклость и перегиб графика функции. Асимптоты.

Основы криптографической защиты информации
Защита инфокоммуникационных систем специального назначения (сп. 2.2, 2.4)
Технические комплексы и средства шифрования информации (сп. 3.3, 3.5)
(кафедра 11)

Квантовая и оптическая электроника (кафедра 12)

Техническое обеспечение связи и автоматизации (кафедра 23)

Системы и комплексы специальной связи (только для сп. 3.3, 3.5) (кафедры 12, 13, 21, 34)

Сети и системы передачи информации (только для сп. 2.2, 2.4) (кафедра 41)

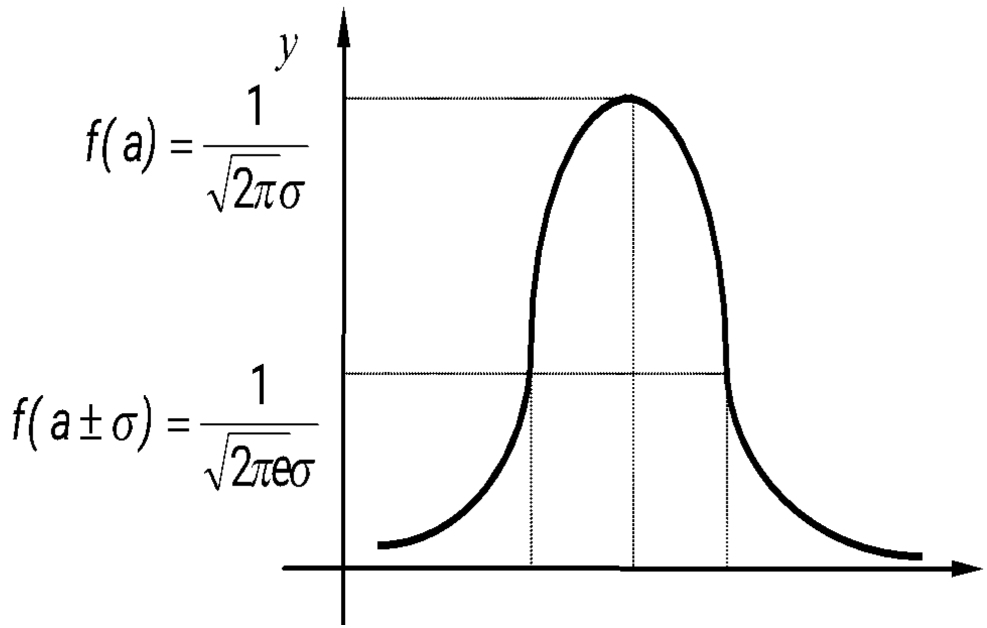
Теория электрических цепей
Теория электрической связи
Теория информации и кодирования
Цифровая обработка сигналов (сп. 3.3, 3.5)
(кафедра 43)

Физика
(кафедра 42)

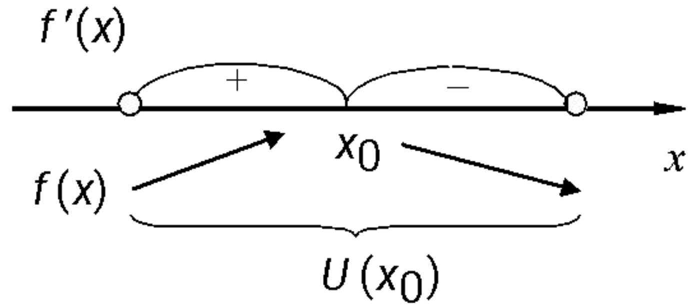
Криптографические методы защиты информации
Математические основы информационной безопасности
(сп. 3.3, 3.5)
(кафедра 33)

