Алгоритм Карпа-Рабина

$\boldsymbol{ns} : \boldsymbol{\Sigma \to [0..\, |\Sigma| - 1]}$ – порядок символов в $\boldsymbol{\Sigma}$. $s = |\Sigma|$.

$H(P) = ns\,(p_1) \times s^{m-1} + ns(p_2) \times s^{m-2} \ldots ns(p_{m-1}) \times s + ns(p_m)$ и

$H(T[i : i + m - 1]) = ns(t_i) \times s^{m-1} + ns(t_{i+1}) \times s^{m-2} \ldots ns(t_{i+m-2}) \times s + ns(t_{i+m-1})$.

Если $H(P) = H(T[i : i + m - 1])$, то образец встретился в i-й поз. текста.

Рекуррентное хеширование:

$H(T[i + 1 : i + m) = (H(T[i : i + m - 1]\,) - ns(t_i) \times s^{m-1}) \times s + ns(t_{i+m})$.

Пример. $\Sigma = \{\text{acgt}\}$, P = acat, T = ggacataccagac;

$ns(\text{a}) = 0$; $ns(\text{c}) = 1$; $ns(\text{g}) = 2$; $ns(\text{t}) = 3$;

$H(P) = 0 \times 4^3 + 1 \times 4^2 + 0 \times 4^1 + 3 = 19$;

$H(T[1:4]) = 2 \times 4^3 + 2 \times 4^2 + 0 \times 4^1 + 1 = 161$;

$H(T[2:5]) = 2 \times 4^3 + 0 \times 4^2 + 1 \times 4^1 + 0 = 132 = (161 - 2 \times 4^3) \times 4 + 0$;

$H(T[3:6]) = 0 \times 4^3 + 1 \times 4^2 + 0 \times 4^1 + 3 = 19 = (132 - 2 \times 4^3) \times 4 + 3$;

Обобщения задачи поиска образца:

- Образцы с джокерами: x – любой символ
  Пример. $P = abxxcx$ содержится в тексте gabdccbababcad дважды.

- Образцы, позиции которых заданы множествами символов
  a- [a,b]-c-[c,d]-[a,c,d]-[c,d]-a
  a- [a,b]-c-[c,d]- ¬b - x - a
- Поиск образца с допустимым уровнем искажений:
  abcdab – abddab – abcdcb – abccdab – abcdab
- Поиск множества образцов
- Комбинации задач (например, поиск множества образцов, позиции которых заданы множествами символов)
- Образцы с переменными. $X \in \Sigma^*$.
  $P = abXXcX$: *abcccc;* *ab__abb____abb__c__abb__*
- Параметризованные образцы. 2 алфавита: Σ и Π:
  Образцы π-согласованы, если $\exists\, f : \Pi \to \Pi$
  $\Sigma = \{a,b,c\}$; $\Pi = \{X, Y, Z, T\}$
  abcXbbYYccZ и abcZbbXXccT

Алгоритм Ахо-Корасик

Задача. Задано множество образцов $\boldsymbol{P} = \{P_1, P_2, \ldots P_z\}$. Требуется **обнаружить все вхождения в текст $\boldsymbol{T}$ любого образца из $\boldsymbol{P}$.**

i-й образец $P_i = p_{i1}p_{i2}\ldots p_{i,mi}$ имеет длину m_i; $p_{i,j} \in \Sigma$.

Текст $\boldsymbol{T} = t_1\ t_2\ \ldots\ t_N$, $t_k \in \Sigma$, $1 \le k \le N.$

Это обобщение называют множественной задачей точного поиска или задачей поиска по групповому запросу

Наивный алгоритм решает эту задачу путем поиска каждого образца из набора с использованием любого из рассмотренных выше линейных алгоритмов. Такой поиск имеет трудоемкость O($zN + \sum_i m_i$).

Эффективный алгоритм решения этой задачи имеет трудоемкость O($N + \sum_i m_i$).

Алгоритм Ахо-Корасик

- Этап предобработки: построение ДКА по исходному множеству образцов
- