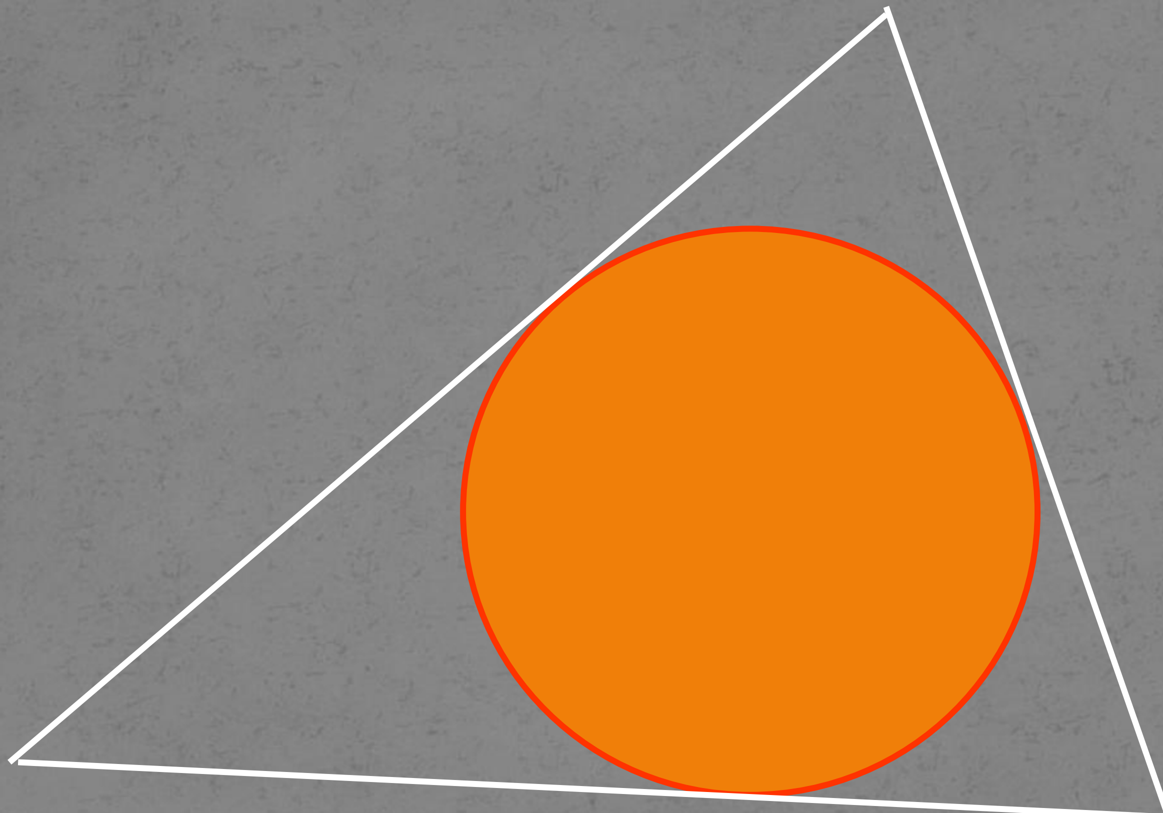
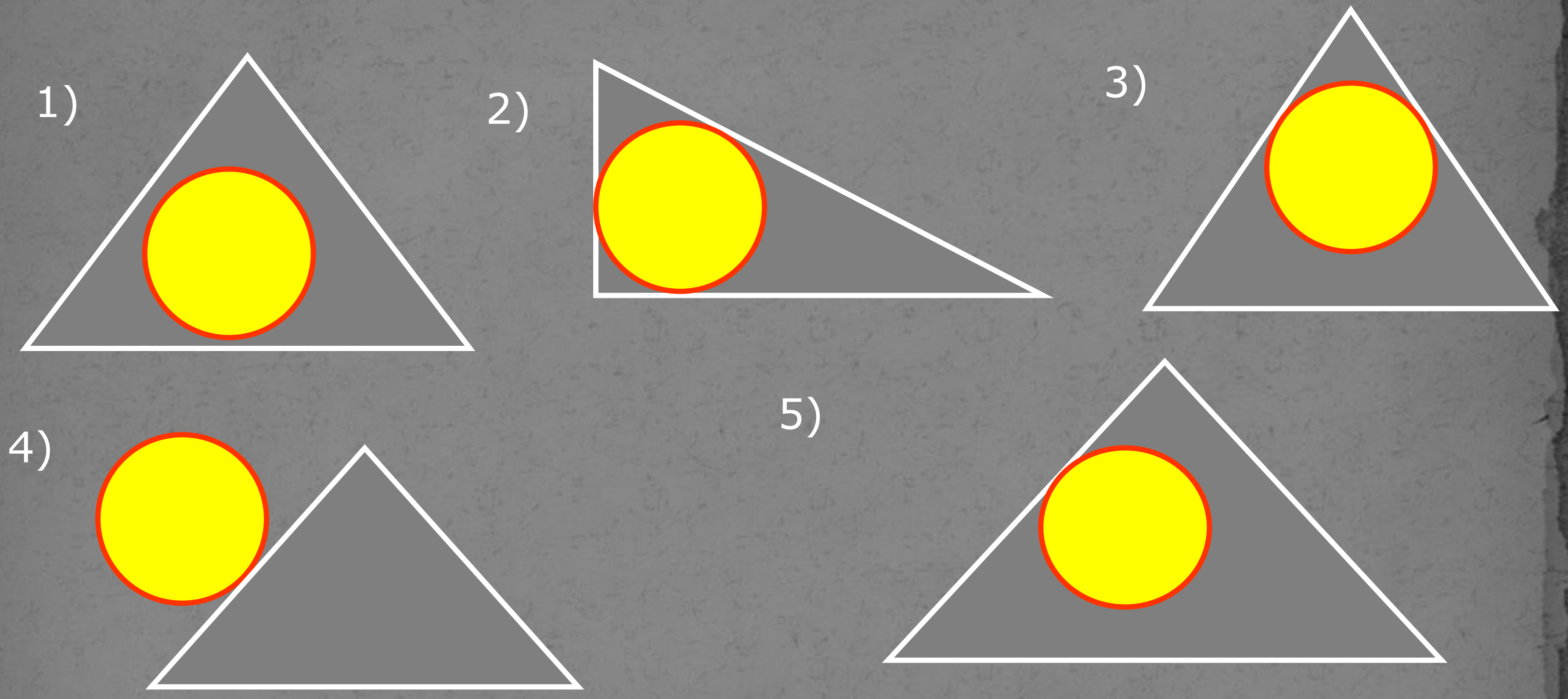
Вписанная окружность

