ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Лекція 6

Визначення випадкової величини

- *Випадкова величина* – це величина, що приймає в результаті випробування одне з можливих значень, при цьому поява того чи іншого значення є випадковою подією.
- Розрізняють *дискретні* та *неперервні* випадкові величини.

Дискретна випадкова величина та способи її задання

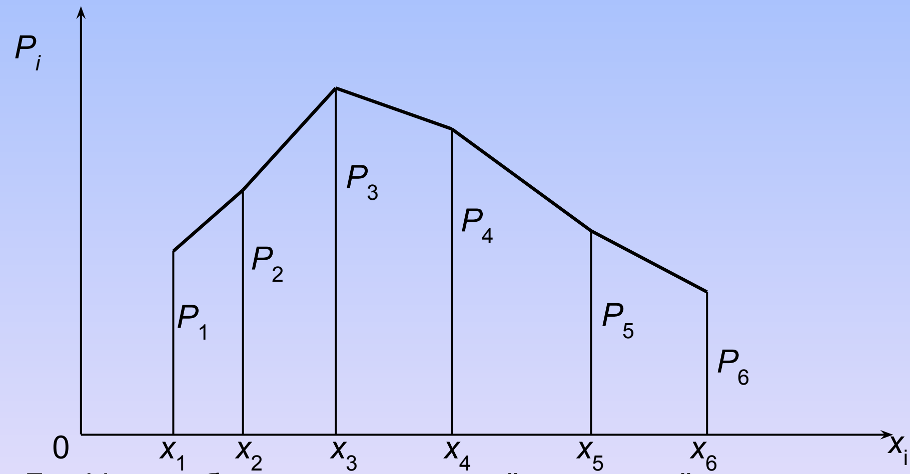
Дискретною випадковою величиною називається випадкова величина з кінцевою кількістю можливих значень.

- *Для визначення дискретної випадкової величини задають закон її розподілу (чи ряд розподілу), тобто всі можливі значення випадкової величини та відповідні їм ймовірності:*

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
$P(X)$	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

Дискретна випадкова величина та способи її задання

- Події, що полягають в тому, що з'явиться одне з можливих значень випадкової величини, є несумісними й утворюють повну групу подій. Сума ймовірностей повної групи подій дорівнює одиниці:



Графічне зображення дискретної випадкової величини у вигляді многокутника розподілу.

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(x) = 1$$

Числові характеристики дискретної випадкової величини

- **Математичне сподівання**

$$\mu(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + \ldots + x_n \cdot p_n$$

- **Дисперсія**

$$D(X) = \mu(X^2) - (\mu(X))^2$$, де $$\mu(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 Pi$$

- **Середнє квадратичне відхилення**

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Основні закони розподілу дискретних випадкових величин

- Формула Бернуллі: $P_n(x) = C_n^x p^x q^{n-x} = \dfrac{n!}{x!(n-x)\,!} p^x q^{n-x}$

$$P(A) = p, P(\overline{A}) = q$$

- Сукупність отриманих ймовірностей $Pn(0)$, $Pn(1)$, $Pn(2)$, ...,$Pn(n)$ являє собою **біномний розподіл**.

Основні закони розподілу дискретних випадкових величин

- **Формулу Муавра-Лапласа використовують для схеми Бернуллі, коли** $n > 10 \quad p \geq 0{,}1$

Ймовірності визначають за формулами:

а)

$$P_n(X = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-np)^2}{npq}}$$

- локальна формула Лапласа;

б)

$$P_n(x_1 \leq X \leq x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z1}^{z2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{x_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

- інтегральна формула Лапласа, де $\Phi(z)$- інтегральна функція Лапласа

Основні закони розподілу дискретних випадкових величин

- За тих же умов, але коли $n > 10$ і $p < 0{,}1$ застосовують **формулу Пуассона:**

$$P_n(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu},$$

$де\ \ \mu = np$

- При цьому:

$$\mu = \mu(X) = D(X); \ \sigma = \sqrt{\mu}$$

Неперервна випадкова величина. Способи її задання

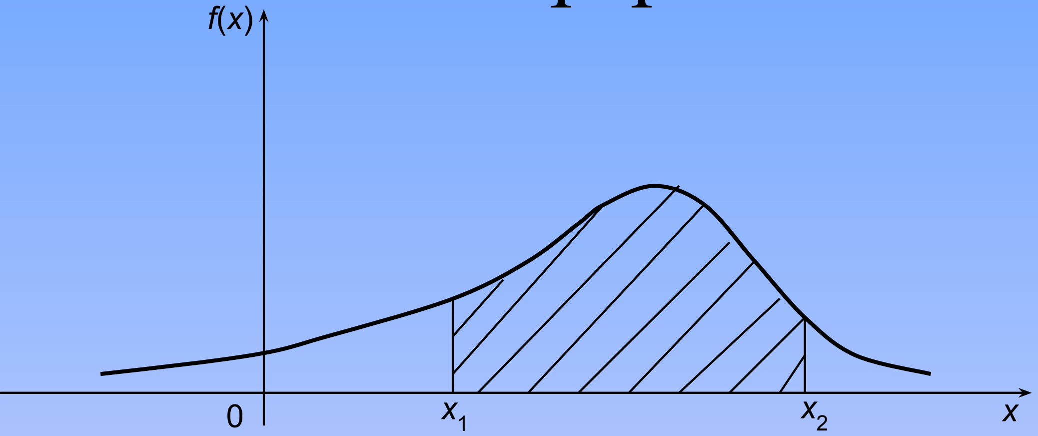
- *Неперервною випадковою величиною* називається випадкова величина, що може приймати будь-які значення з деякого інтервалу (на якому вона існує).
- **Інтегральна функція розподілу** неперервної випадкової величини:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