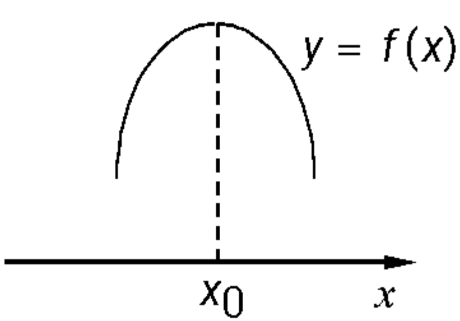
Нормальный закон распределения

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

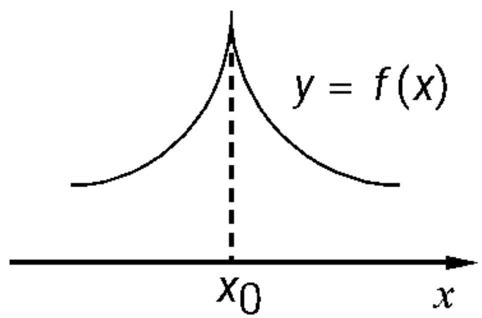


Если x_0 - точка максимума

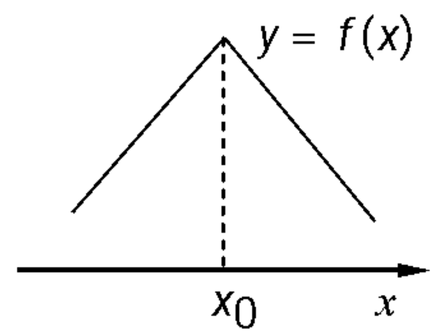




$f'(x_0) = 0$



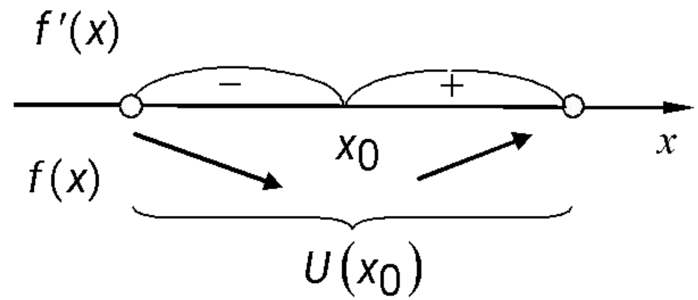
$f'(x_0) = \infty$

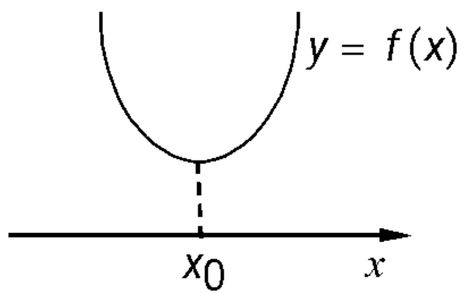


$f'(x_0)$ не существует

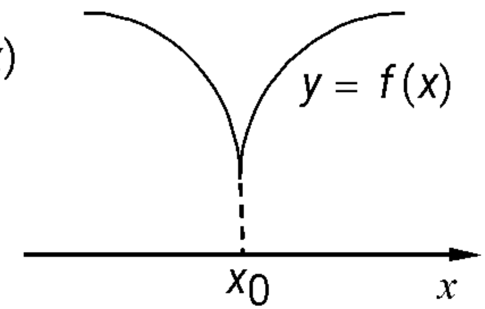
x_0 – точка максимума функции $f(x)$

Если x_0 - точка минимума

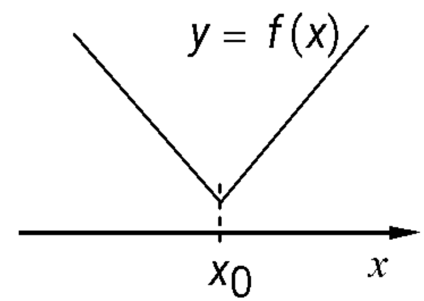




$f'(x_0) = 0$

