Теорема Менелая.

- Теория.
- Тренажеры.
- Задачи.

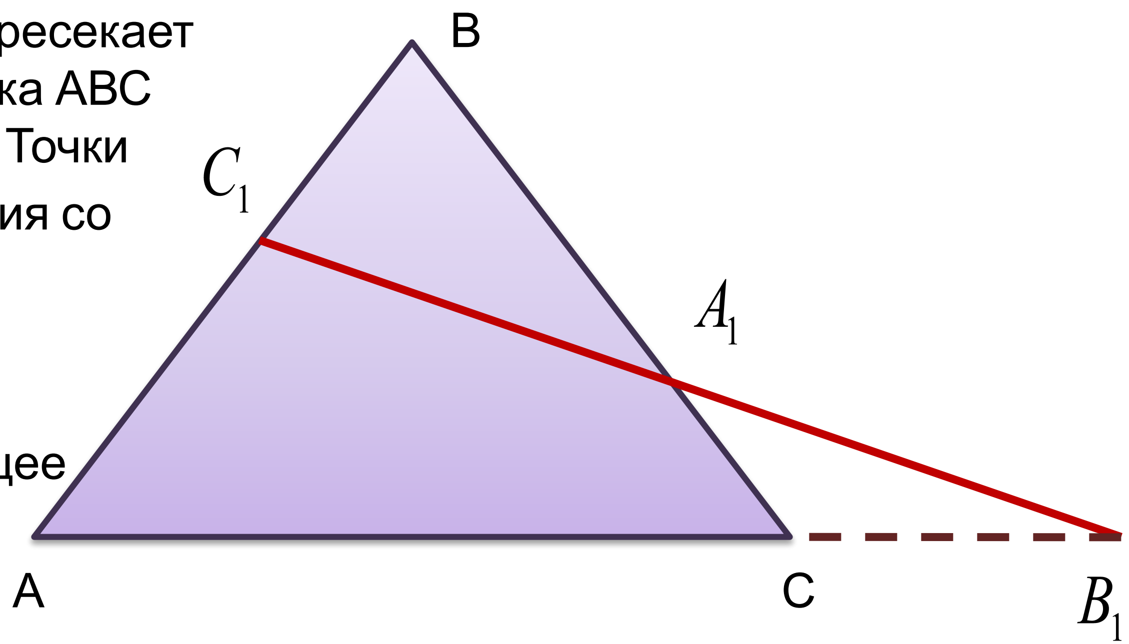
Теорема Менелая (теория).

Теорема:

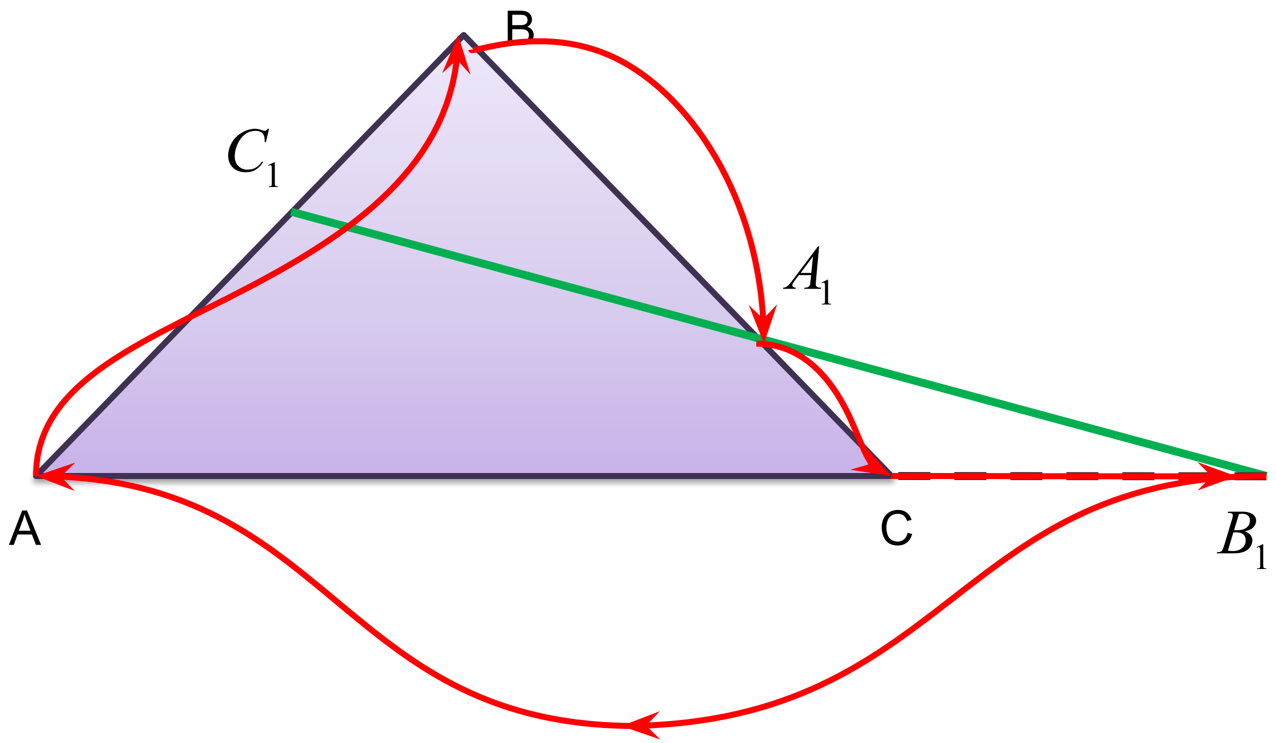
Пусть некоторая прямая пересекает две стороны треугольника АВС и продолжение третьей. Точки A_1, B_1, C_1 это пересечения со сторонами BC, AC, AB или их продолжениями соответственно.