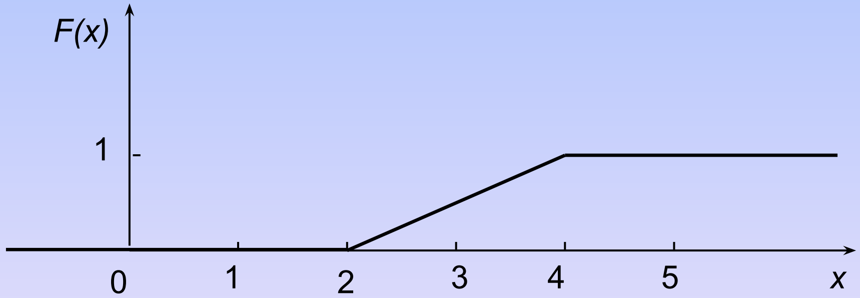
- **Диференціальна функція розподілу** неперервної випадкової величини (функція щільності розподілу):

$$f(x) = \frac{dP}{dx} = F'(x)$$

Неперервна випадкова величина



Графічне задання неперервної випадкової величини у вигляді функції розподілу щільності ймовірностей.



Графічне зображення інтегральної функції розподілу випадкової величини.

Умова нормування для неперервної випадкової величини :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Числові характеристики неперервної випадкової величини

- **Математичне сподівання:** $$\mu(X) = \int_{x_1}^{x_2} x \cdot f(x)dx$$

- **Дисперсія :** $$D(X) = \mu(X^2) - (\mu(X))^2$$

де $$\mu(X^2) = \int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot f(x)dx$$

- **Середнє квадратичне відхилення :** $$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

- **Ймовірність попадання у проміжок :**

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$$

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

- **1. Рівномірний розподіл:**

Диференціальна функція розподілу -

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<a; \\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b; \\ 0, & x>b. \end{cases}$$

Інтегральна функція розподілу -

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b; \\ 1, & x>b. \end{cases}$$

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

- **2. Показниковий (експонентний) розподіл** неперервної випадкової величини з параметром λ .

Диференціальна функція розподілу -

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0.\end{cases}$$

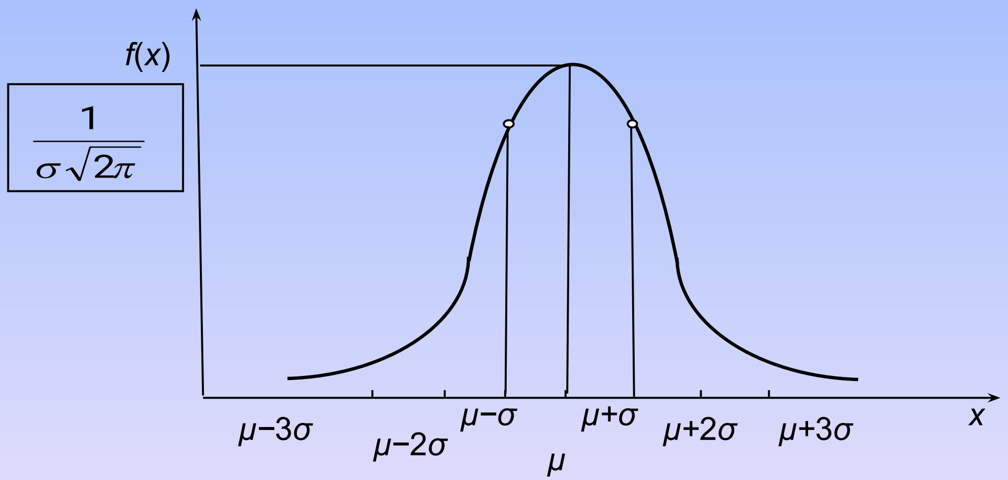
Інтегральна функція розподілу -

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0.\end{cases}$$

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

- **3. Нормальний розподіл:**

Диференціальна функція розподілу – $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$



Графік нормального розподілу випадкової величини.

Стандартна функція Лапласа

- Якщо в функції Гаусса взяти $\mu = 0$ і $\sigma = 1$, то отримаємо **нормовану** або стандартну **функцію** (диференціальну функцію).

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Основні закони розподілу неперервних випадкових величин

3. Нормальний розподіл

- **Ймовірність** попадання нормально розподіленої випадкової величини на інтервал визначається за формулою: $$P(x_1 \le X \le x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$$

  де $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ - інтегральна функція Лапласа, її значення знаходяться за таблицею.

- **Правило трьох сигм:** якщо випадкова величина нормально розподілена, то майже достовірно, тобто з імовірністю, близької до одиниці , її значення лежать на проміжку [μ−3σ; μ+3σ].

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!