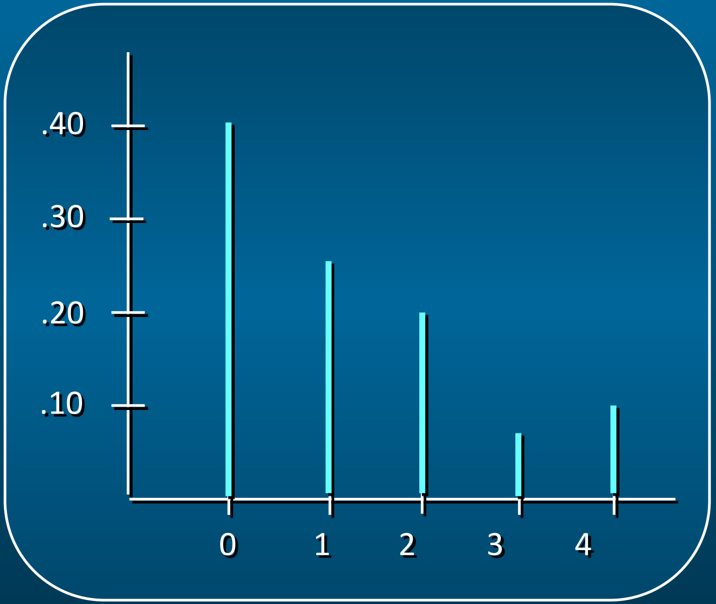
Модуль 1, Лекція 5

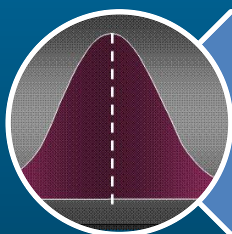
Числові характеристики випадкових величин



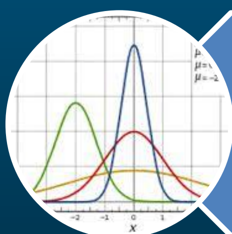
План

Математичне сподівання та його властивості.

Дисперсія, середнє квадратичне відхилення та їх властивості.



Мода і медіана та їх властивості.



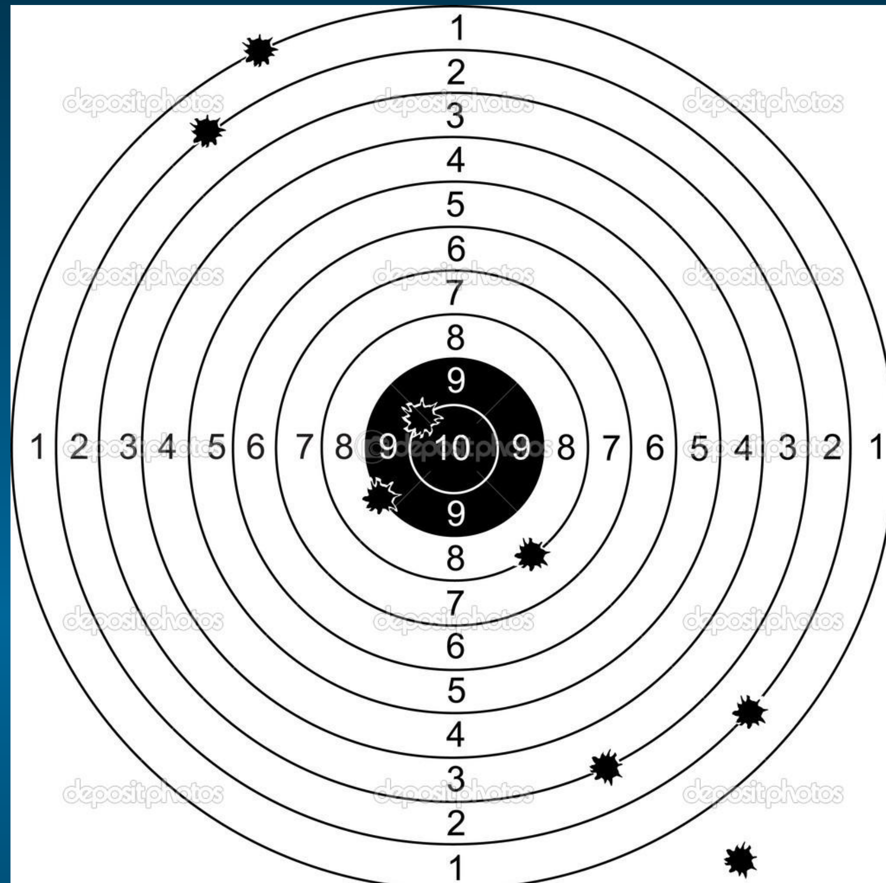
Початкові і центральні моменти; асиметрія, ексцес та їх властивості.

