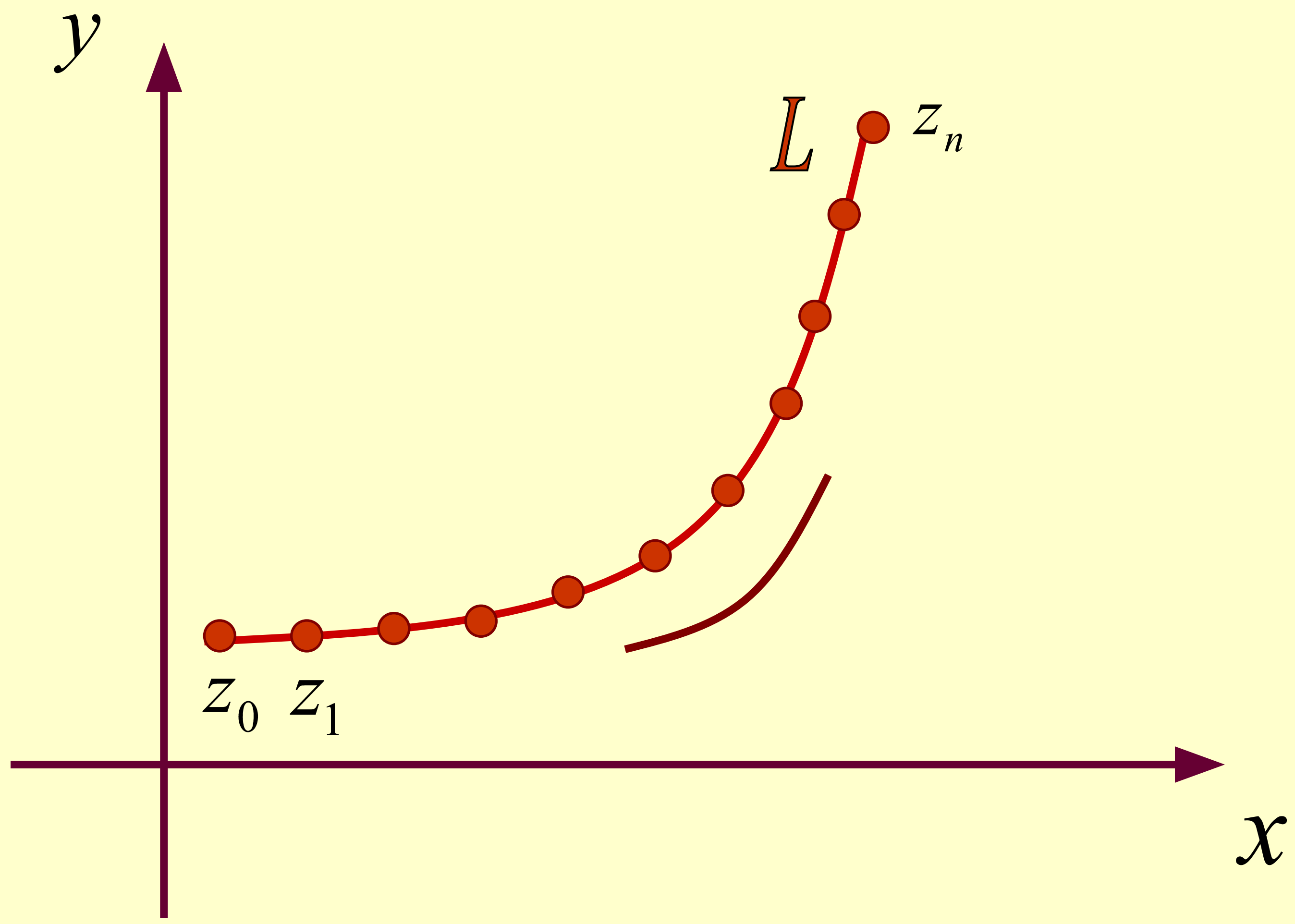
22.8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФКП

Пусть на комплексной плоскости z дана кривая L. Граничные точки этой кривой: z_0 и z_n (если кривая замкнутая, то $z_0=z_n$).

Установим положительное направление: от точки z_0 к z_n.

Предположим, что функция комплексного аргумента z непрерывна во всех точках этой кривой.