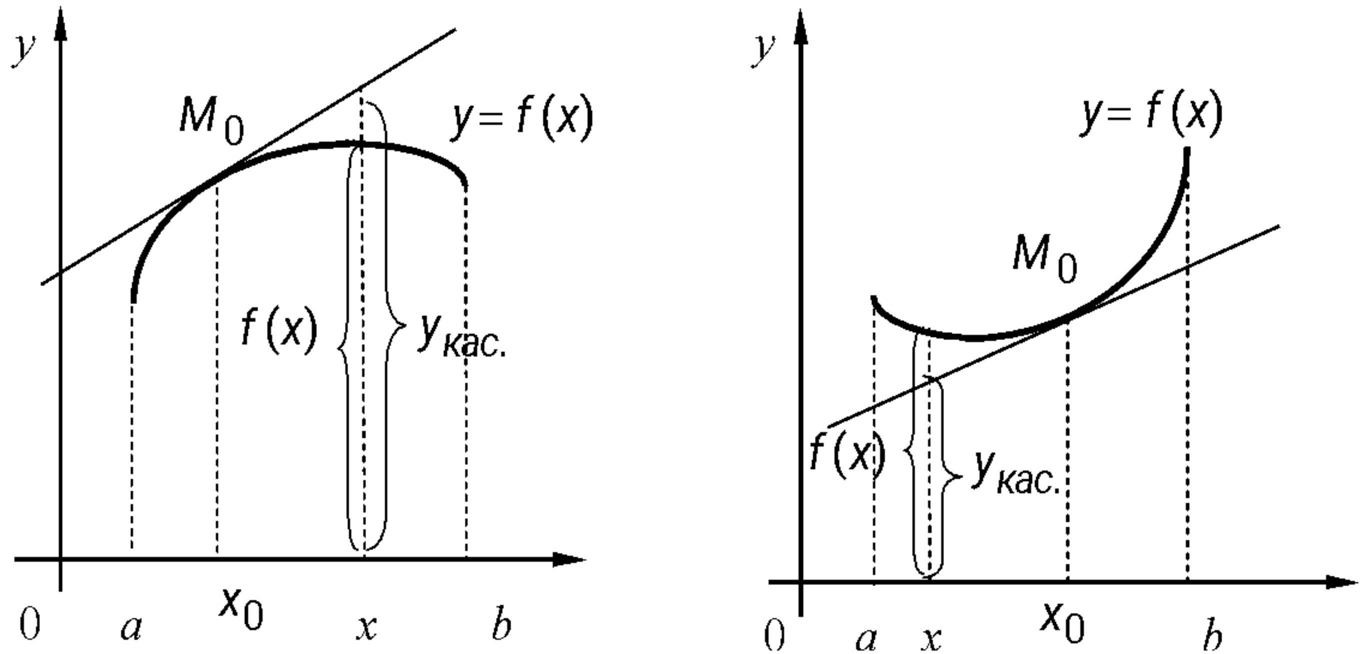


$f'(x_0) = \infty$



$f'(x_0)$ не существует

x_0 – точка минимума функции $f(x)$



$y = f(x)$ – выпуклая вверх кривая $y = f(x)$ – выпуклая вниз кривая

Рис. 1

Теорема 1 *(достаточное условие выпуклости графика функции):*

- Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a; b)$.

1) Если $f''(x) < 0$ в любой точке $x \in (a; b)$ то график функции $f(x)$ выпуклый вверх на $(a; b)$.
2) Если $f''(x) > 0$ в любой точке $x \in (a; b)$ то график функции $f(x)$ выпуклый вниз на $(a; b)$.

Правило "дождя"