Тогда имеет место следующее равенство:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$

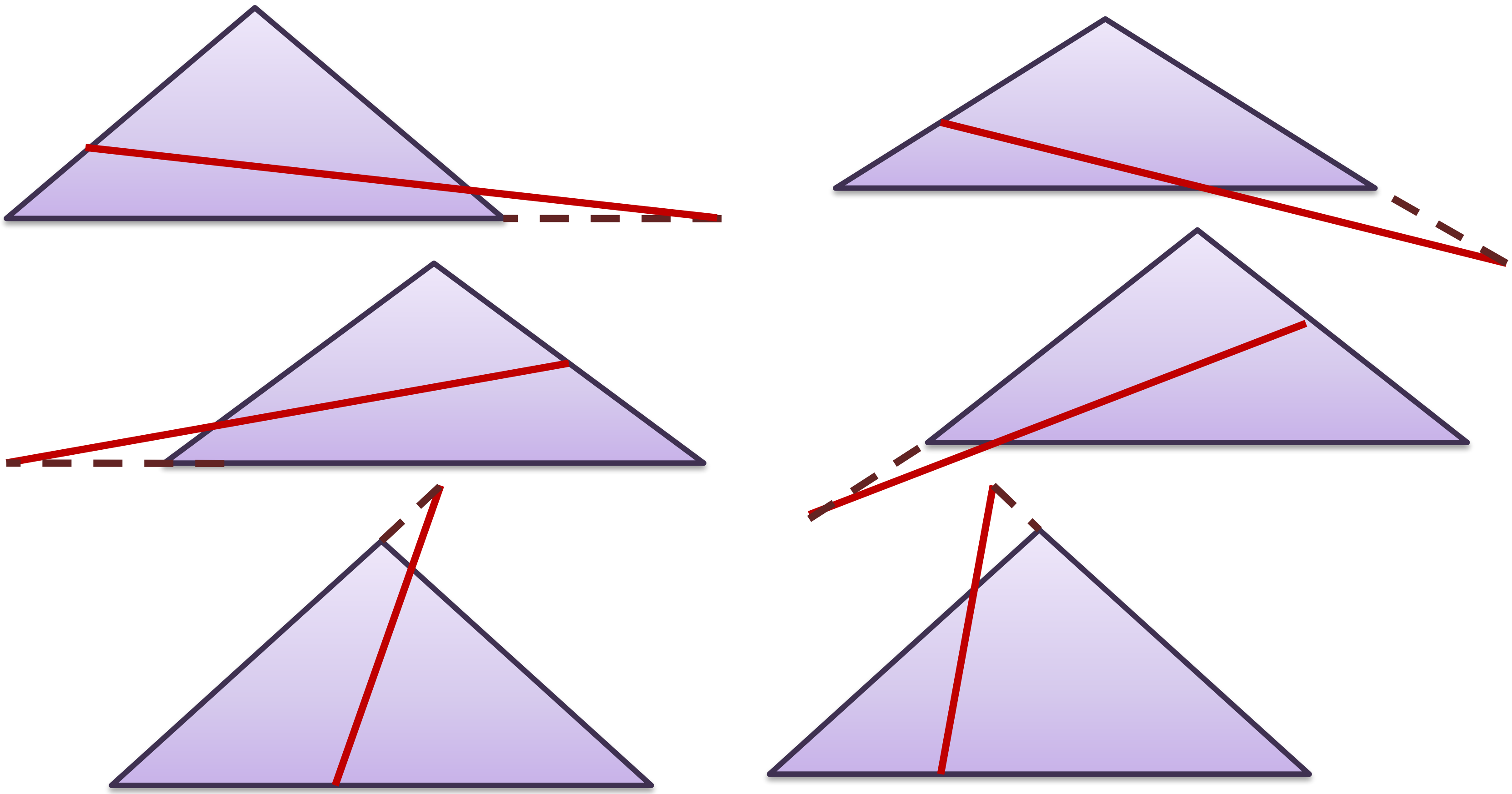


Правило для запоминания



Обход можно начинать с любой точки, но при этом обязательно чередовать: вершина – точка на стороне – вершина – точка на стороне и т.д.

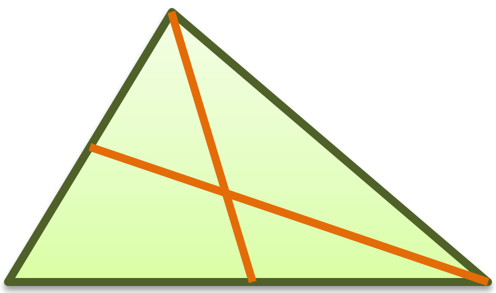
Тренажер-1.

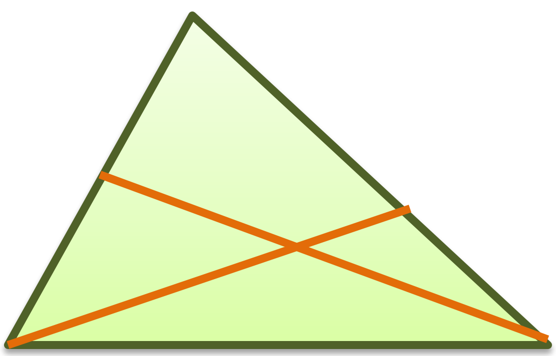


Для заданных чертежей записать теорему Менелая.

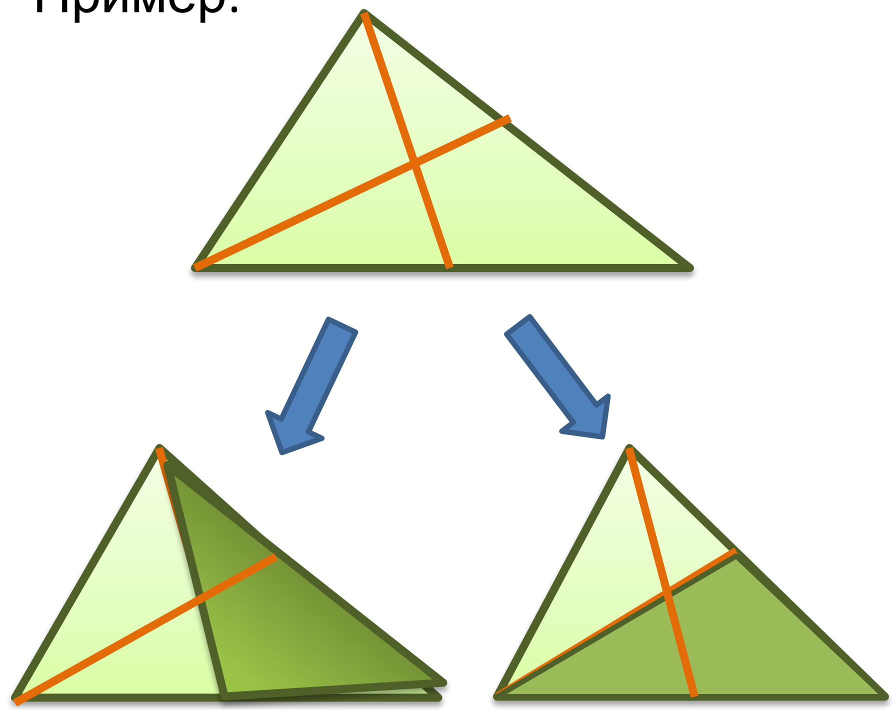
Тренажер-2.

На заданных чертежах найти два возможных применения теоремы Менелая.



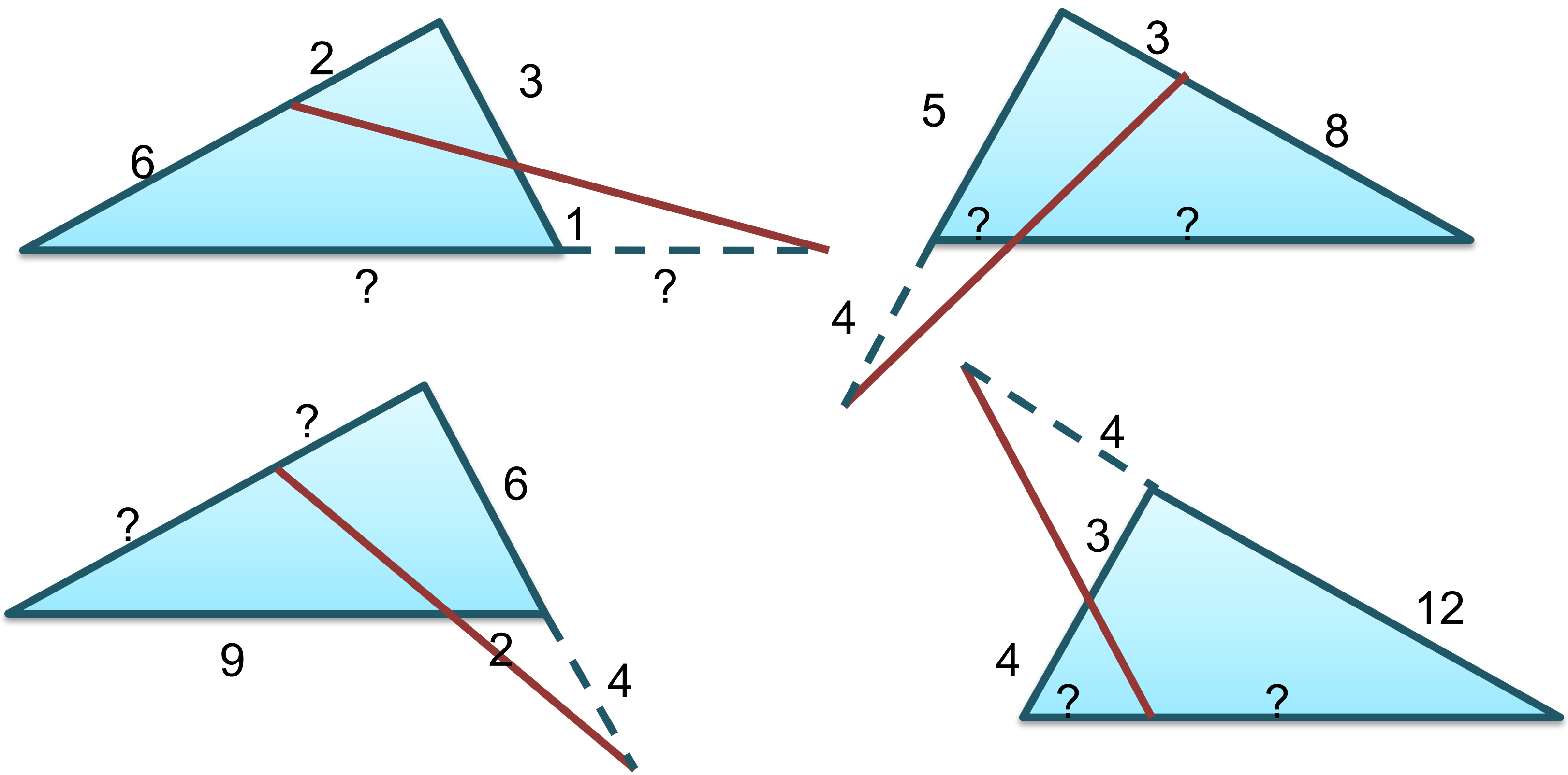


Пример:



Тренажер-3.

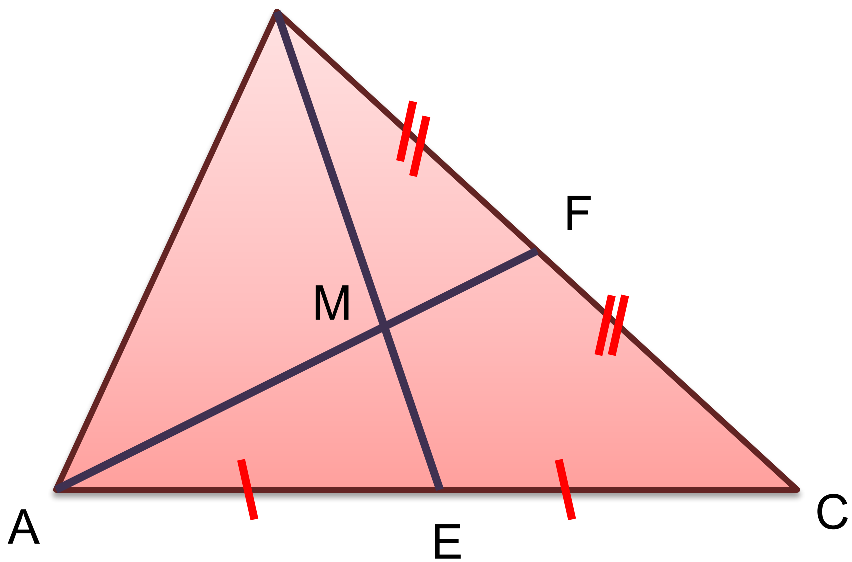
Найти отношения отрезков:



Задачи.

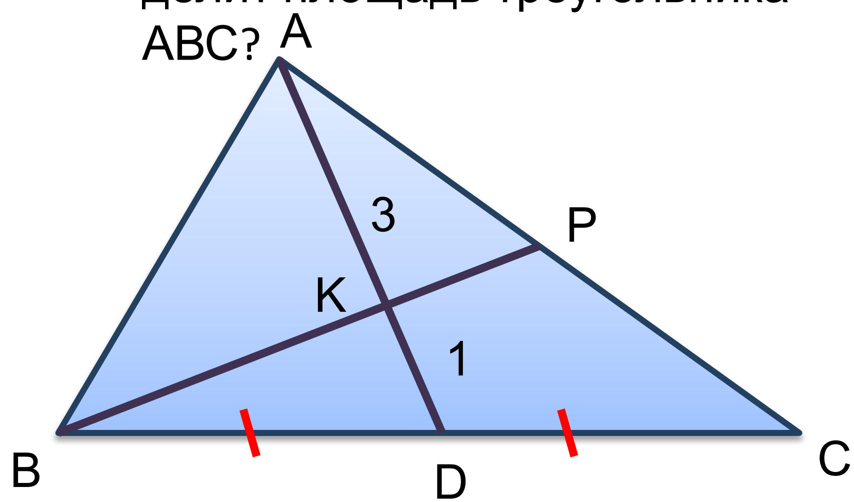
Задача 1.

Доказать теорему о точке пересечения медиан.



Задача 2.

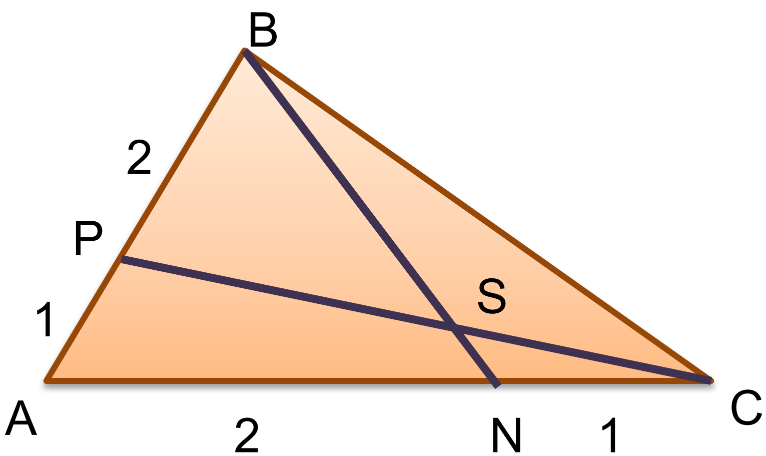
В треугольнике АВС проведена медиана AD. На ней выбрана точка К так, что AK:KD=3:1. В каком отношении прямая ВК делит площадь треугольника АВС?



Задачи.

