АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ПЛОСКАЯ ЛИНИЯ И ЕЕ УРАВНЕНИЕ В R²
ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО
ТОЧКЕ И НОРМАЛЬНОМУ ВЕКТОРУ
УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ТОЧКЕ И НАПРАВЛЯЮЩЕМУ
ВЕКТОРУ

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ДВУМ ТОЧКАМ

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ТОЧКЕ И УГЛОВОМУ

КОЭФФИЦИЕНТУ

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ С УГЛОВЫМ **КОСФФИ**ЦИЕНТОМ.
УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Уравнение F(x, y) = 0, связываю-

щее между собой переменные х и у называют

<u>уравнением плоской линии</u> В выбранной системе координат, если координаты x и y любой точки M этой линии ему удовлетворяют, а координаты всех точек, не лежащих на ней, ему не удовлетворяют.

ПРИМЕР

- Построить линию, заданную уравнением
- Придавая переменной различные числовые значения и вычисляя соответствующие значения, построим таблицу
- Введем на плоскости декартову систему координат и построим на этой плоскости соответствующие точки с координатами. Соединяя построенные точки линией, получим искомую кривую

У	=		X
J		•	

X	0	1	4	9	•••
У	0	1	2	3	•••

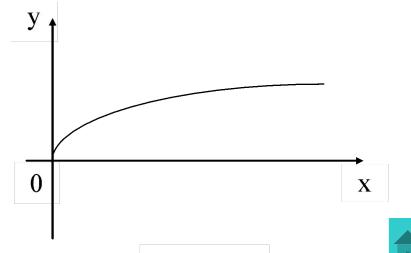


Рис. 1.1



ОПРЕДЕЛЕНИЕ Уравнение F(x,y) = 0 называется алгебраическим, если выражение F(x,y) есть сумма конечного числа слагаемых вида Ax^ky^m , где k,m- целые неотрицательные числа, A -действительное число. При этом наибольшая из сумм степеней k+m называется степенью уравнения

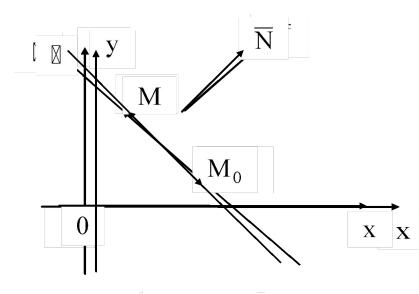
ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ТОЧКЕ И НОРМАЛЬНОМУ ВЕКТОРУ

- •Положение прямой на координатной плоскости вполне определяется заданием
- •любых двух ее точек
- •точки и вектора, параллельного прямой
- •точки и вектора, перпендикулярного прямой
- углового коэффициента и отрезка, отсекаемого
- прямой от оси ОҮ
- •других величин.

Уравнение прямой по точке и нормальному вектору

Пусть на плоскости XOY дана точка $M_0(x_0; y_0)$ и вектор $\overline{N} = A\overline{i} + B\overline{j}$.

Выберем на плоскости произвольную точку M(x; y) и построим вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0)\overline{i} + (y - y_0)\overline{j}$.





Рассмотрим два случая:

1) пусть точка
$$M \in \mathbb{Z}$$
.
 $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0;$

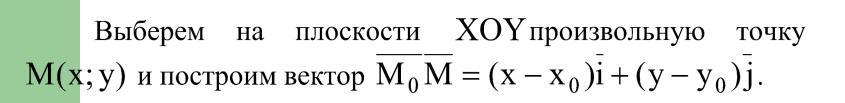
- 2) если точка $M \notin \mathbb{Z}$, то векторы $\overline{M_0M}$ и \overline{N} не перпендикулярны. Следовательно $\overline{M_0M} \cdot \overline{N} \neq 0$ или $A(x-x_0) + B(y-y_0) \neq 0$. Таким образом, в п. 1 получено уравнение искомой прямой \mathbb{Z} .
- Уравнение п.1. называется уравнением прямой по точке и нормальному вектору $\overline{\textit{N}} = \left\{\textit{A};\textit{B}\right\}$.



УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ТОЧКЕ И НАПРАВЛЯЮЩЕМУ ВЕКТОРУ

Пусть на плоскости XOY дана точка $M_0(x_0; y_0)$ и вектор $\overline{S} = mi + nj$.

Требуется определить уравнение прямой \mathbb{Z} проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно вектору \overline{S} (вектор \overline{S} называется направляющим вектором прямой).





M

 \mathbf{M}_{0}

Рассмотрим два случая:

1) пусть точка $\mathbf{M} \in \mathbb{Z}$. Тогда $\overline{\mathbf{M}_0 \mathbf{M}} \| \overline{\mathbf{S}}$. Следовательно, векторы

 $\overline{M}_0\overline{M}$ и \overline{S} коллинеарны. Итак, $\overline{M}_0\overline{M}=\lambda\overline{S}$, где λ - некоторое

действительное число. Тогда $(x-x_0)i+(y-y_0)j=\lambda(mi+nj) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = m\lambda \\ y - y_0 = n\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \lambda \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n};$$

2) пусть точка $M \notin \mathbb{Z}$.Тогда $M_0M \neq \lambda \overline{S}$ при любом λ . Отсюда и

$$\frac{x-x_0}{m} \neq \frac{y-y_0}{n}$$
. Из 1) и 2) и определения уравнения линии следует, что

вается уравнением прямой по точке и направляющему вектору $\overline{S} = \{m; n\}$.