Числові характеристики

Закон розподілу ймовірностей дає повну інформацію про випадкові величини.

Але часто достатньо знати лише певні параметри, що характеризують їх істотні ознаки.

Характеристики, що виражають в стислій формі найістотніші особливості закону розподілу випадкової величини, називаються <u>числовими характеристиками випадкової величини</u>.



x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}

Математичне сподівання

<u>Математичним сподіванням</u>
дискретної випадкової величини X, називається ряд

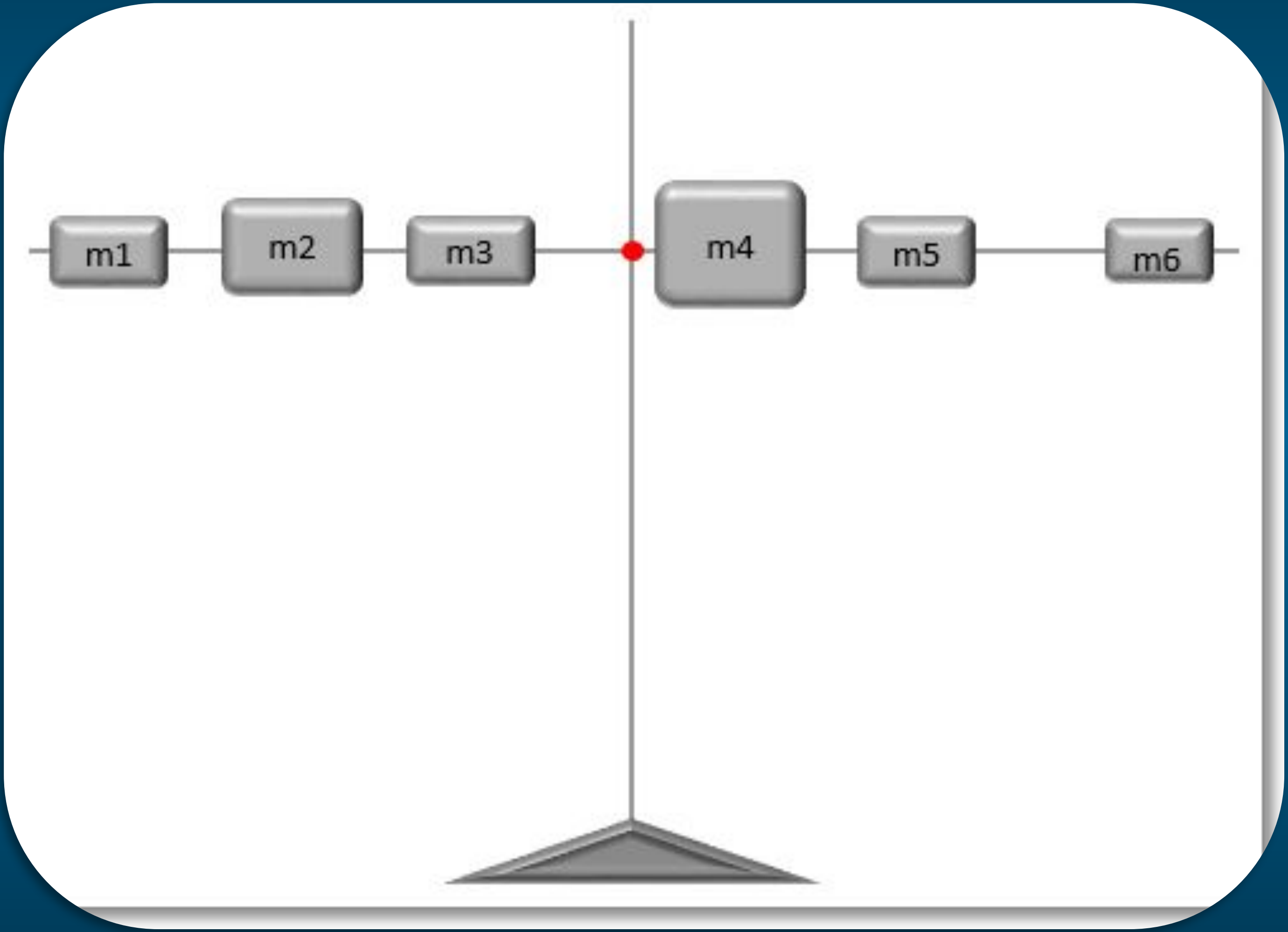
$$M(X) = \Sigma x_i p_i$$

<u>Математичним сподіванням</u>
неперервної випадкової величини X, називається інтеграл

$$M(X) = \int x f(x) dx$$

Термін «математичне сподівання» випадкової величини X
є синонімом терміна <u>«середнє значення»</u> цієї величини.