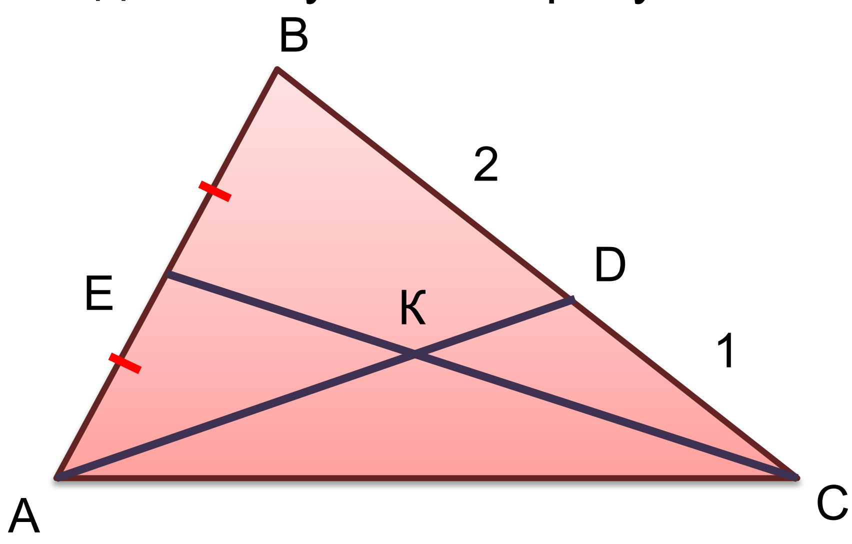
Задача 3.

На сторонах треугольника ABC даны соответственно точки M и N такие, что AM:MB=CN:NA=1:2. В каком отношении точка S (пересечение этих отрезков) делит каждый из этих отрезков?

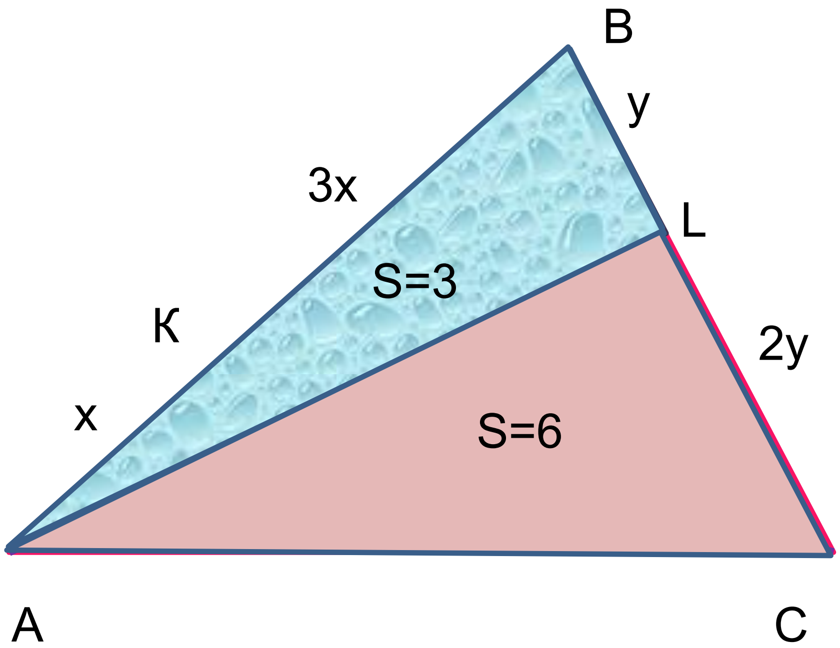


Задача 4.

В треугольнике ABC биссектриса AD делит BC в отношении 2:1. В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису?



Задачи.



Задача 5:

В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K так, что AK:BK=1:3, а на стороне BC взята точка L так, что CL:BL=2:1. Пусть Q – точка пересечения прямых AL и CK. Найти площадь треугольника ABC, если площадь треугольника BQL равна 2.

Решение:

1) Применим теорему Менелая к треугольнику ABL:

$$\frac{x}{3x}\cdot\frac{3y}{2y}\cdot\frac{LQ}{QA}=1 \Rightarrow \frac{LQ}{QA}=\frac{2}{1}.$$

2) Найдем площадь треугольника ABQ:

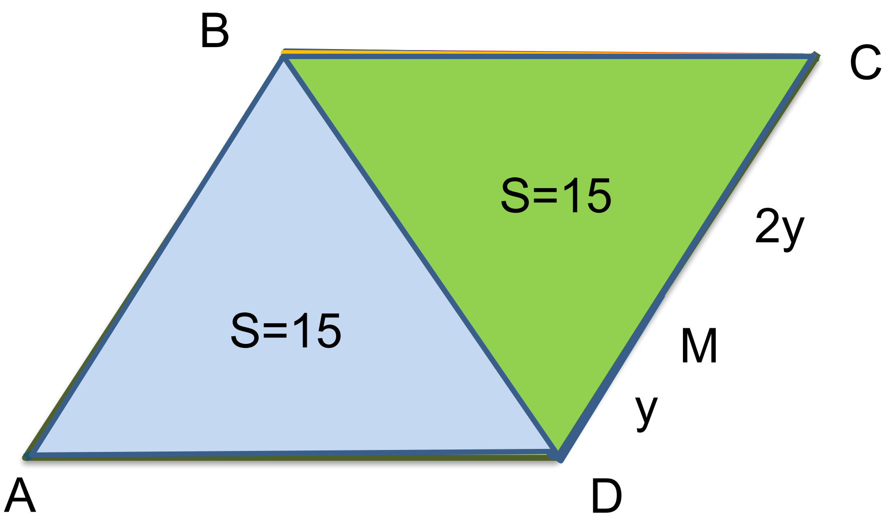
$$\frac{S_{ABQ}}{S_{BQL}}=\frac{z}{2z} \Rightarrow S_{ABQ}=1$$

3) Используем отношение площадей треугольников ABL и ALC:

$$\frac{S_{ABL}}{S_{ALC}}=\frac{y}{2y} \quad \Rightarrow \quad S_{ALC}=6.$$

Ответ: площадь треугольника равна 9.

Задачи.



