<u>Основы теории линейного программирования</u>

<u>Виды задач линейного программирования</u>

Общая задача линейного программирования (ЗЛП).

Необходимо найти вектор $x = (x1, x2, \ldots, xn) \in D \subset Rn$

$$C(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max\ (\min) \quad (1)$$

при выполнении следующих непрямых (структурных) ограничений:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n \;\; R_1 \quad b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n \;\; R_2 \quad b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n \;\; R_m \quad b_m \end{cases} \tag{2}$$

и прямых ограничений на переменные:

$$\alpha_j \le x_j \le \beta_j, \quad j = \overline{1, n} \tag{3}$$

Ri – один из возможных знаков отношений

$$R_i = \{ =, \quad \ge, \quad \le \}, \qquad i = \overline{1, m},$$

c_j , b_i , a_{ij} – заданные вещественные числа, $i = \overline{1, m};$ $j = \overline{1, n}$

Числа c_j – коэффициенты целевой функции;

элементы a_{ij} – коэффициенты матрицы ограничений;

числа b_i – правые части системы ограничений.

Границы изменения переменных α_j и β_j произвольные вещественные числа, $\alpha_j \geq -\infty$, $\beta_j \leq +\infty$.

Цель решения ЗЛП (1) – (3) найти оптимальный план задачи, т.е. такого плана, на котором достигается наибольшее (или наименьшее) значение целевой функции (1).

Производственная задача.

Предприятие может изготавливать *n* видов продукции, используя *m* видов ресурсов, запасы которых ограничены. Прибыль от реализации каждого вида продукции, различна. Нормативный расход *i*-го ресурса, затрачиваемого на производство единицы продукции *j*-го вида, составляет a_{ij} , $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$

Запасы ресурсов каждого вида: b_i . Прибыль от реализации единицы продукции *j*-го вида: c_j денежных единиц.

x_j количество единиц продукции j-го вида, $j = \overline{1, n}$,

запланированных к производству. Тогда прибыль:

$$C(x) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + ... + c_n \cdot x_n \to \max \qquad (4)$$

Для изготовления всей продукции потребуется $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j$

единиц ресурса i-го вида.

Т.к. запас i-го ресурса не превосходит величины b_i , $i = \overline{1, m}$

значит, имеем систему ограничений:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n \leq \quad b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n \leq \quad b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + ... + a_{mn} \cdot x_n \leq \quad b_m \end{cases} \qquad (5)$$

Выпуск продукции не может быть отрицательным:

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \qquad (6)$$

Построенная экономико-математическая модель (4), (5), (6) называется многопродуктовой моделью производственного планирования.

Пусть на предприятии выпускается один продукт разными технологическими способами. Количество технологических способов: n. a_{ij} характеризуют нормативный расход i-го вида ресурса при применении j-го технологического способа с единичной интенсивностью. b_i - наличие i-го ресурса, а cj – прибыль от реализации единицы продукции произведенной j-м способом, $i=\overline{1,m}; \quad j=\overline{1,n}$

Экономико-математическая модель этой задачи будет идентична модели (4), (5), (6). Но в этом случае она будет являться <u>однопродуктовой моделью производственного планирования.</u>

При этом модель (4), (5), (6) представляет собой *стандартную форму* записи задачи линейного программирования (ЗЛП).

Характеристика стандартной формы записи ЗЛП:

1. Целевая функция стремится к максимуму.

2. Все непрямые (структурные) ограничения имеют знаки отношений «меньше-равно» (≤).

3. Все переменные неотрицательны, $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

– технологическая матрица коэффициентов

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

– вектор удельной прибыли от реализации продукции

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

– вектор запасов ресурсов

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – вектор переменных

$$\begin{cases} C(x) = (c, x) \to \max \\ Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$$ – *матричная* форма записи стандартной ЗЛП:

(c, x) означает скалярное произведение векторов c и x.

Векторная форма записи стандартной ЗЛП получится, если введем обозначение векторов матрицы системы ограничений

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots\dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1,n}$$

$$\begin{cases} C(x) = (c, x) \to \max \\ A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n \le b \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0 \end{cases}$$

– *векторная* форма записи стандартной ЗЛП

Общая ЗЛП может быть легко сведена к стандартной форме записи при помощи четырех действий:

1. Структурные ограничения типа ″≥″ в общей ЗЛП заменяются на ограничения типа ″≤″ путем их умножения на (-1).
2. Структурные ограничения типа ″=″ в общей ЗЛП заменяются на неравенства типа ″≤″ с помощью вычитания из левой части равенств вновь введенных неотрицательных переменных.

3. Если в общей ЗЛП целевая функция стремиться к минимуму, нужно ее умножить на (-1). Полученная целевая функция будет стремиться к максимуму. При этом оптимальный план исходной задачи не изменится. Геометрически это будет выглядеть так:

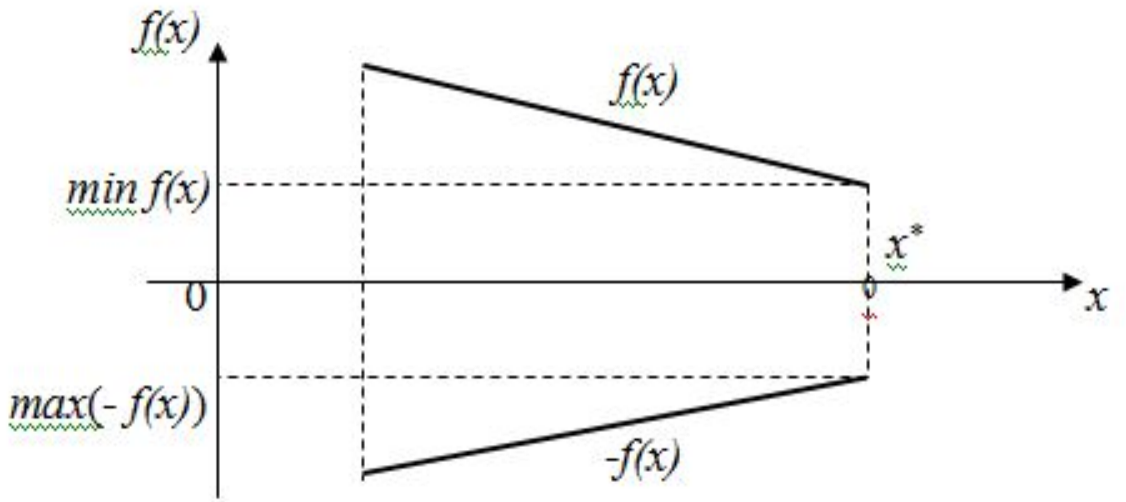

Рис. 1. Геометрическая иллюстрация замены знака в целевой функции

4. В стандартной форме записи ЗЛП переменные неотрицательные. Поэтому, если в общей ЗЛП переменная x_s не определена по знаку, то вводятся две новые неотрицательные переменные x_{s1} и x_{s2} . Тогда переменная x_s представляется как разность этих двух новых переменных

$$x_{s1} \geq 0,\ x_{s2} \geq 0; \quad x_s = x_{s1} - x_{s2}$$

П р и м е р.

$$C(x) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 \leq 15 \\ 3x_1 - 7x_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Введем две новые неотрицательные переменные

$$x_3^{'} \geq 0 \quad \text{и} \quad x_3^{''} \geq 0$$

и выразим через них x_3

$$x_3 = x_3^{'} - x_3^{''}$$

Вычтем из второго ограничения переменную $x_4 \geq 0$ и умножим третье ограничение на (-1).

Тогда стандартная форма записи ЗЛП:

$$C_1(x) = -4x_1 - 6x_2 + 2(x_3^{'} - x_3^{''}) \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 \leq 15 \\ 3x_1 - 7x_2 - x_4 \leq 4 \\ -2x_1 - x_2 - x_3^{'} + x_3^{''} \leq -12 \\ x_1, x_2, x_3^{'}, x_3^{''}, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Каноническая форма записи ЗЛП имеет следующий вид:

$$C(x) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n \to \max \qquad (7)$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases} \qquad (8)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n} \qquad (9)$$

<u>Характеристика канонической формы записи ЗЛП:</u>

1. Целевая функция стремится к максимуму.
2. Непрямые (структурные) ограничения имеют знаки отношений «равно».
3. Все переменные неотрицательны.

В канонической ЗЛП всегда число ограничений строго меньше числа переменных, $m < n$. Это связано со следующими обстоятельствами:

а) если $m = n$, то каноническая ЗЛП как задача оптимизации теряет смысл, поскольку, если она имеет решение, то это решение единственное.