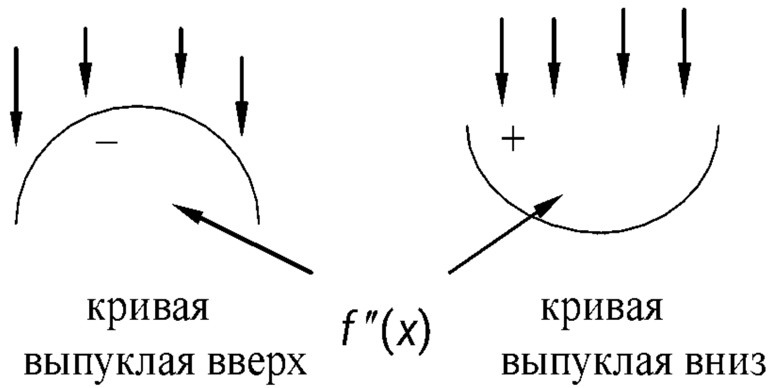


Рис. 2

Точки перегиба графика функции

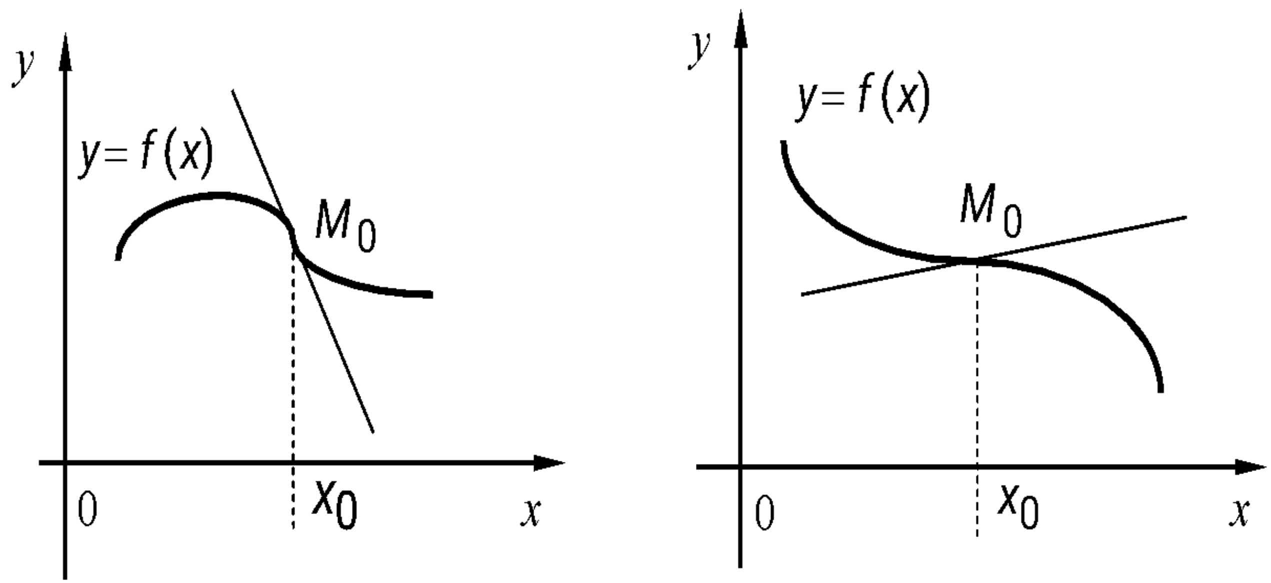


Рис.3

Угловые точки графика функции

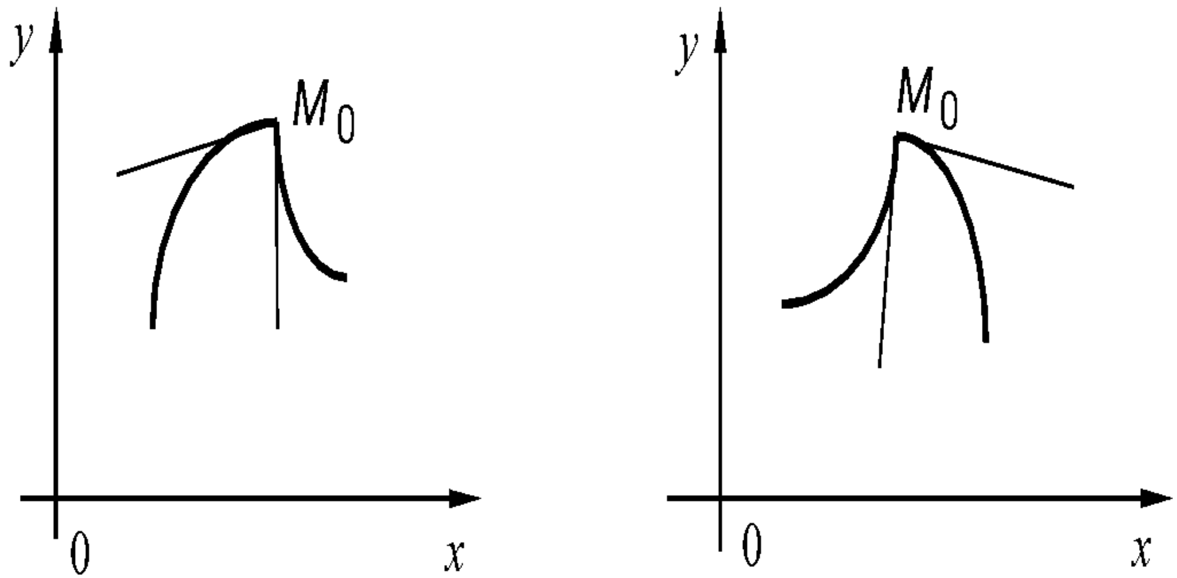


Рис.4

Теорема 2 *(необходимое условие существования точки перегиба графика функции):*