Задача 6. (ЕГЭ-2008)

Точка М, лежащая на стороне параллелограмма ABCD, соединена с вершиной В. Диагональ АС пересекает отрезок ВМ в точке К. Площадь треугольника КВС равна 6, площадь треугольника КМС равна 4. Найти площадь исходного параллелограмма.

Решение:

1) $\dfrac{S_{BKC}}{S_{MKC}} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} = \dfrac{BK}{KM}$

2) Применим теорему Менелая к треугольнику BDM:

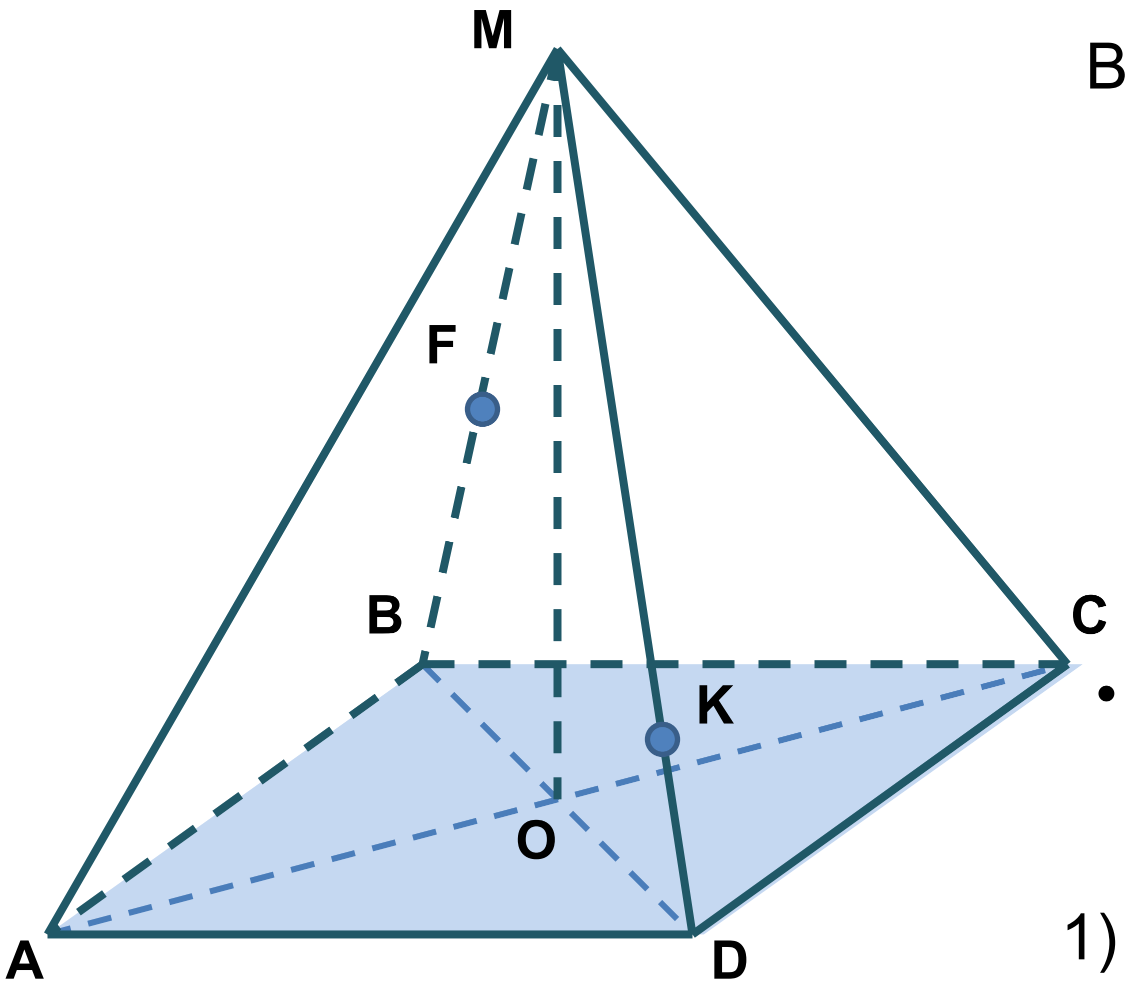
$$\frac{1}{1} \cdot \frac{3x}{2x} \cdot \frac{MC}{CD} = 1 \Rightarrow \frac{MC}{CD} = \frac{2}{3}.$$

3) Используем отношение площадей треугольников BMC и BMD:

$$\frac{S_{BMC}}{S_{BDM}} = \frac{2}{1} \Rightarrow S_{BDM} = 5.$$

Получаем, что площадь всего параллелограмма равна 30.

Использование теоремы Менелая в стереометрических задачах.