б) если $m > n$ *, то система уравнений переопределена и не имеет решения.*

Сведение стандартной формы ЗЛП к канонической.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m} \qquad (10)$$

Введем дополнительную переменную x_{n+i} :

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \qquad (11)$$

Из (10) следует, что $x_{n+i} \geq 0$. С учетом (11) выражение (10) превращается в равенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = \overline{1,m}$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11},\ldots,\ a_{1n},\ 1,\ 0,\ldots,\ 0 \\ a_{21},\ldots,\ a_{2n},\ 0,\ 1,\ldots,\ 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1},\ldots,\ a_{mn},\ 0,\ 0,\ldots,\ 1 \end{pmatrix}$$

- матрица коэффициентов системы

Введение дополнительных переменных в стандартную форму ЗЛП преобразовывает ЗЛП (12) в ЗЛП (13).

$$\begin{cases} (c, x) \to \max \\ Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad (12)$$

$$\begin{cases} (\overline{c}, \overline{x}) \to \max \\ \overline{A} \cdot \overline{x} = b \\ \overline{x} \ge 0 \end{cases} \qquad (13)$$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – вектор переменных задачи (12);

$$\bar{x} = (\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_n}_{\text{Основные переменные}}, \underbrace{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}}_{\text{Дополнительные переменные}})$$

– вектор переменных ЗЛП (13)

$$\bar{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n, 0, 0, \ldots, 0)$$

– вектор коэффициентов целевой функции ЗЛП (13).

Каноническая ЗЛП включает m уравнений и $N = m + n$ неизвестных. Дополнительные переменные $xn+1$, $xn+2$,…, $xn+m$ рассматриваются наравне с основными переменными.

Основные определения

Рассмотрим ЗЛП в стандартной форме (14) и ЗЛП в канонической форме (15).

$$\begin{cases} C(x) = (c, x) \to \max \\ Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad (14) \qquad\qquad \begin{cases} C(x) = (c, x) \to \max \\ Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad (15)$$

Опр.1 Множество векторов $D = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n): \quad Ax \le b, x \ge 0\}$ называется *множеством допустимых планов* задачи (14) или *допустимым множеством.*

Опр.2 Множество векторов $D = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n): \quad Ax = b, x \geq 0 \}$ называется *множеством допустимых планов* задачи (15) или *допустимым множеством.*

Опр.3 Вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in D$ (из множества допустимых планов) называется *оптимальным планом* задачи (14), или задачи (15), если для любого вектора *x* из допустимого множества выполняется неравенство $C(x) \leq C(x^*)$.

Опр.4 Пусть $x \in D$ – допустимый план ЗЛП (14) или (15). *Носителем плана x* называется множество индексов

$$\sigma = \sigma(x) = \{i: \quad x_i > 0, \quad \text{где} \quad i = \overline{1, n}\}.$$

Замечание. Неотрицательные переменные в допустимом плане могут быть расположены в произвольном порядке.

Опр.5 Число положительных компонент плана *x* будем называть *мощностью носителя плана* и обозначать $|\sigma(x)|$ или $|\sigma|$.

Опр.6 Если векторы $\{A_{i_k}\}$, где $k=\overline{1,m}$, а *m* – число уравнений ЗЛП (15), являются линейно независимыми векторами, то будем говорить, что данные векторы образуют *базис* ЗЛП.

Обозначим множество индексов $\{i_1, i_2, ..., i_m\}$ через σ, тогда базис будем обозначать таким образом $\{A_k\}_{k \in \sigma}$ или просто *Aσ* .

Векторы *Ak* называются *базисными векторами*, а сама матрица *Aσ* называется *базисной матрицей*.

Опр.7 Рассмотрим векторы $A_i \in R_m, \quad i = \overline{1, k}$, где *k* некоторое целое число. Если равенство $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_k A_k = 0$ возможно только в том случае, когда числа $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$, то векторы *A*1, *A*2, …, *Ak* называются *линейно независимыми*. Векторы *A*1, *A*2, …, *Ak* могут быть линейно независимыми только, если *k* ≤ *m*.

$$
\begin{cases}
C(x) = (c, x) \to \max \\
A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = b \\
x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{cases} , \qquad (16)
$$

$$
A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots\ldots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, n}
$$

Опр.8 Пусть $x \in D$ – допустимый план ЗЛП (16) и σ – его носитель. Если векторы *Ai* , *i*∈*σ*, линейно независимые, то план *x* называется *базисным допустимым планом* (БДП) или *базисным допустимым решением* (БДР).

Базисный план называется *невырожденным*, если $|\sigma| = m$.

Базисный план называется вырожденным, если $|\sigma| < m$.

П р и м е р.

$$C(x) = 5x_1 + 7x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 18 \\ 5x_1 - 4x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Приведем ее к канонической форме записи:

$$C(x) = 5x_1 + 7x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 18 \\ 5x_1 - 4x_2 + \quad x_4 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

В данной задаче имеются следующие векторы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*A*3, *A*4 – единичные векторы, которые являются линейно независимыми, следовательно, они образуют базис ЗЛП.

Вектор $x = (0, 0, 18, 2)$ – это БДП.