Математичне сподівання



Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання від сталої величини *C*
дорівнює самі

$$M(C) = C$$

2.

$$M(CX) = CM(X)$$

3.

$$M(AX+B) = AM(X)+B$$

Приклад 1.

Закони розподілу випадкових величин X і Y задані таблицями:

x_i	– 0,5	– 0,1	0,1	0,5
p_i	0,4	0,1	0,1	0,4

y_j	– 100	– 80	– 10	10	10	80
p_j	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,2

$$M(X)=\sum_{s=1}^{4} x_i p_i = -0{,}5\cdot 0{,}4 - 0{,}1\cdot 0{,}1 + 0{,}1\cdot 0{,}1 + 0{,}5\cdot 0{,}4 =$$

$$= -0{,}2 - 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}2 = 0;$$

$$M(Y)=\sum_{j=1}^{6} y_j p_j = -100\cdot 0{,}1 - 80\cdot 0{,}2 - 10\cdot 0{,}2 + 10\cdot 0{,}2 + 80\cdot 0{,}2 + 100\cdot 0{,}1 =$$

$$= -10 - 16 - 2 + 2 + 16 + 10 = 0.$$

Дисперсія та середнє квадратичне

Математичне сподівання не дає повної інформації про випадкову величину – воно не характеризує міру розсіювання.

Математичне сподівання ще називають центром розсіювання.

Для вимірювання розсіювання вводиться числова характеристика, яку називають дисперсією.

Дисперсія

Для визначення дисперсії розглянемо відхилення
випадкової вел … математичного
сподівання

$$X - M(X)$$

Математичне сподівання такого відхилення випадкової величини X завжди дорівнює нулю:

$$M(X-M(X))=M(X)-M(M(X))=M(X)-M(X)=0$$

Отже, відхилення не може бути мірою розсіювання випадкової величини.

Дисперсія

Дисперсією випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини

$$D(X) = M(X - M(X))^2$$

Для дискретної випадкової величини X:

$$D(X) = \Sigma(x_i - M(X))^2 p_i$$

Для неперервної випадкової величини X:

$$D(X) = \int (x - M(X))^2 f(x)\,dx$$

Властивості дисперсії

1. $D(C) = 0$

2. $D(CX) = C^2 D(X)$

3. $D(AX+B) = A^2 D(X)$

$$D(C) = M(C - M(C))^2 = M(C-C) = M(0) = 0$$

$$D(AX+B) = M(AX+B-M(AX+B))^2 =$$
$$= M(AX+B-AM(X)-B)^2 = M(AX-AM(X))^2 =$$
$$= A^2 M(X-M(X))^2 = A^2 D(X)$$

Властивості дисперсії

Дисперсію можна обчислити і за такою формулою:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X)$$

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = M(X^2 - 2M(X)X + M^2(X)) =$$

$$= M(X^2) - 2M(X)M(X) + M^2(X)) =$$

$$= M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X)) = M(X^2) - M^2(X)$$

Дисперсія та середнє квадратичне

Отже, дисперсія характеризує розсіювання випадкової величини відносно свого математичного сподівання.

Якщо випадкова величина виміряна в деяких одиницях, то дисперсія вимірюватиметься в цих самих одиницях, але в квадраті.

Тому доцільно мати числову характеристику такої самої вимірності, як і випадкова величина.

Такою числовою характеристикою є

<u>середнє квадратичне відхилення</u>.

Дисперсія та середнє квадратичне

<u>Середнім квадратичним відхиленням</u> випадкової величини X називають корінь квадратний із дисперсії:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

Приклад 2.