Пусть $M_0(x_0; f(x_0))$ – точка перегиба графика функции $f(x)$, и пусть в точке x_0 существует непрерывная вторая производная функции. Тогда $f''(x_0) = 0$

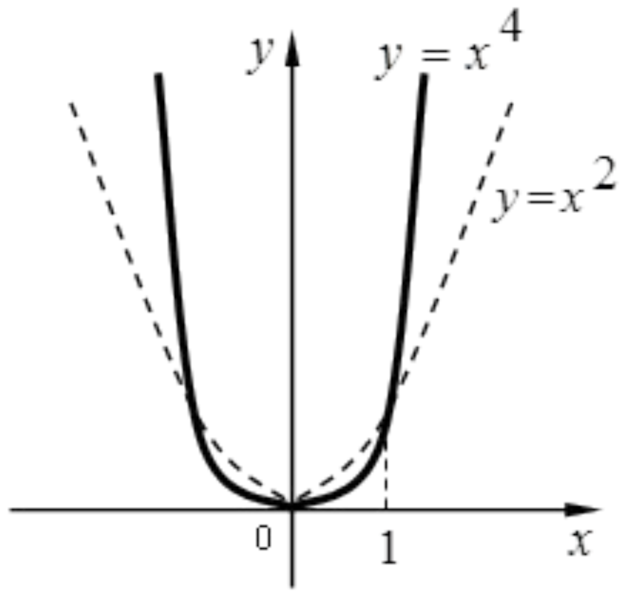


Рис. 5

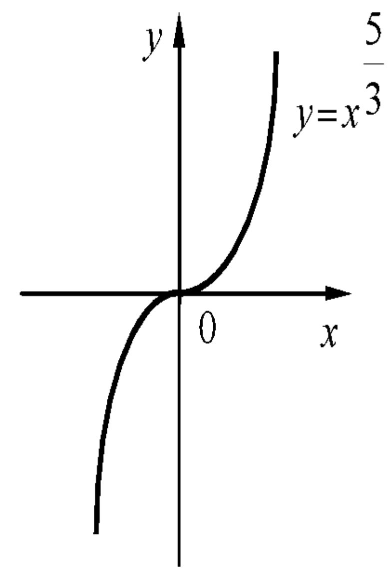
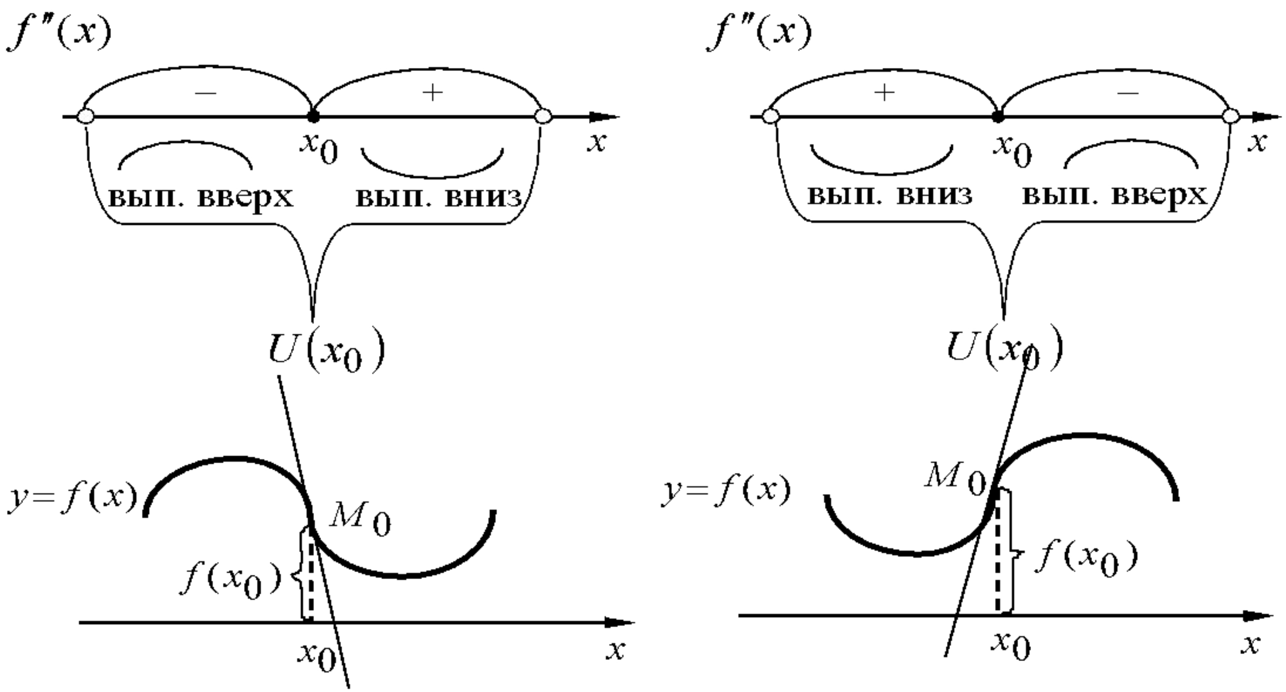


