3.1.3 Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная.

3.1.4 Угол между прямой и плоскостью.

3.2.1 Параллельность плоскостей.

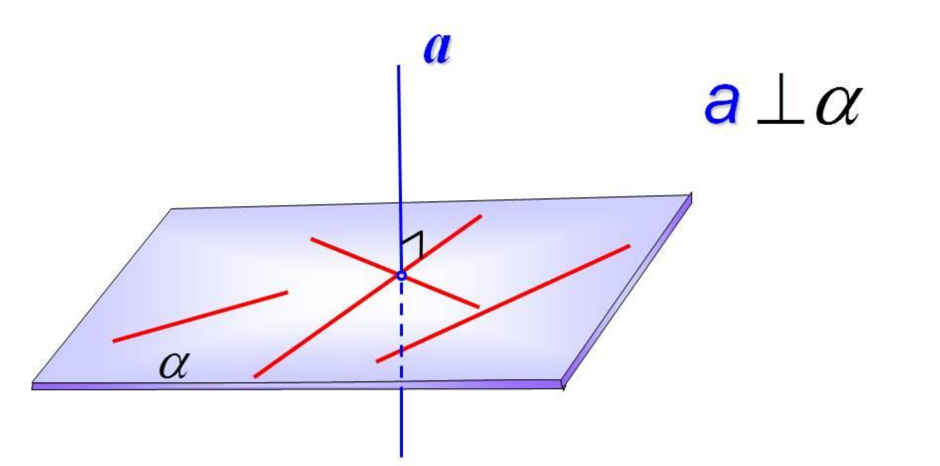
3.2.2 Двугранный угол. Угол между плоскостями.

3.2.3 Перпендикулярность двух плоскостей.

Две прямые в пространстве называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90°.

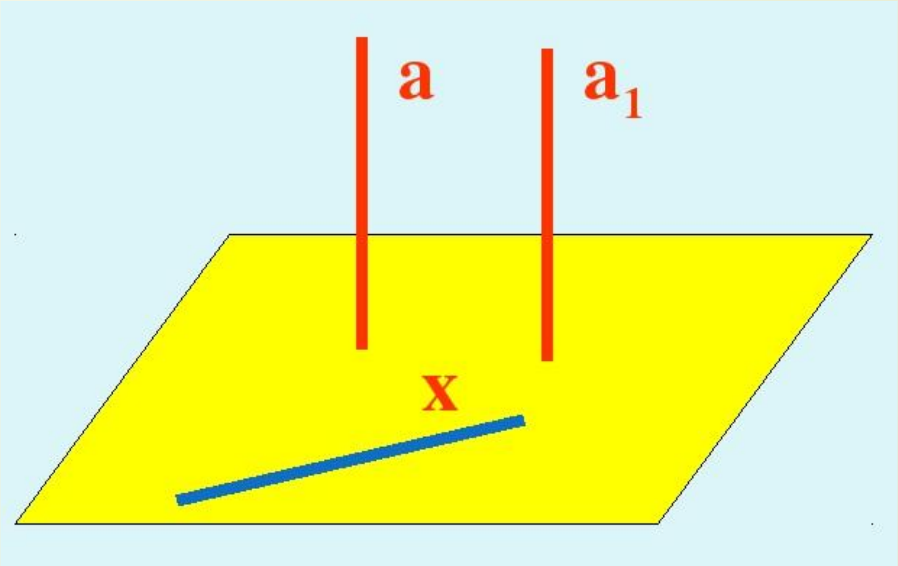
Лемма. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

Прямая называется **перпендикулярной** к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости.



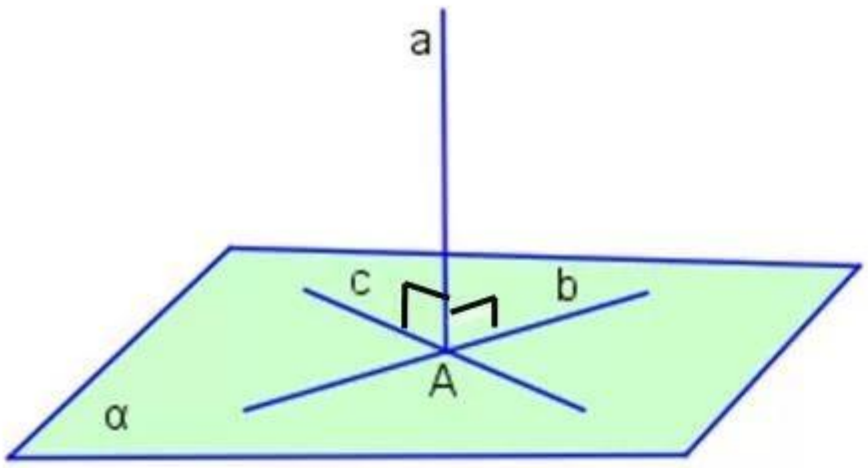
Связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости.

1. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.
2. Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.



Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема. Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в одной плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.



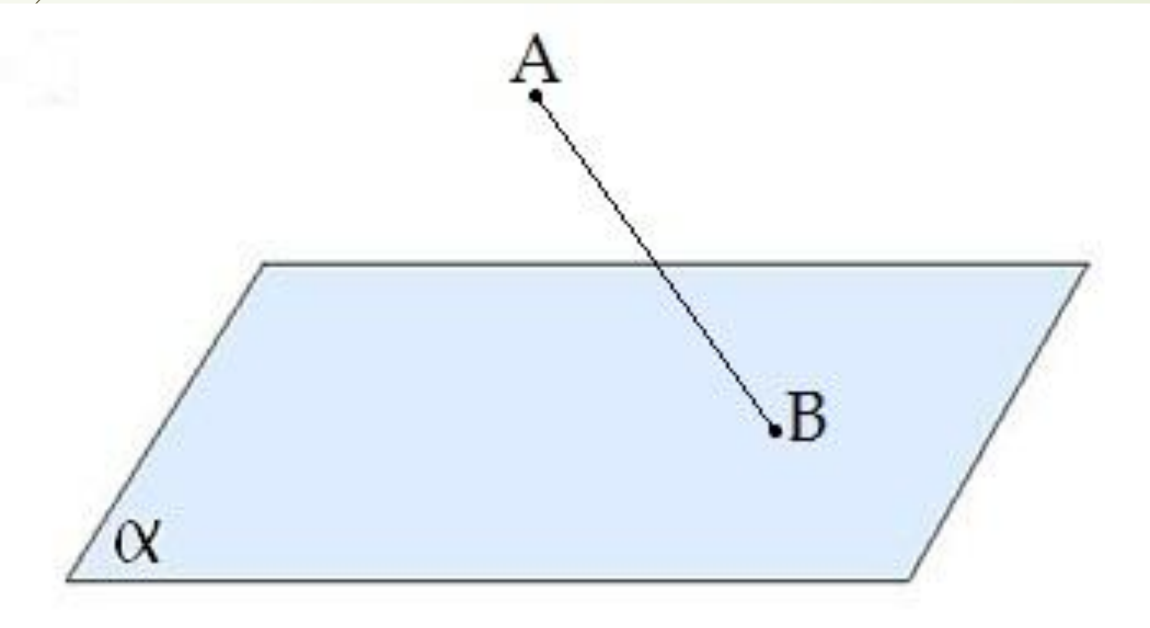
$$\left.\begin{array}{l} b \in \alpha \\ c \in \alpha \\ a \perp b \\ a \perp c \\ c \cap b = A \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp \alpha$$

Замечания.

1. Через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой, и притом единственная.
2. Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.
3. Если две плоскости перпендикулярны к прямой, то они параллельны.

Наклонной, проведённой из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости.

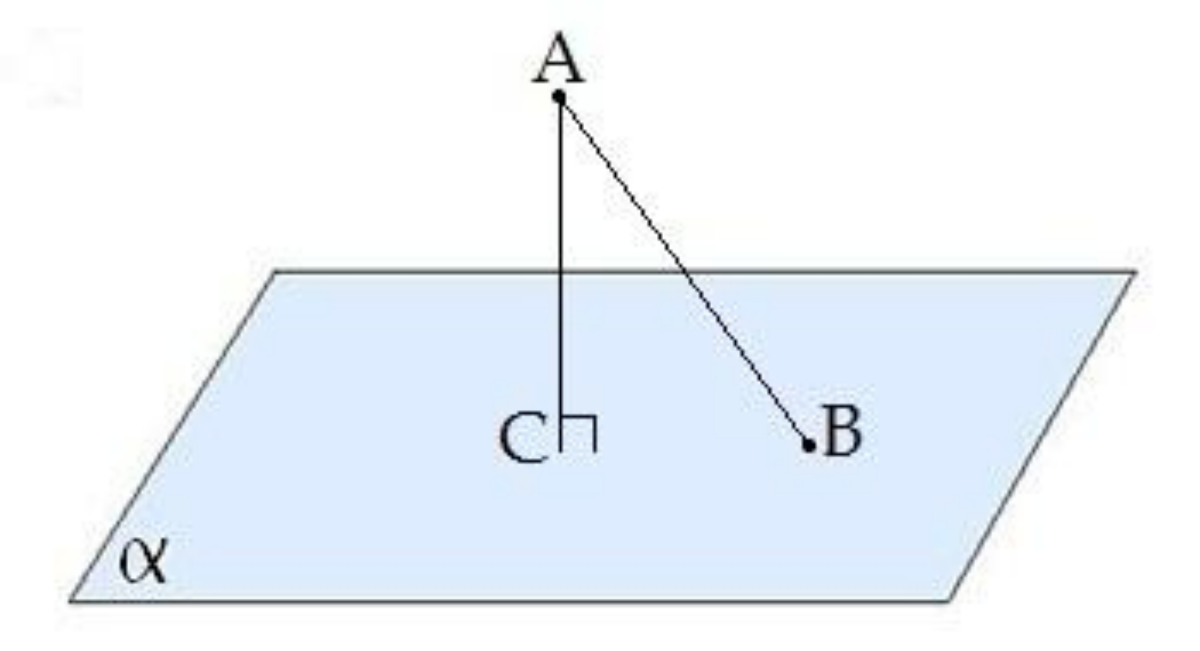
Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется **основанием наклонной.**