Закон розподілу випадкової величини X задано таблицею, обчислити D(X), σ(X):

x_i	– 4	– 2	1	2	4	6
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Розв’язання:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{6} x_i p_i \right)^2;$$

$$M(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = -4 \cdot 0{,}1 - 2 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}1 =$$

$$= -0{,}4 - 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}6 = 0{,}9;$$

Приклад 2.

x_i	– 4	– 2	1	2	4	6
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Продовження:

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{6} x_i^{\,2} p_i = 16 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 + 16 \cdot 0{,}1 + 36 \cdot 0{,}1 =$$

$$= 1{,}6 + 0{,}8 + 0{,}3 + 0{,}8 + 1{,}6 + 3{,}6 = 8{,}7;$$

$$D(X) = 8{,}7 - (0{,}9)^2 = 8{,}7 - 0{,}81 = 7{,}89;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{7{,}89} \approx 2{,}8.$$

Мода та медіана випадкової величини

Модою (Мо) випадкової величини Х називається найімовірніше її значення.

(Таке значення, що має найбільшу ймовірність появи)

Медіана (Ме) випадкової величини – таке її значення, відносно якого рівноймовірно одержання більшого або меншого значення випадкової величини, тобто:

$$P(X<Me)=P(X\geq Me)$$

Медіана – це абсциса точки, в якій площа під кривою розподілу ділиться навпіл. Медіана визначається як корінь рівняння :

$$F(x)= 0,5$$

Початкові та центральні моменти

Більш загальною формою числових характеристик випадкових величин є <u>моменти k-го порядку</u>.

Моментом k-го порядку випадкової величини називається математичне сподівання k-го степеня відхилення випадкової величини від деякої сталої величини *a*:

$$M[(X-a)^k]$$

Якщо *a*=0, то момент називається ***<u>початковим</u>***

$$\eta_k = M[X^k]$$

Якщо *a*=M(X), то момент називається ***<u>центральним</u>***

$$\mu_k = M[(X-M(X))^k]$$

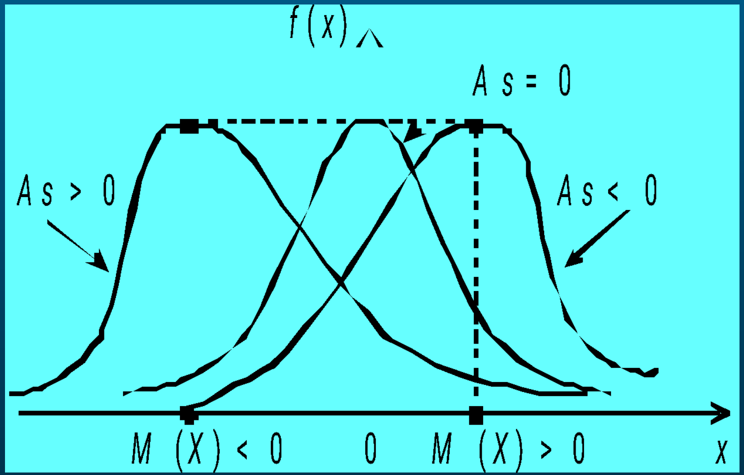
Асиметрія і ексцес

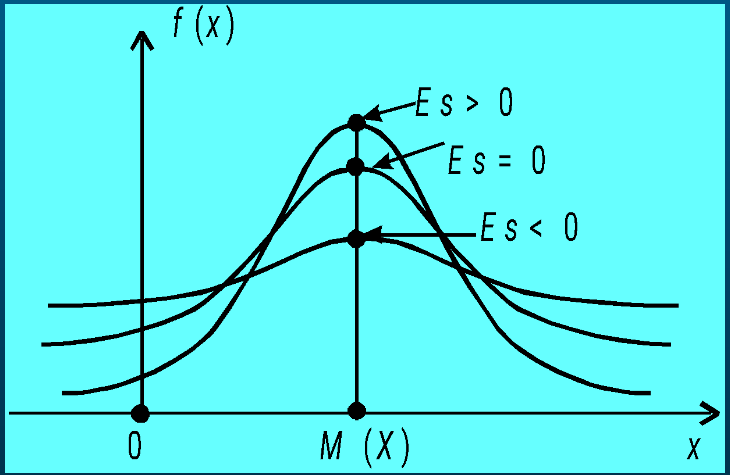
Коефіцієнт асиметрії (зкошеності) характеризує асиметрію графіка функції розподілу

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Коефіцієнт ексцесу характеризує гостровершинність кривої розподілу

$$Es = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$





Дякую за увагу!