Определение: окружность называется вписанной в треугольник, если все стороны треугольника касаются окружности.

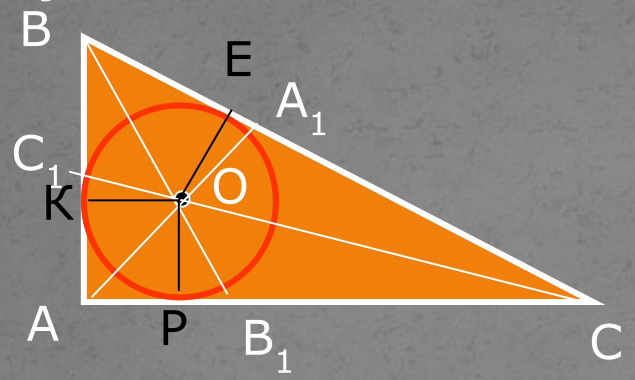


На каком рисунке окружность вписана в треугольник ?



Если окружность вписана в треугольник,
то треугольник описан около окружности.

Теорема. **В треугольник можно вписать окружность, и притом только одну. Её центр – точка пересечения биссектрис треугольника.**



Дано: ABC

Доказать: существует Окр.(O;r), вписанная в треугольник

Доказательство:

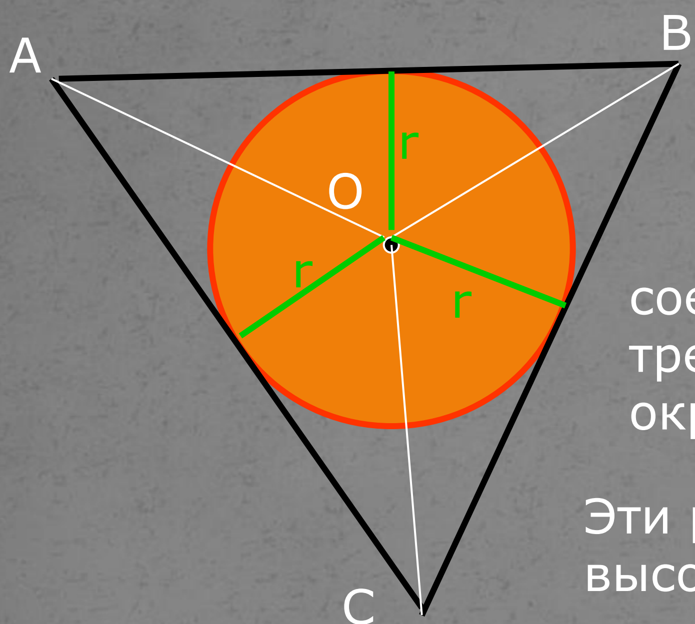
Проведём биссектрисы треугольника:AA_1, BB_1, CC_1.
По свойству (замечательная точка треугольника) биссектрисы пересекаются в одной точке – O, и эта точка равноудалена от всех сторон треугольника, т. е :