Рис.6

Теорема 3 *(достаточное условие существования точки перегиба графика функции):*

- Пусть x_0 - критическая точка функции $f(x)$ по второй производной и пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности $U(x_0)$ точки x_0, за исключением, быть может, самой этой точки. Тогда, если при переходе аргумента слева направо через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ в рассматриваемой окрестности меняет знак, то точка $M_0(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $f(x)$.

Схематическая запись доказательства теоремы 3



$M_0\left(x_0; f(x_0)\right)$ – точка перегиба

Рис. 7

Алгоритм исследования графика функции на выпуклость и перегиб

1. Находим область непрерывности функции.

2. Находим первую производную функции.

3. Находим вторую производную функции.

4. Находим критические точки функции по второй производной.

5. Наносим на числовую ось область непрерывности и критические точки функции по второй производной. Определяем знак второй производной на полученных промежутках. Указываем промежутки выпуклости вверх и вниз графика функции и абсциссы точек перегиба (если они есть).

6. Вычисляем ординаты точек перегиба графика функции и записываем точки перегиба.

График функции $y = xe^{-x}$

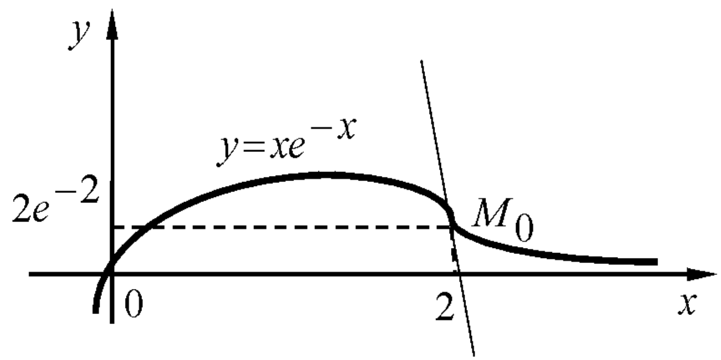
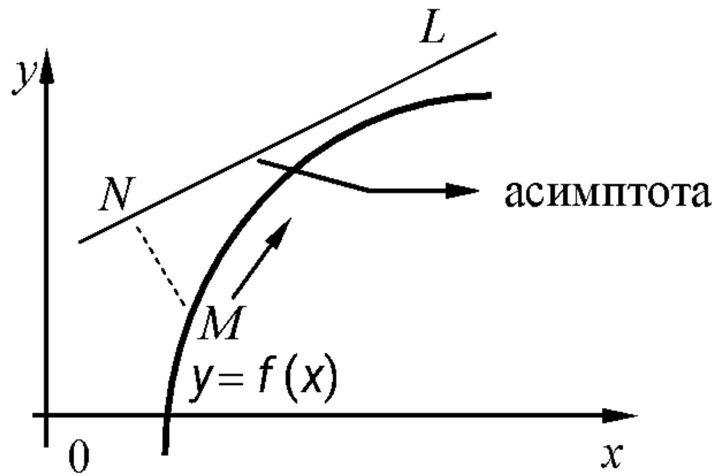