Разобьем кривую точками на элементарные дуги.



y
L
z_n
z_0
z_1
x

Обозначим

$$z_1 - z_0 = \Delta z_1 \quad z_2 - z_1 = \Delta z_2 \ \dots \ z_n - z_{n-1} = \Delta z_n$$

где число Δz_i изображается вектором, идущим из точки z_{i-1} в точку z_i.

$\left|\Delta z_i\right|$ **-длина этого вектора, т.е. хорда, стягивающая соответствующую элементарную дугу.**

Внутри каждой элементарной дуги выбираем произвольную точку ξ_i.

Составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta z_i$$

Данная сумма будет интегральной.

Предел этой суммы при стремлении к нулю длин всех дуг будет интегралом функции *f(z)* по кривой *L*:

$$\lim_{\Delta z_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta z_i = \int_L f(z)\,dz$$

Свойства интеграла ФКП

1

Интеграл от суммы (разности) двух или нескольких функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций:

$$\int_L \left(f_1(z) \pm f_2(z)\right)dz = \int_L f_1(z)dz \pm \int_L f_2(z)dz$$

2

Постоянную величину можно выносить за знак интеграла:

$$\int_L C \cdot f(z)dz = C \cdot \int_L f(z)dz$$

3

Если кривая L геометрически совпадает с кривой L1, но имеет противоположное направление, то:

$$\int_L f(z)dz = -\int_{L_1} f(z)dz$$

4

Если кривая разбита на дуги L1 L2 …Ln то:

$$\int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz + \ldots + \int_{L_n} f(z)dz$$

Вычисление интеграла ФКП сводится к вычислению криволинейного интеграла от функции действительного переменного.

Пусть

$$z = x + i \cdot y$$

$$f(z) = u + i \cdot v$$

$$u = u(x, y) \quad v = v(x, y)$$

Обозначим

$$z_i = x_i + i \cdot y_i \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

$$\xi_i = \varphi_i + i \cdot \psi_i \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

Тогда

$$\Delta z_i = (x_{i+1} + i \cdot y_{i+1}) - (x_i + i \cdot y_i) =$$

$$= (\underbrace{x_{i+1} - x_i}_{\Delta x_i}) + i \cdot (\underbrace{y_{i+1} - y_i}_{\Delta y_i}) = \Delta x_i + i \cdot \Delta y_i$$

Поскольку

$$f(\xi_i) = u(\varphi_i, \psi_i) + i \cdot v(\varphi_i, \psi_i)$$

$$\Downarrow$$

$$f(\xi_i)\cdot\Delta z_i=\big(u(\varphi_i,\psi_i)+i\cdot v(\varphi_i,\psi_i)\big)\cdot(\Delta x_i+i\cdot\Delta y_i)=$$

$$=u(\varphi_i,\psi_i)\cdot\Delta x_i-v(\varphi_i,\psi_i)\cdot\Delta y_i+$$

$$+i\cdot(u(\varphi_i,\psi_i)\cdot\Delta y_i+v(\varphi_i,\psi_i)\cdot\Delta x_i)$$

Переходим к пределу

$$\int_L f(z)dz=\lim_{z_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big[u(\varphi_i,\psi_i)\cdot\Delta x_i-v(\varphi_i,\psi_i)\cdot\Delta y_i+$$

$$+i\cdot(u(\varphi_i,\psi_i)\cdot\Delta y_i+v(\varphi_i,\psi_i)\cdot\Delta x_i)\big]$$

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x,y)dx - v(x,y)dy +$$

$$+ i \cdot \int_L u(x,y)dy - v(x,y)dx$$

Эта формула показывает, что чтобы свести интеграл по комплексному аргументу к вычислению обычного криволинейного интеграла, нужно выделить в подынтегральной функции действительные и мнимые части

$$f(z) = u + i \cdot v$$

и умножить ее на

$$dz = dx + i \cdot dy$$

Если кривая L задана параметрически

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

и начальная и конечная точки кривой соответственно t_0 и t_n

то исходный интеграл сводится к определенному:

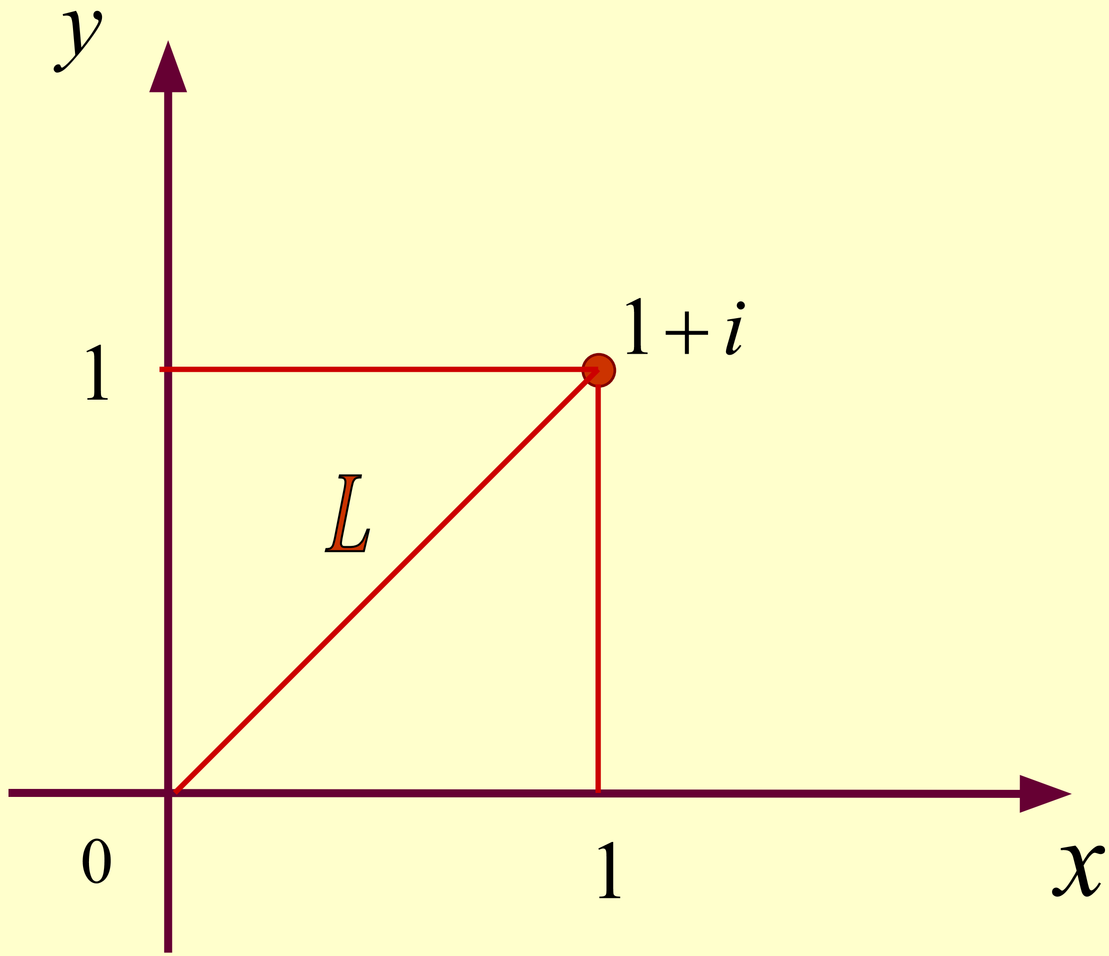
$$\int_L f(z)dz = \int_{t_0}^{t_n} f(z(t)) \cdot z'(t)dt$$

ПРИМЕР.

Вычислить интеграл:

$$\int_L \operatorname{Re}(z)\,dz$$

Где L – отрезок, соединяющий точки 0 и 1+i



y
1
$1+i$
L
0
1
x

Решение:

Запишем уравнение отрезка в параметрическом виде:

$$x = t$$

$$y = t$$

или

$$z = (1 + i) \cdot t$$

$$0 \le t \le 1$$

$$dz = (1 + i) \cdot dt$$

Тогда

$$\int_L \operatorname{Re}(z)\,dz = \int_0^1 \operatorname{Re}\big((1+i)\cdot t\big)\cdot(1+i)\,dt =$$

$$= (1+i)\int_0^1 t\,dt = (1+i)\cdot\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1+i}{2}$$