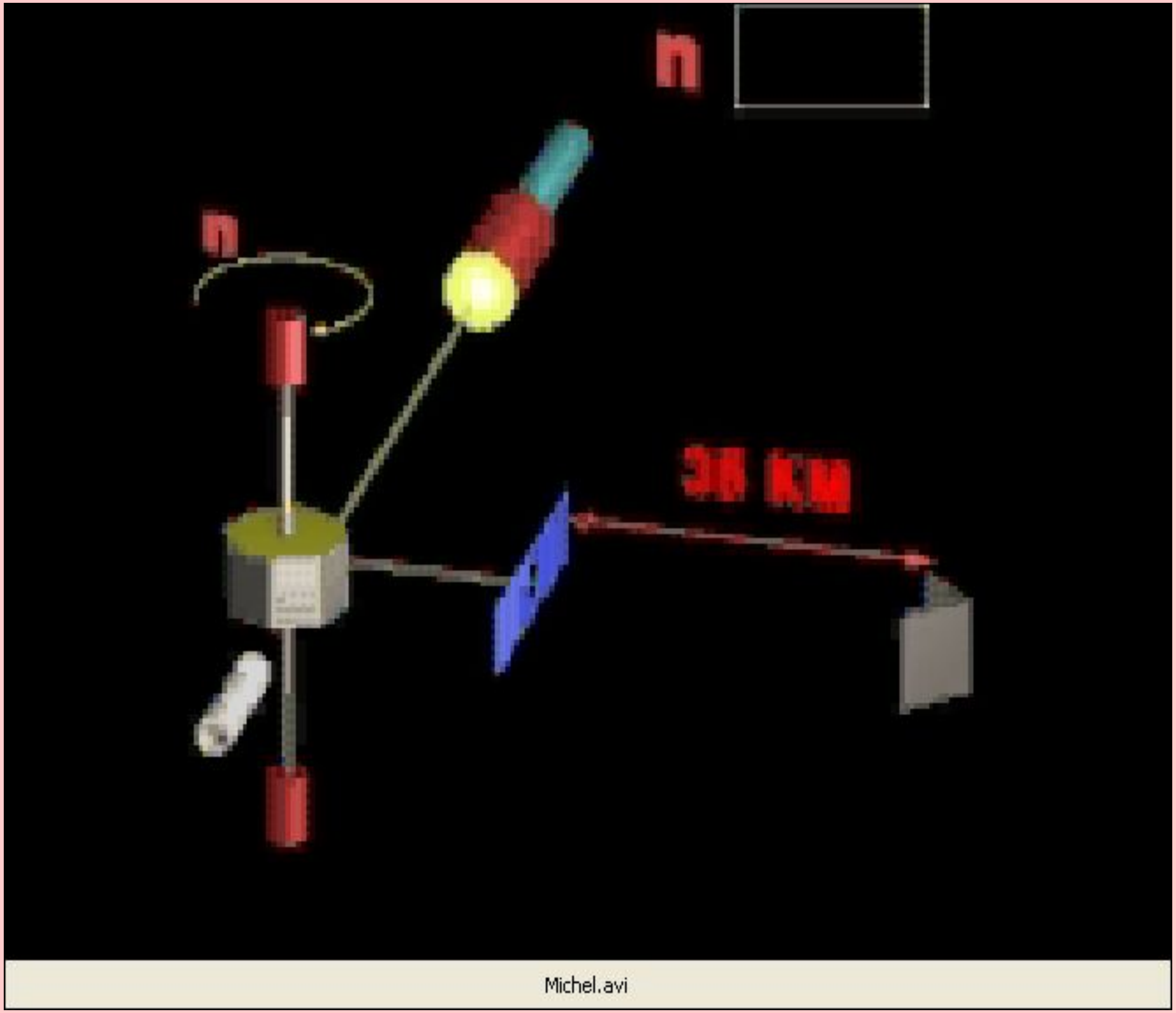