Рис. 8



$$|MN| \to 0 \text{ при } M \to \infty$$

Рис.9

Теорема 4 *(необходимое и достаточное условия существования невертикальной асимптоты графика функции*

Для того чтобы прямая $y = kx + b$ была двухсторонней невертикальной асимптотой графика функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$$

Пример

- Найдите асимптоты графика функции

$$y = \frac{x^2}{x-2}$$

1. $D(f) = (-\infty,\ 2) \cup (2,\ +\infty)$ – область непрерывности функции.

2. $x = 2$ – точка разрыва.

3. $\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{x^2}{x-2} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{x^2}{x-2} = +\infty$.

Следовательно, $x = 2$ – точка двухстороннего бесконечного разрыва функции.

4. $x = 2$ – уравнение двухсторонней вертикальной асимптоты.

5. $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{x-2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 1$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x-2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 2.$$

6. $y = x + 2$ – уравнение двухсторонней невертикальной асимптоты.

График функции $y = \frac{x^2}{x-2}$

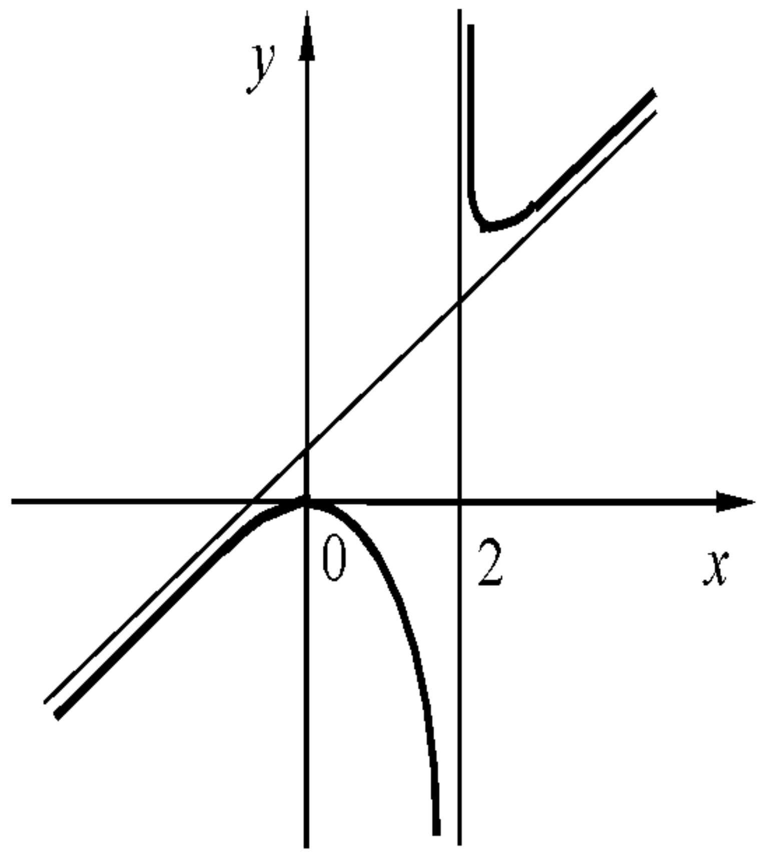


Рис. 11

Список литературы:

1. Радыгин В.М., Проскурякова Л.К. Математика. Часть 2. – Орел: Академия ФСО России, 2008. – 191 с. Гл.3
2. Кириченко О.Е. Высшая математика. Часть 1. – Орел: Академия ФСО России, 2006. – 294. Гл. VI, § 20 п.п. 20.1 – 20.3