Тема урока

Логарифмические уравнения

Цель обучения

11.2.2.5

умеет решать логарифмические уравнения

Критерии успеха

– использует определение логарифмических уравнений (неравенств)

– использует метод введения новой переменной

– использует методы разложения на множители

— использует метод потенцирования

– выписывает условия, определяющие ОДЗ для логарифмических уравнений

Понятие логарифма

Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b

$$\log_a b = c,\ a^c = b;\ \ a \neq 1,\ a > 0,\ b > 0$$

$$a^{\log_a b} = b$$

- основное логарифмическое тождество

Примеры

1. $\log_2 8 =$ 3, $2^3 = 8$;
2. $\log_3 729 =$ 6, $3^6 = 729$;
3. $\log_{0,2} 25 =$ -2, $(0,2)^{-2} = 25$;
4. $\log_4 8 =$ $1,5$, $4^{1,5} = 8$;
5. $\log_2 2 =$ 1, $2^1 = 2$;
6. $\log_{10} 1 =$ 0, $10^0 = 1$;
7. $\log_{49} 1/7 =$ $-0,5$, $49^{-0,5} = 1/7$;
8. $\log_{0,1} 10000 =$ -4, $0,1^{-4} = 10000$.

Основные свойства логарифмов

1. $\log_a 1 = 0;$
2. $\log_a a = 1;$
3. $\log_a \frac{1}{a} = -1;$
4. $\log_{a^k} a = \frac{1}{k};$
5. $\log_a a^m = m;$
6. $\log_{a^k} a^m = \frac{m}{k};$
7. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c;$
8. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$
9. $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b;$
10. $\log_a b^m = m \log_a b;$
11. $\log_{a^k} b^m = \frac{m}{k} \log_a b;$
12. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a};$
13. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a};$
14. $\log_a b \cdot \log_c d = \log_c b \cdot \log_a d$
15. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

Логарифмические уравнения

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании, называется логарифмическим уравнением.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида $\log_a x = b.$

Если $a > 0$, $a \neq 1$, то вышеназванное уравнение при любом действительном b имеет **единственное решение** $x = a^b$.

Обычно решение логарифмических уравнений начинается с определения ОДЗ (либо потом нужна проверка).

В логарифмических уравнениях рекомендуется все логарифмы преобразовать так, чтобы их основания были равны. Затем уравнения либо выражают через один какой – либо логарифм, который обозначается новой переменной, либо уравнение преобразовывают к виду, удобному для потенцирования.

Методы решения логарифмических уравнений

1)По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x=b$

$$\log_a x=b \Leftrightarrow x=a^b$$

Пример 1. Решить уравнение $\log_3\left(x^2+4x+12\right)=2$

Решение: $3^2=x^2+4x+12$; $x^2+4x+12=9$;

$x^2+4x+3=0$;

$x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-3}=-2\pm1$; $x_1=-1$ и $x_2=-3$

Ответ: $x=-1, x=-3$.

2) Метод потенцирования.

Метод потенцирования – переход от уравнения с логарифмами к уравнениям, которые их не содержат.

$$\log_a f(x) = \log_a h(x) \iff \left[\begin{array}{l} f(x) = h(x) \\ f(x) > 0 \\ h(x) > 0 \end{array}\right.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\log_3\left(x^2 - 3x - 5\right) = \log_3(7 - 2x)$$

Ответ: -3.

3) Метод введения новой переменной

Пример 3. Решить уравнение $\lg^2 x + \lg x + 1 = \dfrac{7}{\lg \frac{x}{10}}$

$$\lg^2 x + \lg x + 1 = \frac{7}{\lg x - 1}$$

$\lg \dfrac{x}{10} = \lg x - \lg 10 = \lg x - 1,$

где $x > 0,\ \ x \neq 10$

пусть $\lg x = t$, где $t \neq 1$, тогда

$$t^2 + t + 1 = \frac{7}{t - 1}$$

$$(t-1)(t^2 + t + 1) = 7$$

$$t^3 - 1 = 7$$

$$t^3 = 8$$

$$t = 2$$

Вернемся к исходной переменной

$$\lg x = 2$$

$$x = 10^2$$

$$x = 100$$

Ответ: 100.