AB - наклонная
B - основание наклонной

Перпендикуляром, проведённым из данной точки к данной плоскости, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости.

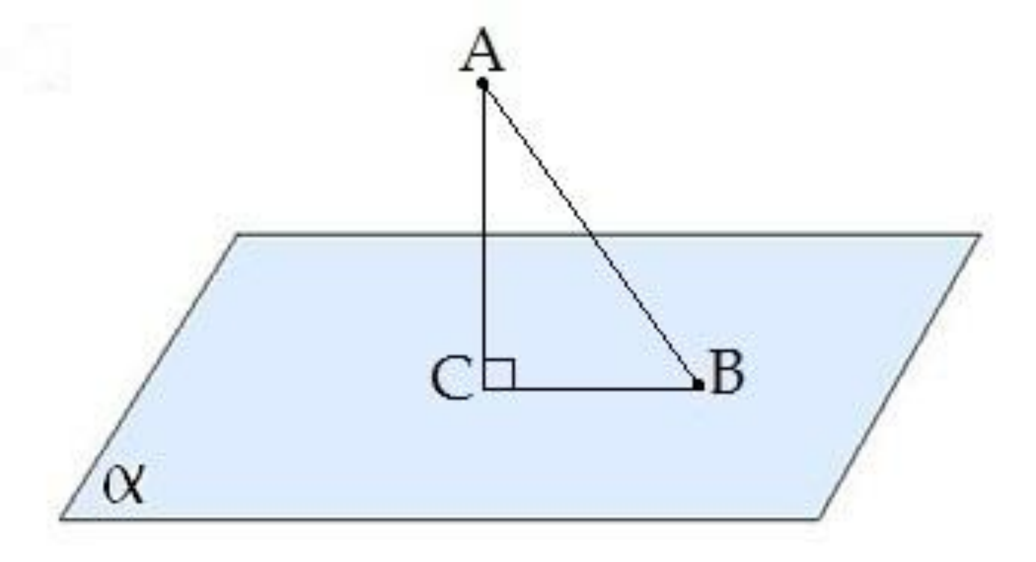
Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется **основанием перпендикуляра**.



AC- перпендикуляр
C-основание перпендикуляра

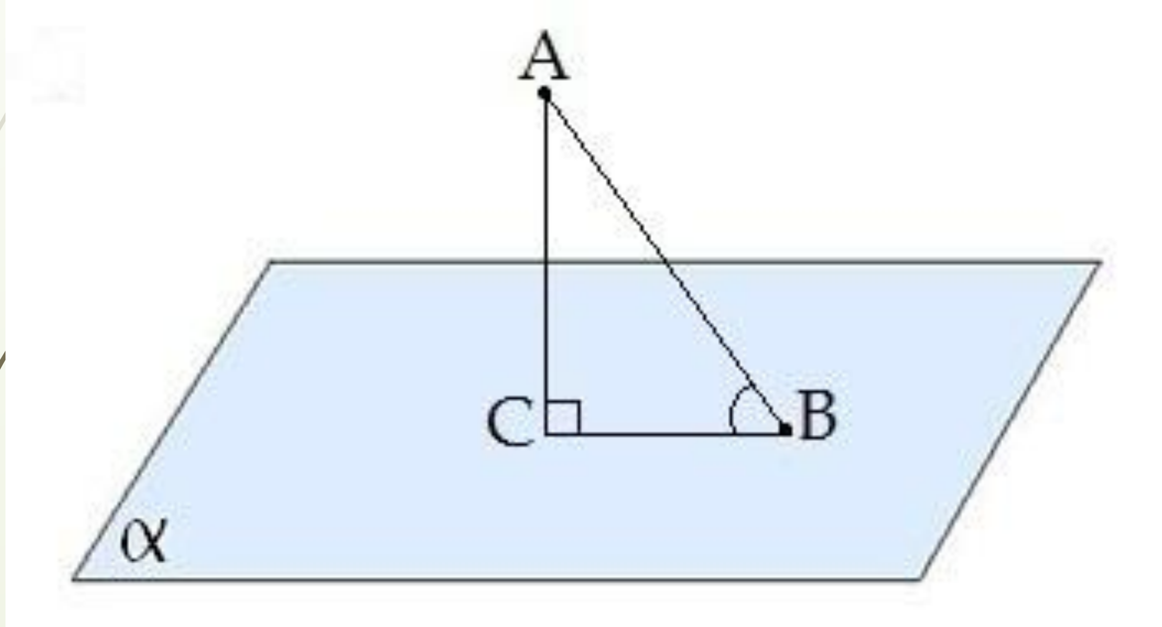
Расстоянием от точки до плоскости называется **длина перпендикуляра**, проведённого из этой точки к плоскости.

Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведённых из одной и той же точки, называется **проекцией наклонной**.

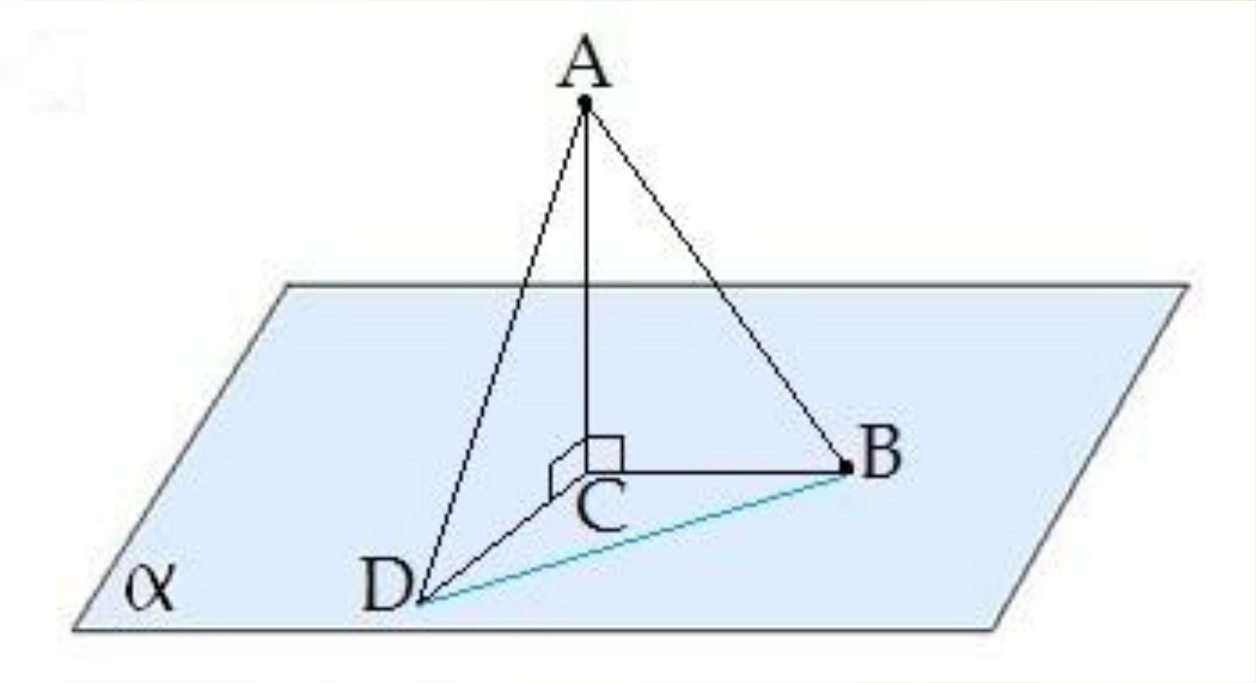


СВ-проекция наклонной АВ на плоскость α

Углом между наклонной и плоскостью называется угол между этой наклонной и её проекцией на плоскость.