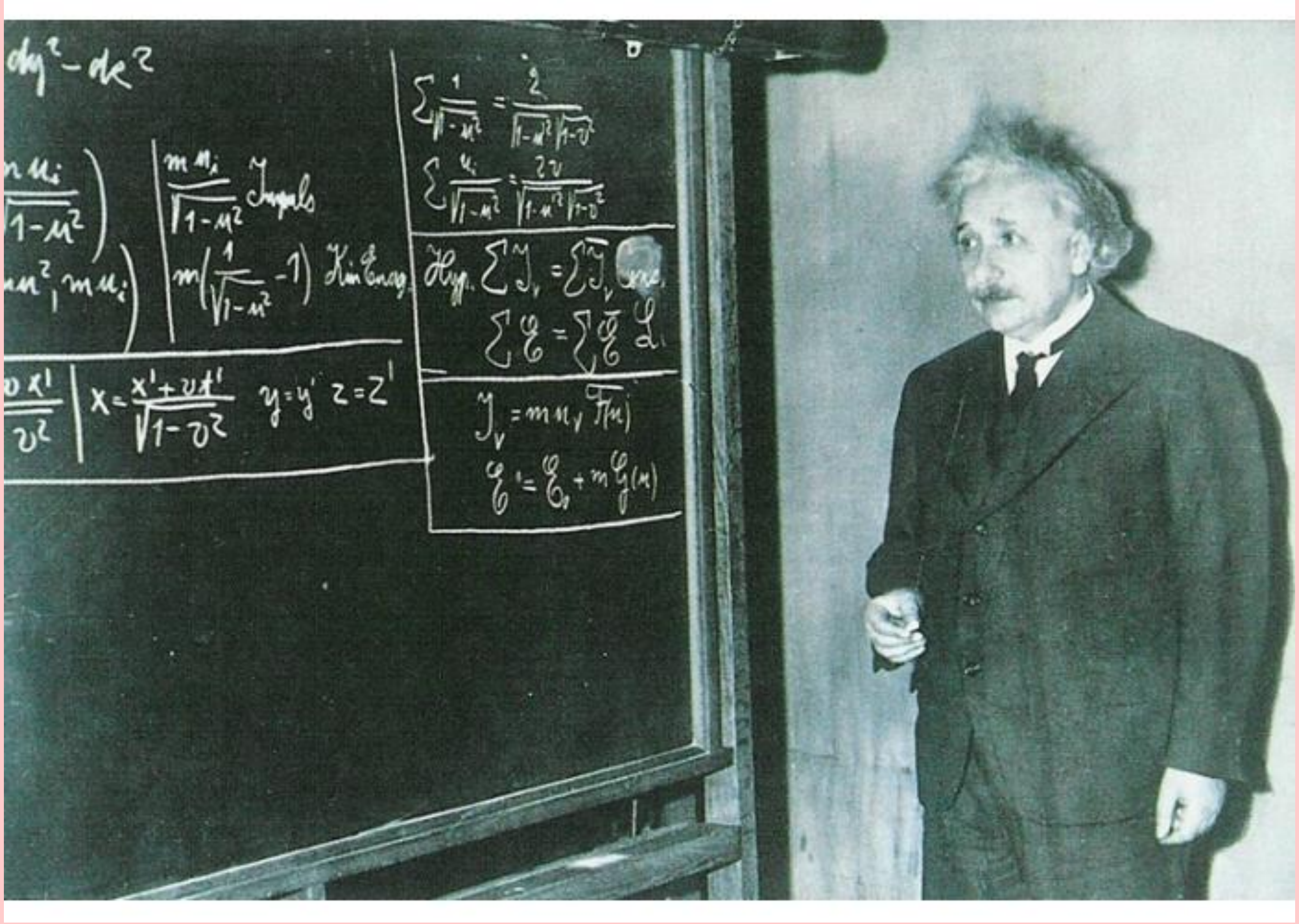
Лекція 6. Релятивістська кінематика

