Семинар 5. Основные теоремы о пределах. Основные способы вычисления пределов функций

Предполагается, что функции, рассматриваемые в следующих теоремах определены на некотором общем множестве X, для которого точка a является предельной точкой.

Теорема 1 Если каждое слагаемое алгебраической суммы конечного числа функций имеет предел при $x \to a$, то предел этой алгебраической суммы при $x \to a$ существует и равен такой же алгебраической сумме пределов слагаемых.

Теорема 2 Если каждый из сомножителей конечного числа функций имеет предел при $x \to a$, то предел произведения при $x \to a$ существует и равен произведению пределов сомножителей.

Следствие 1 Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

Пусть C – постоянная, тогда $\lim_{x\to a}[C\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} C \cdot \lim_{x\to a} g(x) = C\lim_{x\to a} f(x)$

Следствие 2 Если функция f(x) имеет предел при $x \to a$, то предел при $x \to a$ целой положительной степени ее равен такой же степени предела этой функции, то есть

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$$

Пример

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x+2)^2(x+30)^3}{x^6} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{10}{x}\right)\left(1+\frac{20}{x}\right)^2\left(1+\frac{30}{x}\right)^3\right] = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{10}{x}\right)\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{20}{x}\right)^2\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{30}{x}\right)^3 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

Теорема 3 Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$, отличный от нуля, то предел обратной ей по величине функции $\frac{1}{f(x)}$ равен обратной величине предела данной функции, то есть

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to a} f(x)}$$

Теорема 4 Если делимое *f(x)* и делитель *g(x)* имеют пределы при $x \to a$ и предел делителя отличен от нуля, то предел их частного при $x \to a$ равен частному пределов делимого и делителя, то есть

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Теорема 5 Если функция *f(x)* имеет предел при $x \to a$ и $\sqrt[n]{f(x)}$ (n – натуральное) существует в точке а и в некоторой ее окрестности U_a, то

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{n\to a} f(x)}$$

Теорема о промежуточной функции

Пусть в некоторой окрестности U_a точки *a* функции *f(x)* заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, имеющими одинаковый предел *A* при $x \to a$, то есть $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$ (1) и $\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{x\to a} \psi(x) = A$ (2), тогда функция *f(x)* имеет тот же предел, то есть $\lim_{x\to a} f(x) = A$ (3).

Вычисление пределов основано на применении основных теорем о пределах, признаков существования пределов, а также теорем о бесконечно малых и бесконечно больших функциях.

Рассмотрим вычисление пределов на различных примерах.

1. Найти $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{5x+2}{2x+3}$

Решение. Так как $x \to 4$, то числитель стремится к числу 4*4+2=22, а знаменатель к числу 2*4+3=11. Следовательно

$$\lim_{x\to 4} \frac{5x+2}{2x+3} = \frac{22}{11} = 2$$

2. Найти $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{2x+7}$

Решение. Числитель и знаменатель неограниченно возрастают при $x\to\infty$. В таком случае говорят, что имеет неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделив на x числитель и знаменатель дроби, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{2x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+5/x}{2+7/x}=\frac{3}{2}$$

3. Найти $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$

Решение. Числитель и знаменатель при $x\to 3$ стремятся к нулю. Принято говорить, что получается неопределенность $\frac{0}{0}$. Имеем $\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\frac{x+3}{x}$.

Если $x\neq 3$, то $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x}$. Но при $x\to 3$ дробь $\frac{x+3}{x}\to\frac{3+3}{3}=2$. Итак

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=2$$

4. Найти $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$

Решение. Здесь имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Разложим на множители числитель и знаменатель дроби.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0$$

5. Найти $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-10001}{x^3-20x^2+100x}$

Решение. Имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Имеем

$$\lim_{x\to 10}\frac{x^3-10001}{x^3-20x^2+100x}=\lim_{x\to 10}\frac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x(x-10)^2}=\lim_{x\to 10}\frac{x^2+10x+100}{x(x-10)}=\infty$$, так как

числитель дроби стремится к числу 300, а знаменатель стремится к нулю, то есть является бесконечно малой величиной, следовательно рассматриваемая дробь – бесконечно большая величина.

6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

Решение умножим числитель и знаменатель на сопряженное к числителю, то есть сумму $\sqrt{x+4}-2$. Получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-4+4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}$$

7. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}$

Решение. Положим $1+x=y^5$

тогда $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y^3-1}{y^5-1}=\lim_{x\to 0}\frac{y^2+y+1}{y^4+y^3+y^2+y+1}=\frac{3}{5}$$

8. Найти $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$$

Решение. Числитель и знаменатель неограниченно возрастают при $x\to\infty$. В таком случае говорят, что имеет неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделив числитель и знаменатель дроби на старшую степень *x*, то есть x^3 получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+2/x+3/x^2+4/x^3}{4+3/x+2/x^2+1/x^3}=\frac{1}{4}$$

9. Найти $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$$

Решение. Разделив числитель и знаменатель дроби на старшую степень *x,* то есть x^4 получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-2/x^4}{\sqrt{1+3/x^3+4/x^4}}=\frac{3}{1}=3$$

10. Найти

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}$$

Решение. Имеет место неопределенность вида $\infty - \infty$. Умножим и разделим данное выражение на сопряженное

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3})}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+8/x+3/x^2}+\sqrt{1+4/x+3/x^2}}=\frac{4}{2}=2$$

Примеры для самостоятельного решения.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x-12}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x-x^2}}{x^2-x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^2+5x+-6}{x^3+3x^2+7x-1}$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})$

7. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2^x+3}{2^x-3}$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^4-1}$