OK = OE = OP, где OK $\perp$ AB, OE $\perp$ BC, OP $\perp$ AC, значит, O – центр окружности, а AB, BC, AC – касательные к ней.

Значит, окружность вписана в ABC.

Важная формула

Дано: Окр.(O;r) вписана в △ABC,
$p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$ – полупериметр.



Доказать: $\mathbf{S_{ABC} = p \cdot r}$

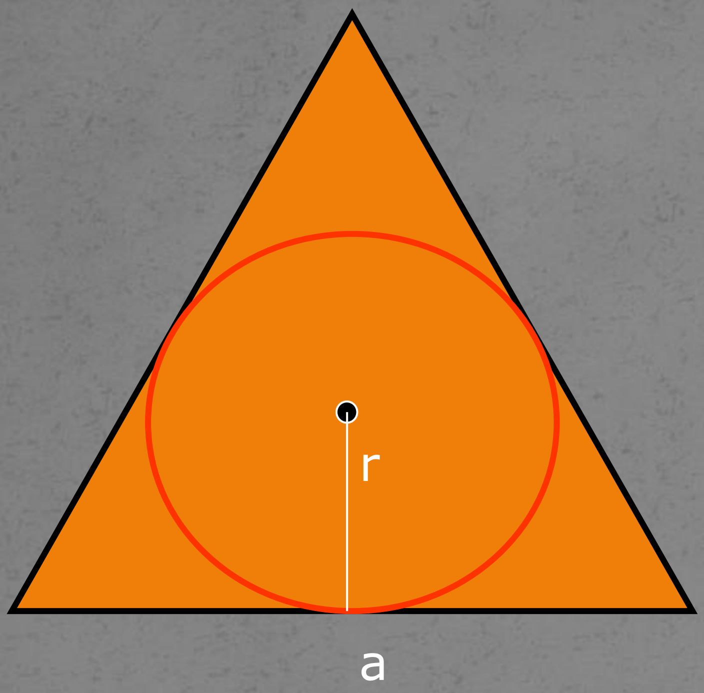
Доказательство:

соединим центр окружности с вершинами треугольника и проведём радиусы окружности в точки касания.

Эти радиусы являются высотами треугольников AOB, BOC, COA.

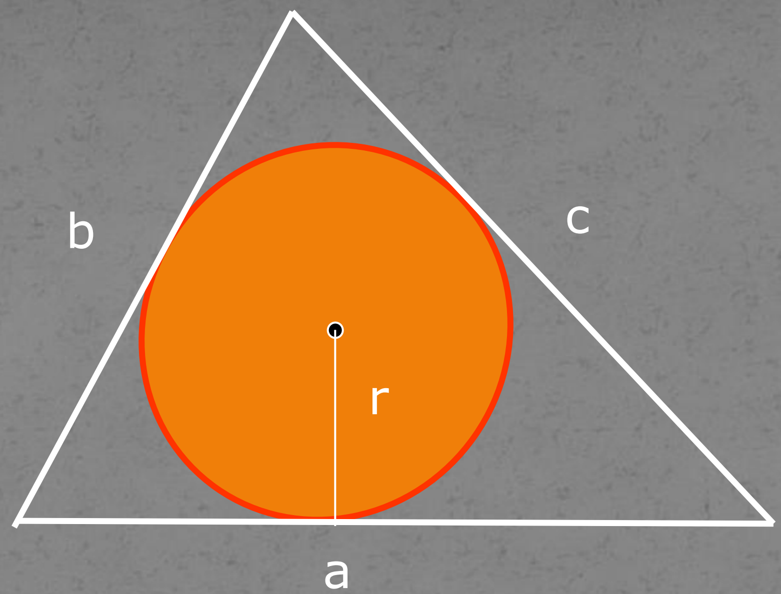
$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r + \frac{1}{2} AC \cdot r =$
$= \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \cdot r = \frac{1}{2} p \cdot r.$

Задача: в равносторонний треугольник со стороной 4 см вписана окружность. Найдите её радиус.



