

Тема урока

Логарифмические уравнения

Цель обучения

11.2.2.5

**умеет решать логарифмические
уравнения**

Критерии успеха

- использует определение логарифмических уравнений (неравенств)
- использует метод введения новой переменной
- использует методы разложения на множители
- использует метод потенцирования
- выписывает условия, определяющие ОДЗ для логарифмических уравнений

Понятие логарифма

Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a называют показатель степени, в которую нужно возвести число a , чтобы получить число b

$$\log_a b = c, a^c = b; a \neq 1, a > 0, b > 0$$

$$a^{\log_a b} = b$$

- основное логарифмическое тождество

Примеры

1. $\log_2 8 = 3, 2^3 = 8;$
2. $\log_3 729 = 6, 3^6 = 729;$
3. $\log_{0,2} 25 = -2, (0,2)^{-2} = 25;$
4. $\log_4 8 = 1,5, 4^{1,5} = 8;$
5. $\log_2 2 = 1, 2^1 = 2;$
6. $\log_{10} 1 = 0, 10^0 = 1;$
7. $\log_{49} 1/7 = -0,5, 49^{-0,5} = 1/7;$
8. $\log_{0,1} 10000 = -4, 0,1^{-4} = 10000.$

Основные свойства логарифмов

- $\log_a 1 = 0;$
- $\log_a a = 1;$
- $\log_a \frac{1}{a} = -1;$
- $\log_{a^k} a = \frac{1}{k};$
- $\log_a a^m = m;$
- $\log_{a^k} a^m = \frac{m}{k};$
- $\log_a bc = \log_a b + \log_a c;$
- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$
- $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b;$
- $\log_a b^m = m \log_a b;$
- $\log_{a^k} b^m = \frac{m}{k} \log_a b;$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a};$
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a};$
- $\log_a b \cdot \log_c d = \log_c b \cdot \log_a d$
- $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

Логарифмические уравнения

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании, называется **логарифмическим уравнением**.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида $\log_a x = b$.

Если $a > 0$, $a \neq 1$, то вышеназванное уравнение при любом действительном b имеет **единственное решение** $x = a^b$.

Обычно решение логарифмических уравнений начинается с **определения ОДЗ** (либо потом нужна проверка).

В логарифмических уравнениях рекомендуется все логарифмы преобразовать так, чтобы их основания были равны. Затем уравнения либо выражают через один какой – либо логарифм, который обозначается новой переменной, либо уравнение преобразовывают к виду, удобному для потенцирования.

Методы решения логарифмических уравнений

1) По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x = b$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

Пример 1. Решить уравнение $\log_3(x^2 + 4x + 12) = 2$

Решение: $3^2 = x^2 + 4x + 12$; $x^2 + 4x + 12 = 9$;

$$x^2 + 4x + 3 = 0;$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 3} = -2 \pm 1; \quad x_1 = -1 \text{ и } x_2 = -3$$

Ответ: $x = -1, x = -3$.

2) Метод потенцирования.

Метод потенцирования – переход от уравнения с логарифмами к уравнениям, которые их не содержат.

$$\log_a f(x) = \log_a h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = h(x) \\ f(x) > 0 \\ h(x) > 0 \end{cases}$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\log_3(x^2 - 3x - 5) = \log_3(7 - 2x)$$

Ответ: -3.

3) Метод введения новой переменной

Пример 3. Решить уравнение $\lg^2 x + \lg x + 1 = \frac{7}{\lg \frac{x}{10}}$

$$\lg^2 x + \lg x + 1 = \frac{7}{\lg x - 1}$$

пусть $\lg x = t$, где $t \neq 1$, тогда

$$t^2 + t + 1 = \frac{7}{t - 1}$$

$$(t - 1)(t^2 + t + 1) = 7$$

$$t^3 - 1 = 7$$

$$t^3 = 8$$

$$t = 2$$

$$\lg \frac{x}{10} = \lg x - \lg 10 = \lg x - 1,$$

где $x > 0$, $x \neq 10$

Вернемся к исходной переменной

$$\lg x = 2$$

$$x = 10^2$$

$$x = 100$$

Ответ: 100.

4) Метод приведения к одному основанию

Если в уравнении содержатся логарифмы с разными основаниями, то прежде всего следует свести все логарифмы к одному основанию, используя формулу перехода:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Пример 4. Решить уравнение

$$\log_2 x + \log_x 16 = 5$$

$$OD3: x > 0, x \neq 1$$

$$\log_2 x + \log_x 2^4 - 5 = 0$$

$$\log_2 x + 4 \log_x 2 - 5 = 0$$

$$\log_2 x + \frac{4}{\log_2 x} - 5 = 0$$

1) По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x = b$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

1) По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x = b$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

Ответ: 2; 16

5) Метод логарифмирования

Данный метод является “обратным” методу потенцирования, т. е. от уравнения без логарифмов переходим к уравнению, их содержащему.

Этот метод обычно используется, если в уравнении есть показательные функции, логарифмы – в показателе.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow \log_{h(x)} f(x)=\log_{h(x)} g(x) \text{ при этом } f(x)>0, g(x)>0, h(x)>0, h(x)\neq 1.$$

Пример 5 . Решить уравнение

$$x^{1-\log_5 x} = 0,04 \quad \text{ОДЗ: } x > 0, x \neq 1$$

Т.к. обе части равенства принимают только положительные значения, прологарифмируем их по основанию 5:

$$\log_5 x^{1-\log_5 x} = \log_5 0,04$$

$$\log_5 x^{1-\log_5 x} = \log_5 0,04$$

$$(1-\log_5 x)\log_5 x = \log_5 0,04$$

$$\log_5 0,04 = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$$

$$\log_5 x - \log_5^2 x = -2$$

пусть $\log_5 x = t$, тогда

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = 2, \\ t_2 = -1. \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной

$$\begin{cases} \log_5 x = 2, \\ \log_5 x = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5^2, \\ x = 5^{-1}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25, \\ x = 0,2. \end{cases}$$

Ответ: 0,2; 25.

1) По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x = b$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

1) По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x = b$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

1) По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x = b$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

1) По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x = b$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

1) По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x = b$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

1) По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x = b$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

1) По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x = b$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

1) По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x = b$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

1) По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x = b$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

~~4~~ 1) По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x = b$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

1) По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x = b$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

1) По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x = b$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$



1) По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x = b$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

1) По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x = b$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

1) По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x = b$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$



HOME WORK

1) Решите уравнение:

$$A) \log_2 \left(\frac{6x + 4}{x - 10} \right) = 1$$

$$B) \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 8x) = -2$$

$$C) \log_3(2x-1) + \log_3\left(\frac{2}{3}x-3\right) = 1$$

$$D) \log_x 8 \cdot \log_{0.5} \frac{x}{2} = \log_9 \frac{1}{27}$$

$$\begin{cases} x - y = 8, \\ \log_3 x + \log_3 y = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-y} - \frac{4}{9} = 0, \\ \lg(3x - y) - 4\lg 2 = 0; \end{cases}$$

Reflection