Его также называют каноническим уравнением прямой.



Замечание

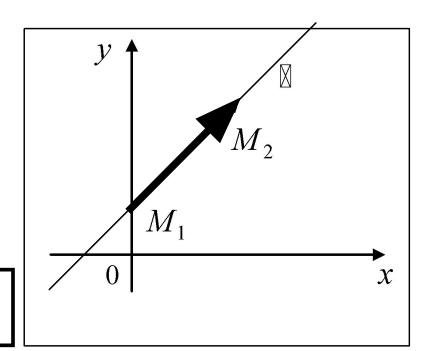
 $M_0(x_0; y_0)$ параллельно оси OY.

Если прямая $\[mathbb{R}\]$ проходит через точку $M_0(x_0;y_0)$ и параллельна оси OX, $\overline{S} = \{m;0\}$. Хотя его проекция n=0, уравнение этой прямой условились записывать в канонической форме, т.е. в форме $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{0}$. Последнее уравнение считается другой формой записи уравнения этой прямой $y=y_0$. Аналогично каноническое уравнение вида $\dfrac{x-x_0}{0}=\dfrac{y-y_0}{n}$ означает другую форму записи уравнения прямой $x=x_0$, проходящей через точку

Примем за направляющий вектор \overline{S} вектор $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$. Тогда $m = x_2 - x_1, n = y_2 - y_1$. Подставляя найденные числа в предыдущее уравнение, получим уравнение искомой прямой \mathbb{N} .

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

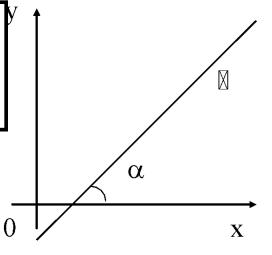
Полученное уравнение называется уравнением прямой, проходящей через две данные точки.





УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ТОЧКЕ И УГЛОВОМУ КОЭФФИЦИЕНТУ

Углом наклона α прямой к оси *ОХ* называется угол, на который нужно повернуть вокруг начала координат против движения часовой стрелки ось абсцисстак; чтобы она стала параллельна данной прямой.

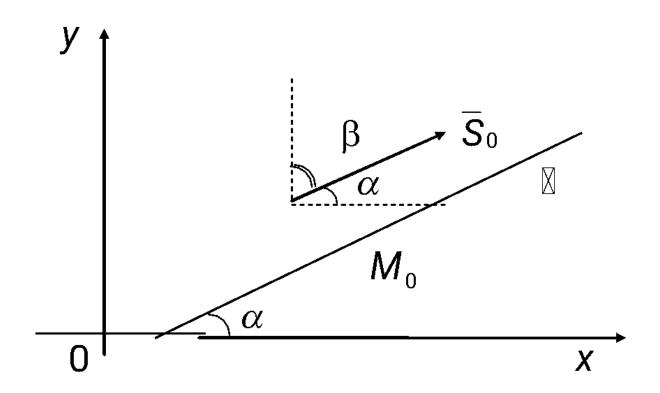




Тангенс угла наклона α прямой называется угловым коэффициентом прямой и обозначается буквой k. Итак,

$$k = tg\alpha$$

Заметим, что если α острый угол, то k>0, если тупой, то k<0, если $\alpha=0$, то k=0, если $\alpha=\frac{\pi}{2}$, то k не существует.



Так как
$$\cos \beta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha$$
, то $\overline{S}^0 = \{\cos \alpha ; \sin \alpha \}$.

Полагая $m = \cos \alpha, n = \sin \alpha,$ получим

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\cos \alpha} = \frac{\mathbf{y} - \mathbf{y}_0}{\sin \alpha} \Leftrightarrow \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 = \mathbf{tg}\alpha (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \Leftrightarrow \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 = \mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

Полученное уравнение называется уравнением прямой по точке и угловому коэффициенту.

Пусть требуется найти уравнение прямой \mathbb{N} , если \mathbb{N} проходит через точку $\mathbf{M}_0(\mathbf{x}_0;\mathbf{y}_0)$ и имеет угловой коэффициент \mathbf{k} . Как известно, уравне-

ние любой прямой проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$ запишется в виде

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{y} - \mathbf{y}_0}{\mathbf{n}},$$

где m и n есть координаты направляющего вектора S. B качестве направляющего вектора прямой \mathbb{S} примем единичный вектор $\overline{S}^0 = \{\cos\alpha; \cos\beta\}$, составляющий с осью OX тот же угол α , что и прямая \mathbb{S} .