1. Постулати спеціальної теорії відносності.
2. Перетворення Лоренца.
3. Відносність проміжків часу і довжини в різних інерціальних системах.
4. Релятивістський закон додавання швидкостей.
5. Інваріант релятивістської кінематики.

Дослід Майкельсона з визначення швидкості світла



Альберт Ейнштейн (1879-1955).
Нобелівська премія 1921 р.

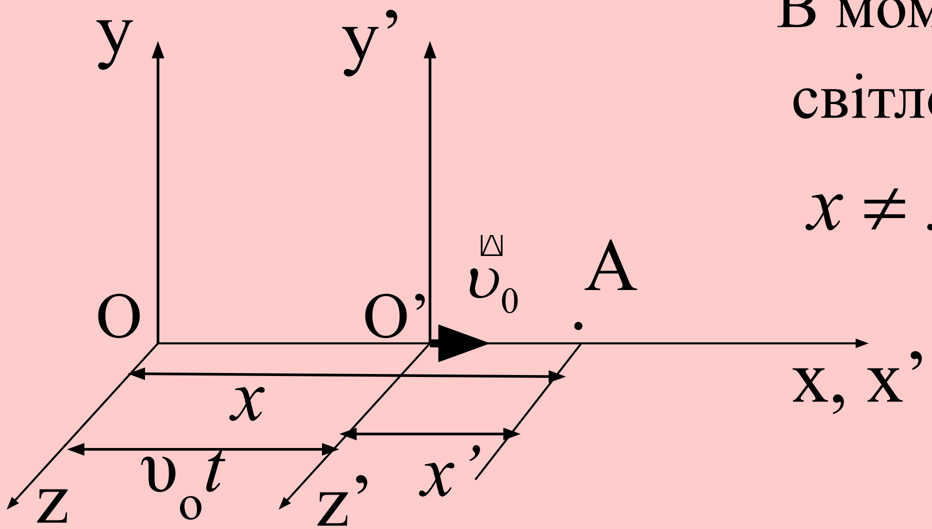


Постулати спеціальної теорії відносності

- 1. Принцип відносності: ніякі досліди, проведені в середині інерціальної системи відліку, не дають можливості виявити, чи знаходиться ця система в стані спокою, чи рухається рівномірно і прямолінійно; всі закони природи інваріантні відносно переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої.
- 2. Принцип інваріантності швидкості світла: швидкість світла у вакуумі не залежить від швидкості руху джерела світла або спостерігача і однакова у всіх інерціальних системах відліку.

Постулати спеціальної теорії відносності

- Розглянемо дві інерціальні системи *K* і *K’*. В початковий час *t*=*t*’, коли точки О і О’ збігаються, випромінюється імпульс світла.



В момент $x = ct, \;\; x' = ct'$

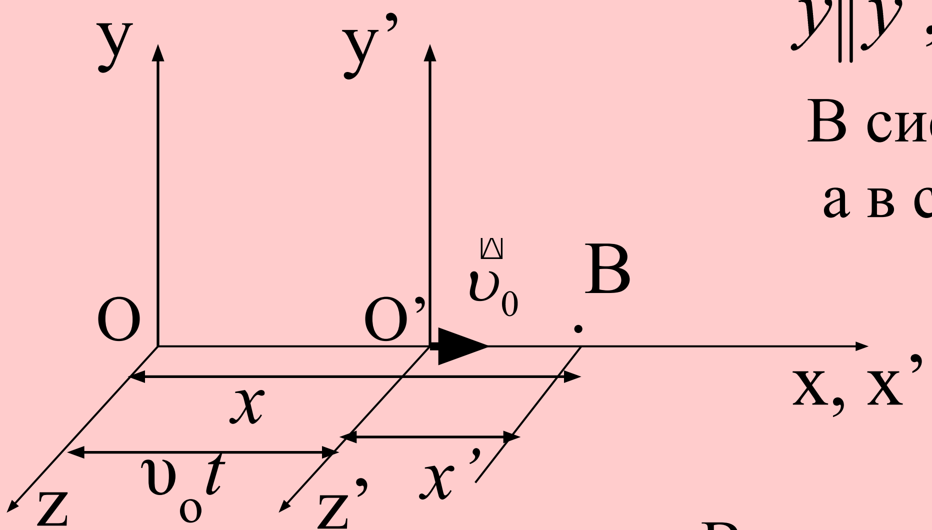
світло досягне точки А.

$$x \neq x', \;\; x' - x = c(t' - t).$$

Отже, $t' \neq t.$

Перетворення Лоренца.

- Розглянемо дві інерціальні системи *K* і *K’*. Система *K’* рухається зі швидкістю $\vec{\upsilon}_0$ вздовж осі *x*.



$$y \| y',\ z \| z'$$

В системі *K* $x_{O'} = \upsilon_0 t$,

а в системі *K’* $x'_O = -\upsilon_0 t'$.

В перетворенні Галілея $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{\upsilon}_0$,

що суперечить принципу c=const.

Перетворення Лоренца.

$$y = \varepsilon y', \quad y' = \varepsilon y, \quad \varepsilon^2 = 1, \; \varepsilon = \pm 1.$$

$$x = ct, \quad x' = ct'$$

$$x = \gamma\left(x' + \upsilon_0 t'\right) \qquad x' = \gamma\left(x - \upsilon_0 t\right)$$

$$ct = \gamma\left(ct' + \upsilon_0 t'\right) \qquad ct' = \gamma\left(ct - \upsilon_0 t\right)$$ - перемножимо

$$c^2 = \gamma^2\left(c^2 - \upsilon_o^2\right) \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_o^2}{c^2}}}$$

Перетворення Лоренца.

$$x = \frac{x' + \upsilon_0 t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x' = \frac{x - \upsilon_0 t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{\upsilon_0}{c}$$

$$t = \frac{t' + \dfrac{\upsilon_0}{c^2} x'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t' + \dfrac{\beta}{c} x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t' = \frac{t - \dfrac{\upsilon_0}{c^2} x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t - \dfrac{\beta}{c} x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x = \frac{x' + \beta(ct')}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (ct) = \frac{(ct') + \beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Відносність проміжків часу і довжини і різних системах

Нехай в системі *K* в точках x_1 і x_2 одночасно відбулись дві події в момент часу $t_1 = t_2 = t_0$.

$$t_1' = \frac{t_0 - \frac{\beta}{c} x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t_2' = \frac{t_0 - \frac{\beta}{c} x_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t_2' - t_1' = \frac{\frac{\beta}{c}\left(x_1 - x_2\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad t_2' \neq t_1'$$

Відносність проміжків часу і довжини в різних системах

- Якщо $x_1 \neq x_2$

$$x_1' = \frac{x_1 - \upsilon_0 t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x_2' = \frac{x_2 - \upsilon_0 t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \text{то і} \quad x_1' \neq x_2'$$

Нехай в деякій точці, нерухомій в системі *К*, відбувається подія з тривалістю $\tau = t_2 - t_1$

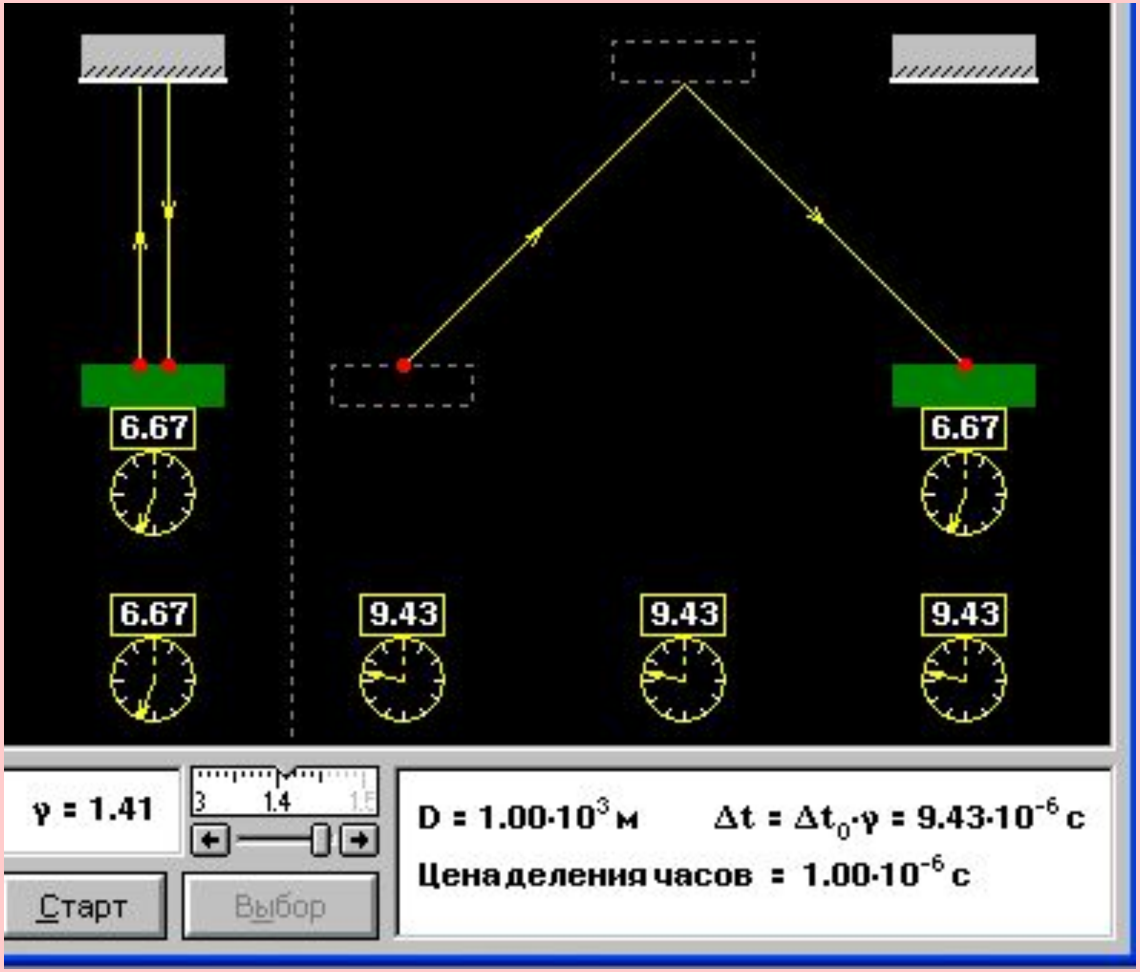
Тоді в системі *К’*

$$\boxed{\tau' = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - \frac{\upsilon_0}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t_1 - \frac{\upsilon_0}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

Отже, $\tau < \tau'$.

<u>Тривалість мінімальна в системі, зв’язаній з тілом</u>.