Решение:

Вывод формулы для радиуса вписанной в треугольник окружности

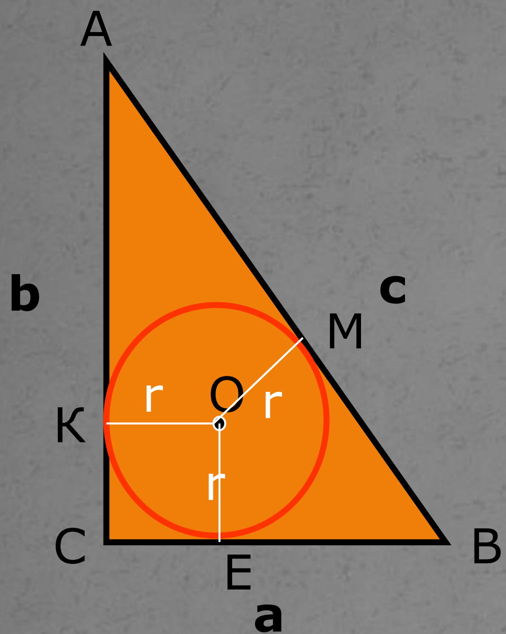


$$S = p \cdot r = \tfrac{1}{2} P \cdot r = \tfrac{1}{2} (a + b + c) \cdot r$$

$$2S = (a + b + c) \cdot r$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c}$$

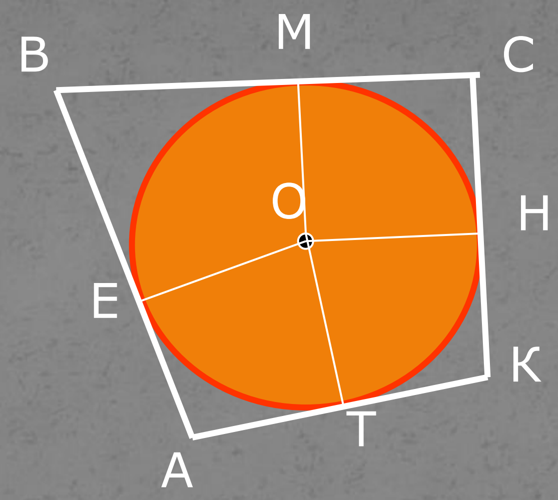
Нужная формула для радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник



$$r = \frac{a+b-c}{2};$$

a, b - **катеты, c - гипотенуза**

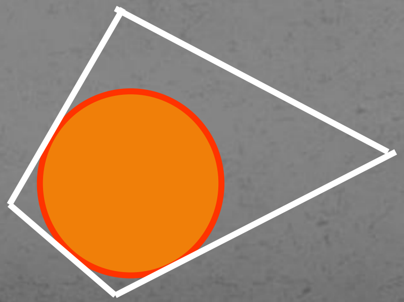
Окружность, вписанная в четырёхугольник



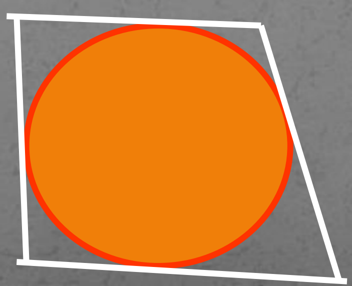
Определение: окружность называется вписанной в четырёхугольник, если все стороны четырёхугольника касаются её.