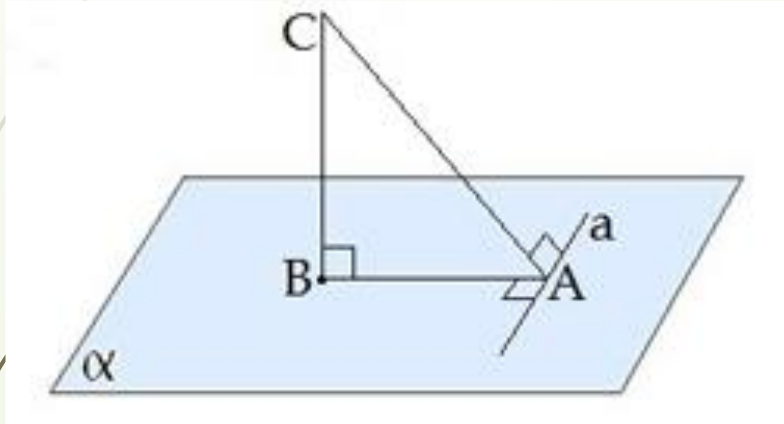
<CBA – угол между наклонной AB и плоскостью α.



Если AD>AB, то DC>BC.
Если из данной точки к данной плоскости провести несколько наклонных, то большей наклонной соответствует большая проекция.
<DAD – угол между наклонными
<DCB – угол между проекциями.
Отрезок DB – расстояние между основаниями наклонных.

Теорема о трёх перпендикулярах:

Если прямая, проведённая на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна её проекции, то она перпендикулярна и самой наклонной.

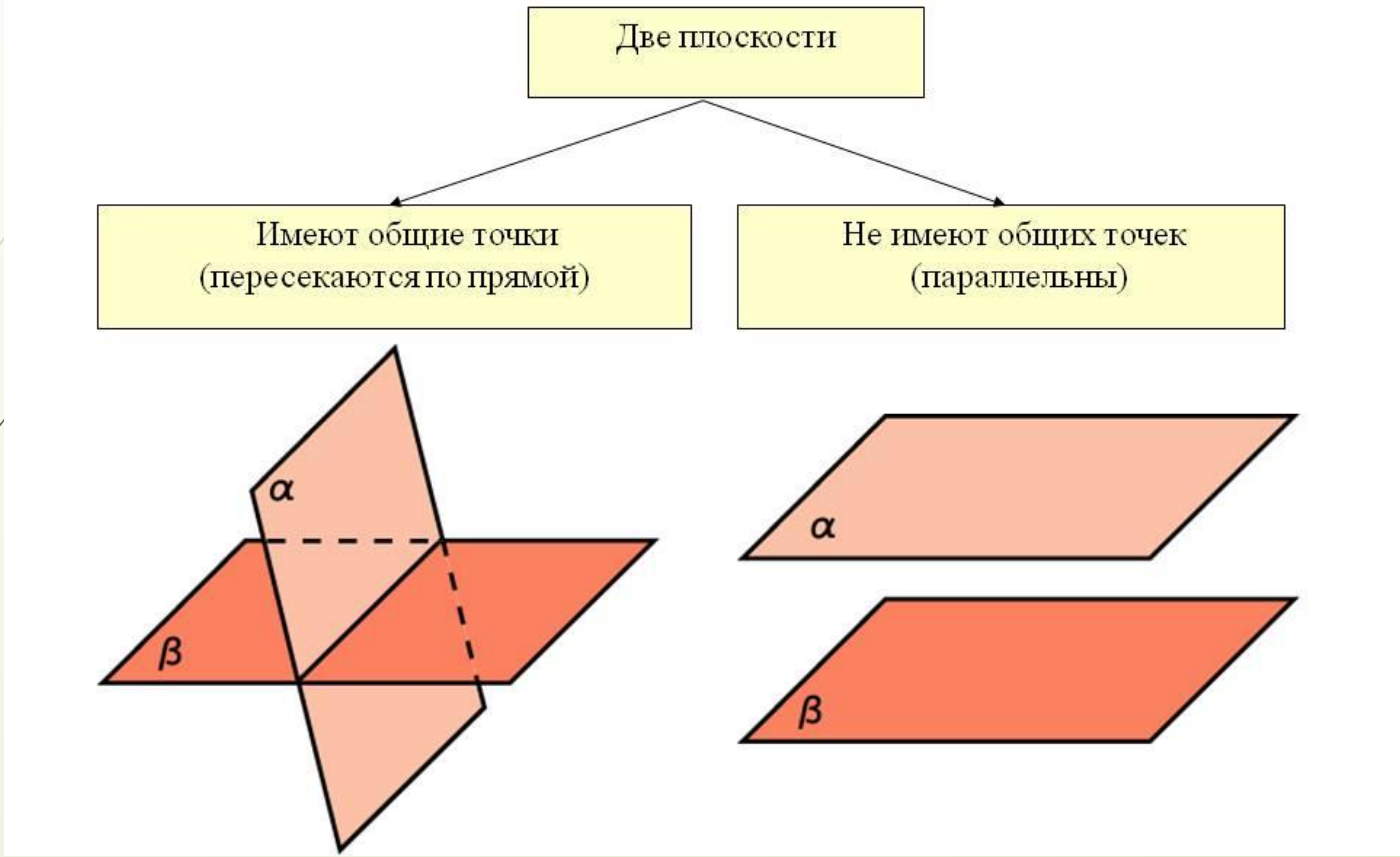


$$\left.\begin{array}{l} a \perp AB \\ BC \perp BA \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp CA$$