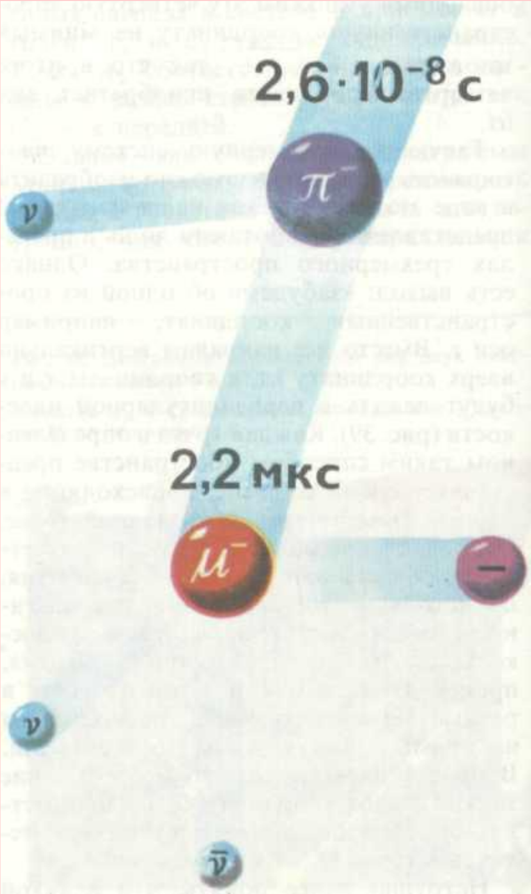
Відносність проміжків часу

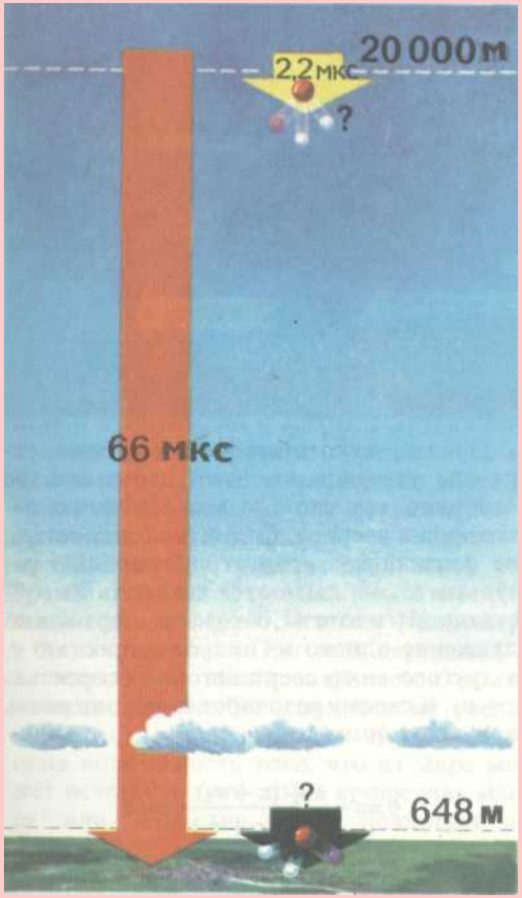


Задача

- Апаратура, яка знаходиться на Землі, зареєструвала удари блискавки на висоті $7 \cdot 10^3$ м і $2 \cdot 10^3$ м як одночасну подію. Який інтервал між блискавками зареєструвала апаратура на космічному кораблі, який віддаляється від Землі зі швидкістю, що дорівнює 0,8 від швидкості світла?

Відносність проміжків часу і довжини в різних системах





Відносність проміжків часу і довжини і різних системах

- Нехай лінійка довжиною $\ell_0 = x_2' - x_1'$ рухається разом з системою *К'*. Довжина в системі *К*:

$$\ell_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - \upsilon_0 t}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1 - \upsilon_0 t}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\ell}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\boxed{\ell = \ell_0\sqrt{1-\beta^2}}$$

Отже, <u>довжина лінійки максимальна в системі, в якій вона знаходиться в стані спокою</u>.

Поперечні розміри однакові у всіх інерціальних системах.

Задача

- Яку частину швидкості світла складає швидкість тіла, що рухається, якщо його релятивістське зменшення лінійних розмірів складає 70% ?

Релятивістський закон додавання швидкостей

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + \upsilon_0 dt'}{dt' + \frac{\upsilon_0}{c^2} dx'} = \frac{\upsilon'_x + \upsilon_0}{1 + \frac{\upsilon_0 \upsilon'_x}{c^2}}$$

$$\upsilon_y = \frac{dy'\sqrt{1-\beta^2}}{dt' + \frac{\upsilon_0 dx'}{c^2}} = \frac{\upsilon'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{\upsilon_0 \upsilon'_x}{c^2}}, \quad \upsilon_z = \frac{dz'\sqrt{1-\beta^2}}{dt' + \frac{\upsilon_0 dx'}{c^2}} = \frac{\upsilon'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{\upsilon_0 \upsilon'_x}{c^2}}$$

При υ’=c $\quad \upsilon_x = \dfrac{c + \upsilon_0}{1 + \frac{c\upsilon_0}{c^2}} = c$

При υ_o= υ’= c $\quad \upsilon_x = \dfrac{c + c}{1 + \frac{cc}{c^2}} = c$

Інваріант релятивістської кінематики

- Нехай відбулися дві події в точках ct_1, x_1, y_1, z_1 та ct_2, x_2, y_2, z_2. Введемо позначення $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$. Точки, які характеризуються 4 координатами, називаються світовими точками.
- Введемо інтервал: $\Delta S^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$
- Виявилось, що **величина ΔS^2 є інваріантом відносно перетворення координат**, тобто $\Delta S^2 = \Delta S'^2$.
- Величина власного інтервалу часу

$$\Delta \tau = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{1}{c} \sqrt{(c \Delta t)^2 - (\upsilon \Delta t)^2} =$$

$$= \frac{1}{c} \sqrt{(c \Delta t)^2 - (\Delta \Box)^2} = \frac{\Delta S}{c}$$