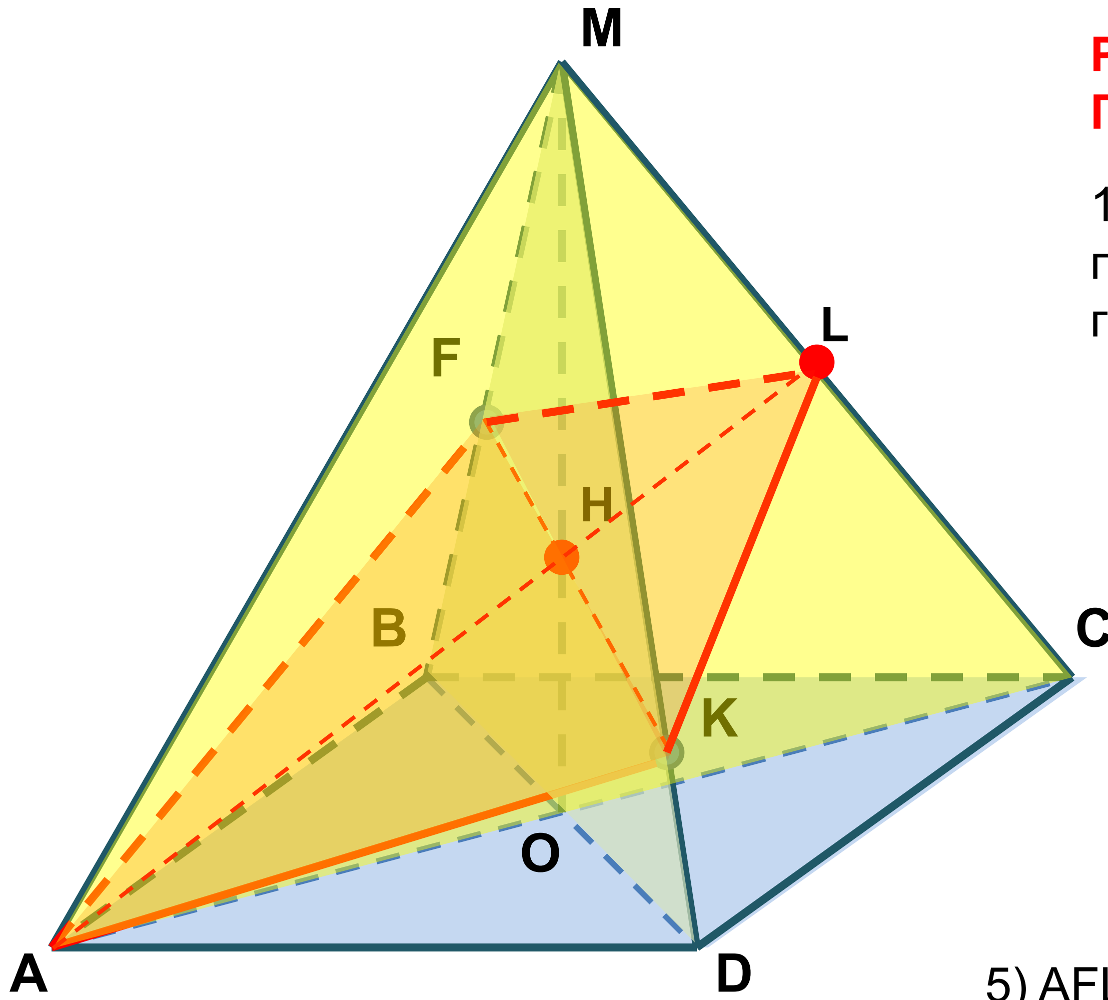


В правильной четырехугольной пирамиде MABCD точка F – середина ребра MB, точка К делит ребро MD в отношении МК:KD=5:1.

- В каком отношении плоскость AFK делит:

1) Высоту МО данной пирамиды?
2) Ребро МС?

Использование теоремы Менелая в стереометрических задачах.



Решение:

Построение сечения.

1) AF и AK – прямые пересечения плоскости с гранями пирамиды.

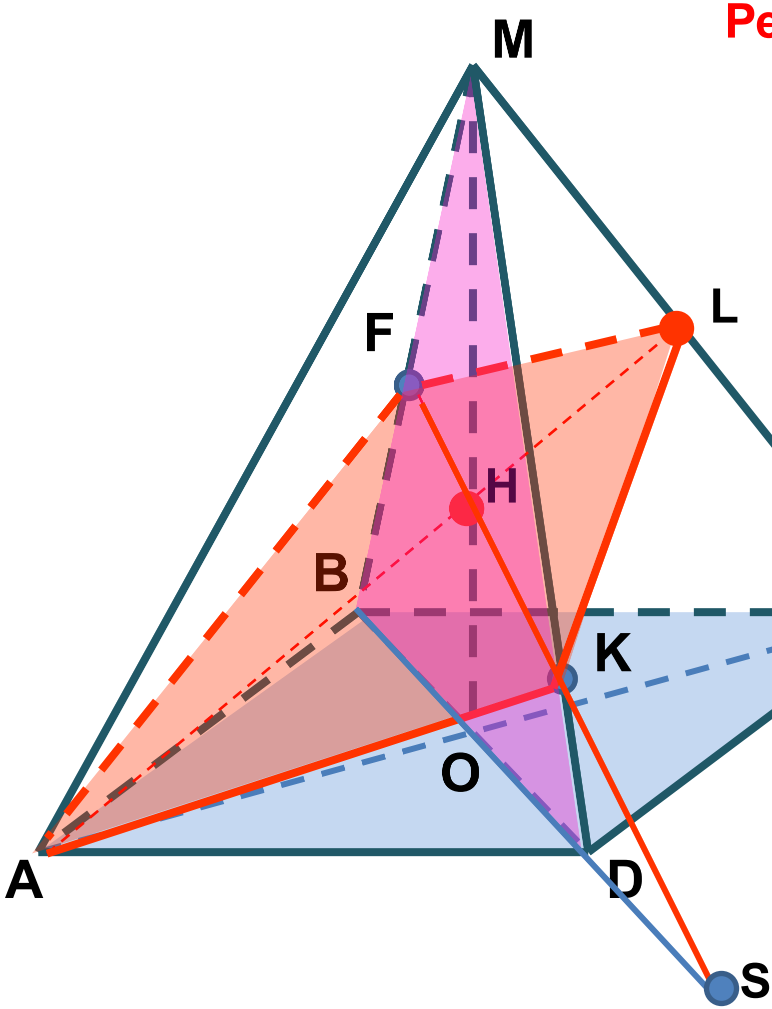
2) FK – пересечение плоскости сечения с BMD.