На каком рисунке окружность вписана в четырёхугольник:

1)

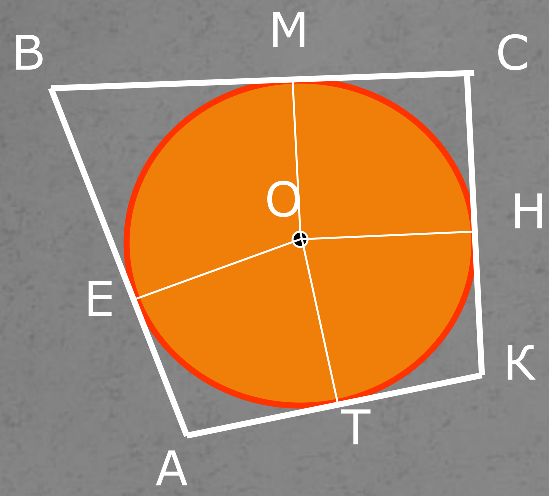


2)



3)

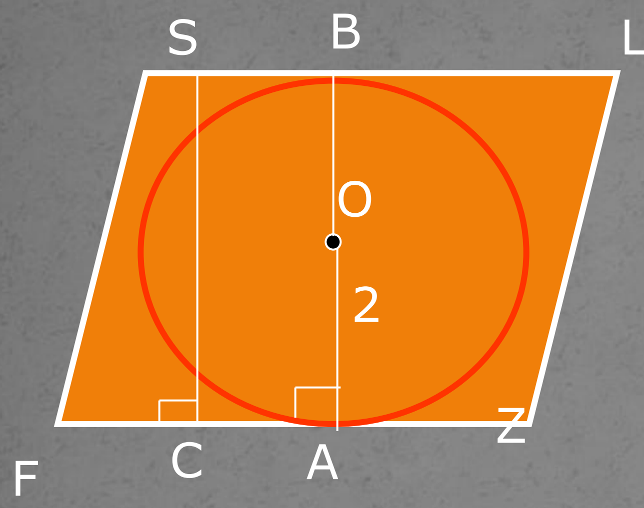
Теорема: **если в четырёхугольник вписана окружность, то суммы противоположных сторон четырёхугольника равны (** в любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны).



AB + CK = BC + AK.

Обратная теорема: **если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.**

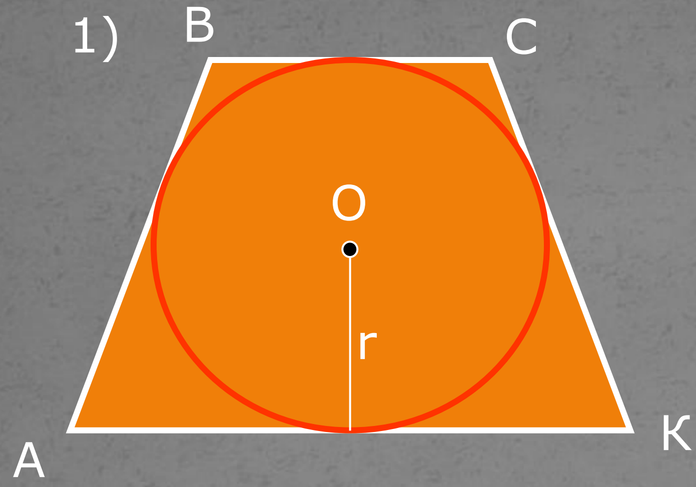
Задача: в ромб, острый угол которого 60^0, вписана окружность, радиус которой равен 2 см. Найти периметр ромба.



Решение:

Реши задачи

1)

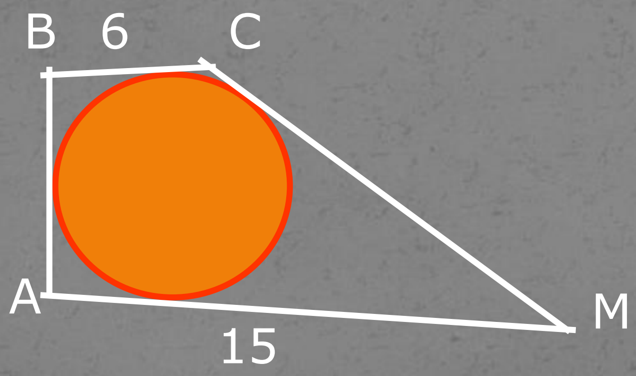


Дано: Окр.(О; r) вписана в АВСК,

$P_{ABCK} = 10$

Найти: ВС + АК

2)



Дано: АВСМ описан около Окр.(О; r)

ВС = 6, АМ = 15,

СМ = 2 АВ

Найти: АВ, СМ