Обратная теорема:

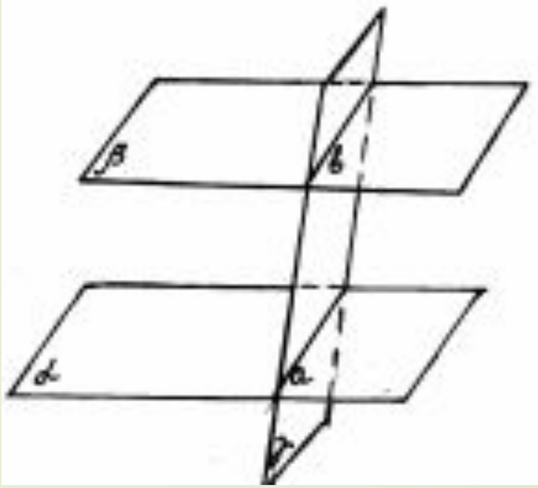
если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

Случаи взаимного расположения плоскостей:

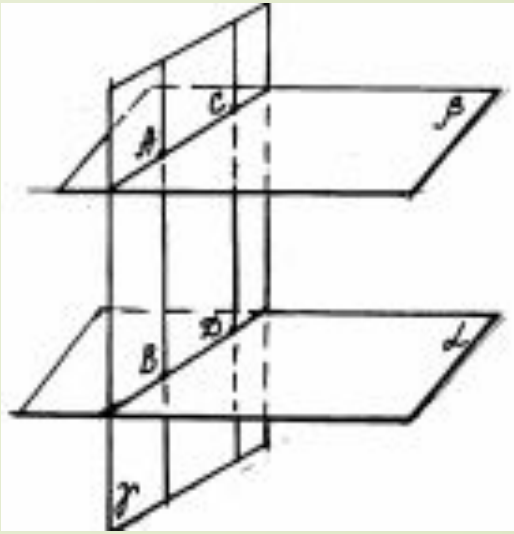


Свойства параллельных плоскостей:

1. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.



2. Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.