3) Прямая AL – пересечение плоскости сечения с AMC.

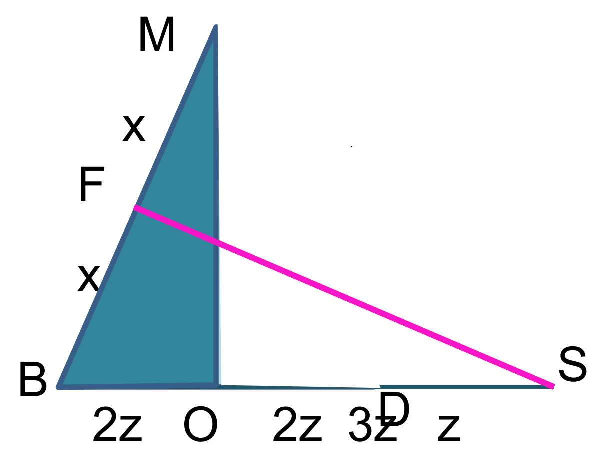
4) Прямые FL и FK – прямые пересечения плоскости с гранями пирамиды.

5) AFLK – искомое сечение.

Использование теоремы Менелая в стереометрических задачах.



Решение: нахождение отношения MH:HO



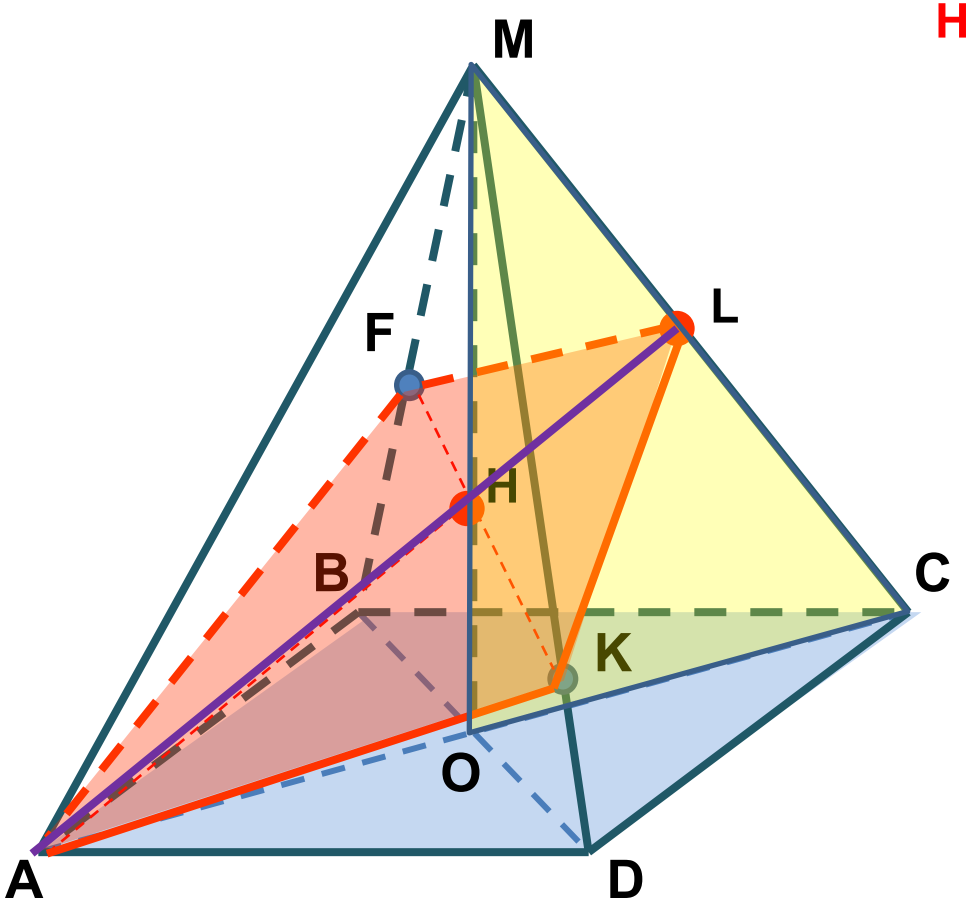
1) По теореме Менелая для треугольника BMD получаем:

$$\frac{x}{x}\cdot\frac{5y}{y}\cdot\frac{DS}{SB}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{DS}{SB}=\frac{1}{5}$$

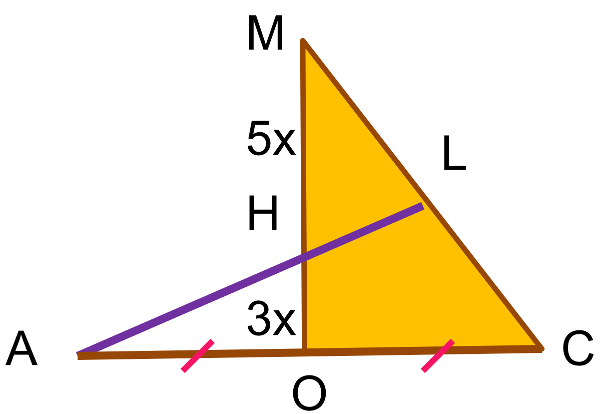
2) Для треугольника BMC получаем:

$$\frac{x}{x}\cdot\frac{MH}{HC}\cdot\frac{3z}{5z}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{MH}{HC}=\frac{5}{3}$$

Использование теоремы Менелая в стереометрических задачах.



Нахождение отношения ML:LC



По теореме Менелая для треугольника МОС получаем:

$$\frac{3x}{5x}\cdot\frac{ML}{LC}\cdot\frac{2}{1}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{ML}{LC}=\frac{5}{6}$$