4) Метод приведения к одному основанию

Если в уравнении содержатся логарифмы с разными основаниями, то прежде всего следует свести все логарифмы к одному основанию, используя формулу перехода:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Пример 4. Решить уравнение

$$\log_2 x + \log_x 16 = 5$$

$$ОДЗ: x > 0, x \neq 1$$

$$\log_2 x + \log_x 2^4 - 5 = 0$$

$$\log_2 x + 4\log_x 2 - 5 = 0$$

$$\log_2 x + \frac{4}{\log_2 x} - 5 = 0$$

1)По определению логарифма.

x

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x=b$

$$\log_a x=b \Leftrightarrow x=a^b$$

x

1)По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x=b$

$$\log_a x=b \Leftrightarrow x=a^b$$

Ответ: 2; 16

5) Метод логарифмирования

Данный метод является “обратным” методу потенцирования, т. е. от уравнения без логарифмов переходим к уравнению, их содержащему.

Этот метод обычно используется, если в уравнении есть показательные функции, логарифмы – в показателе.

$f(x)=g(x) \Rightarrow log_{h(x)}f(x)=log_{h(x)}g(x)$ при этом $f(x)>0$, $g(x)>0$, $h(x)>0, h(x)\neq 1$.

Пример 5 . Решить уравнение

$x^{1-\log_5 x} = 0{,}04$ $\qquad ОДЗ: \; x>0, \; x\neq 1$

Т.к. обе части равенства принимают только положительные значения, прологарифмируем их по основанию 5:

$$log_5 x^{1-log_5 x} = log_5 0{,}04$$

$$\log_5 x^{1-\log_5 x} = \log_5 0{,}04$$

$$(1-\log_5 x)\log_5 x = \log_5 0{,}04$$

$$\log_5 0{,}04 = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$$

$$\log_5 x - \log_5^2 x = -2$$

пусть $\log_5 x = t$, *тогда*

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 2, \\ t_2 = -1. \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$\left[\begin{array}{l} \log_5 x = 2, \\ \log_5 x = -1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5^2, \\ x = 5^{-1}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 25, \\ x = 0{,}2. \end{array}\right.$$

Ответ: 0,2; 25.

1)По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x=b$

$$\log_a x=b \Leftrightarrow x=a^b$$

1)По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x=b$

$$\log_a x=b \Leftrightarrow x=a^b$$

1)По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x = b$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

1)По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $log_a x=b$

$$log_a x=b \Leftrightarrow x=a^b$$

1)По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $log_a x=b$

$$log_a x=b \Leftrightarrow x=a^b$$

1)По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x = b$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

1)По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x=b$

$$\log_a x=b \Leftrightarrow x=a^b$$

1)По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x=b$

$$\log_a x=b \Leftrightarrow x=a^b$$

1)По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $log_a x=b$

$$log_a x=b \Leftrightarrow x=a^b$$

1)По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $log_a x=b$

$$log_a x=b \Leftrightarrow x=a^b$$

1)По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $log_a x=b$

$$log_a x=b \Leftrightarrow x=a^b$$

1)По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $log_a x=b$

$$log_a x=b \Leftrightarrow x=a^b$$

1)По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x=b$

$$\log_a x=b \Leftrightarrow x=a^b$$

1)По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x=b$

$$\log_a x=b \Leftrightarrow x=a^b$$

1)По определению логарифма.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x = b$

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

1) Решите уравнение:

A) $\log_2\left(\dfrac{6x+4}{x-10}\right)=1$

$B) \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 8x) = -2$

$C)\ \log_3(2x-1)+\log_3(\frac{2}{3}x-3)=1$

$D)\ \log_x 8 \cdot \log_{0,5} \frac{x}{2} = \log_9 \frac{1}{27}$

$$\begin{cases} x - y = 8, \\ \log_3 x + \log_3 y = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-y} - \dfrac{4}{9} = 0, \\ \lg(3x - y) - 4\lg 2 = 0; \end{cases}$$

Reflection