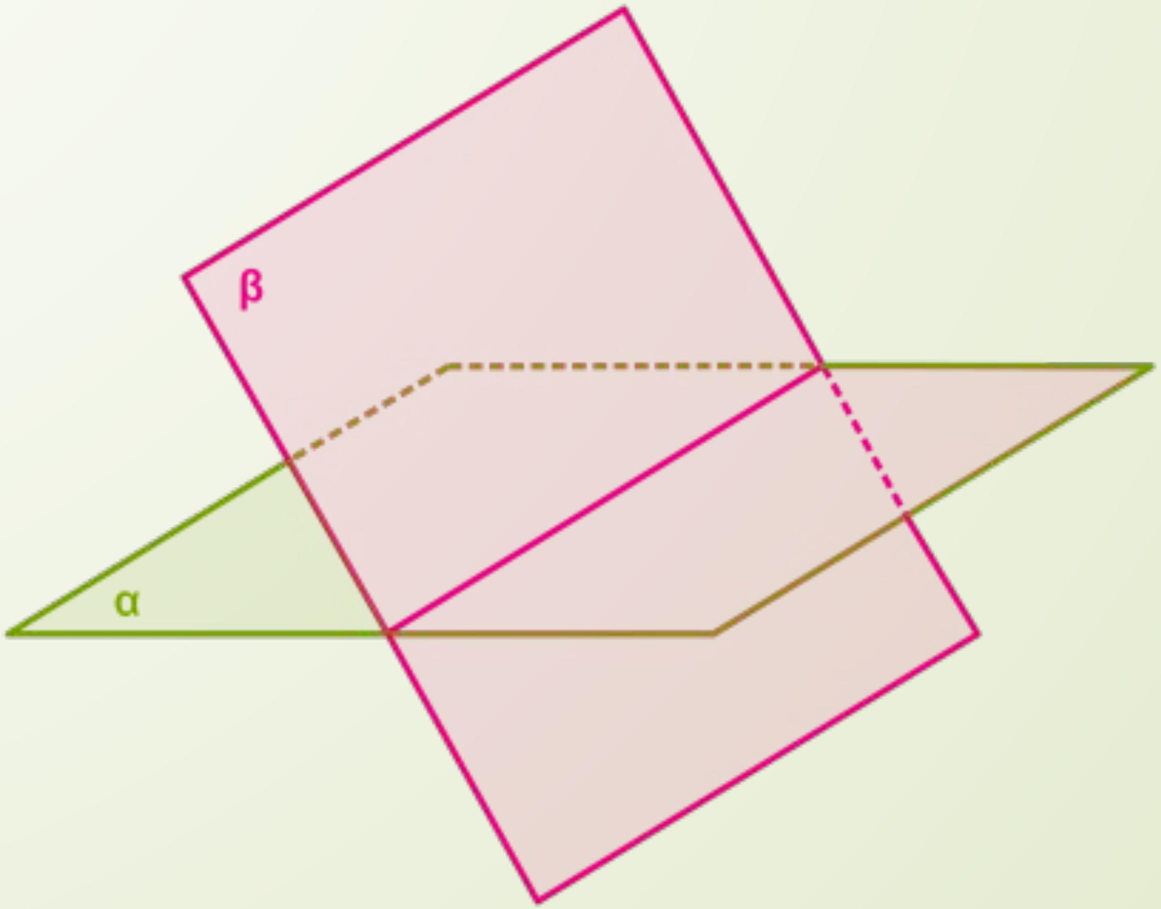


Теорема 1:
Две плоскости параллельны, если одна из них параллельна двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости.

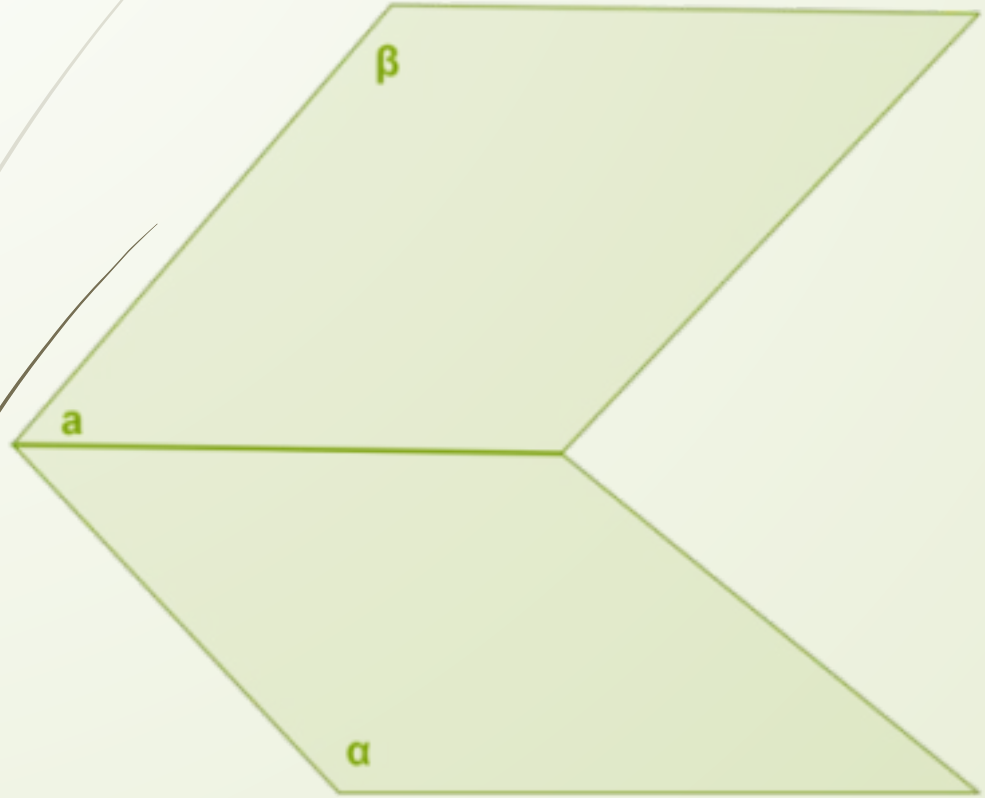
Теорема 2:
Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость параллельную данной, и притом только одну.

Теорема 3:
Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны

Двугранный угол — это часть пространства, заключённая между двумя полуплоскостями, имеющими одну общую границу.



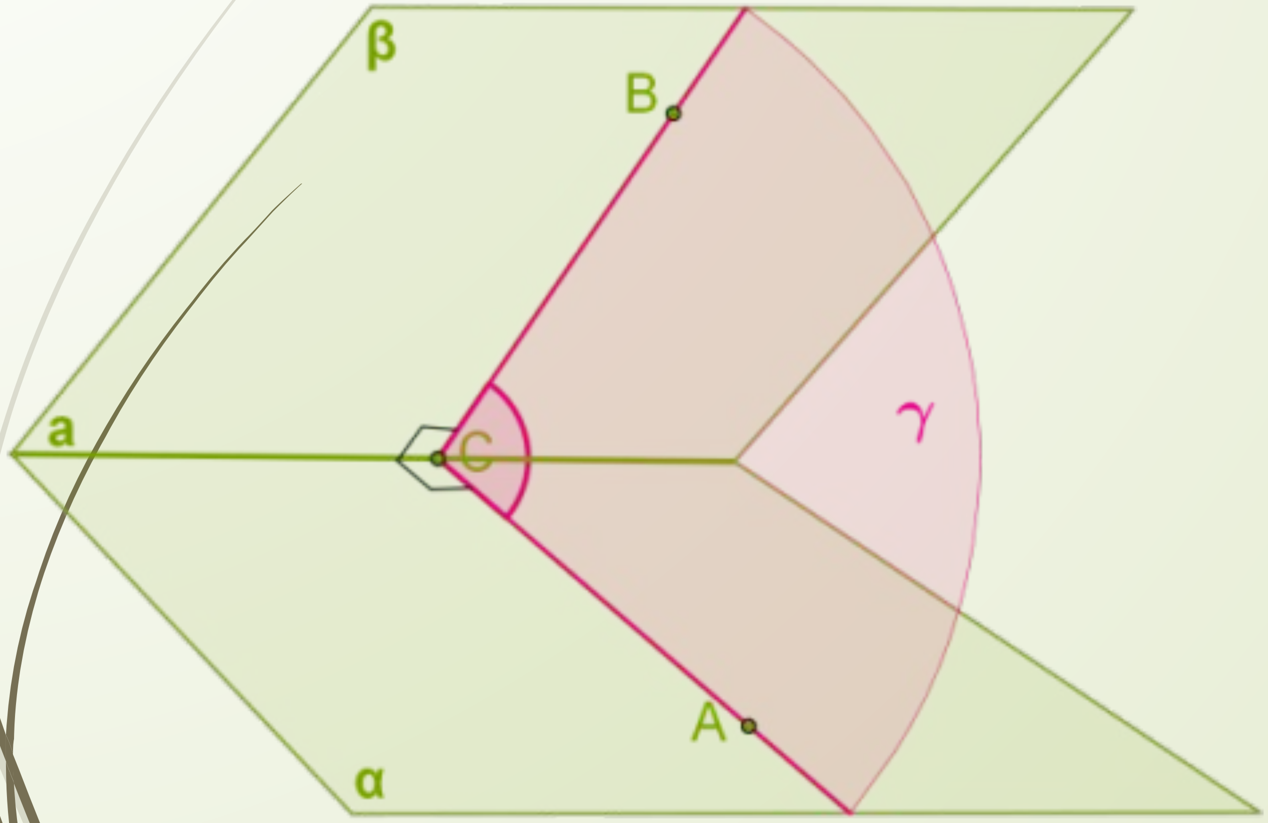
Если в пространстве пересекаются две плоскости, получаются четыре двугранных угла (аналогично как при пересечении двух прямых получаются четыре угла).



Плоскости α и β, образующие двугранный угол, называются его гранями.
Общая прямая а этих граней называется ребром двугранного угла.

Выберем на ребре а двугранного угла произвольную точку С и проведём две пересекающиеся прямые АС $\perp$ а и ВС $\perp$ а, а через эти прямые – плоскость $\gamma \perp$ а

Линии пересечения AC и BC полуплоскостей α и β с плоскостью γ образуют некоторый угол <ACB. Этот угол называется **линейным углом двугранного угла.** Величина линейного угла не зависит от выбора точки C на ребре a.



Величина двугранного угла 0<ACB<180

Если плоскости параллельны, то угол между ними равен 0∘.
Если при пересечении плоскостей один из двугранных углов составляет 90∘, то три остальных угла тоже 90∘. Эти плоскости называют **перпендикулярными.**

Теорема 4. Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Теорема 5. Плоскость, перпендикулярная прямой, по которой пересекаются две плоскости, перпендикулярна каждой из этих плоскостей.

Теорема 6. Если две плоскости перпендикулярны, и в одной из них прямая проведена перпендикулярно линии пересечения плоскостей, то эта прямая перпендикулярна второй плоскости.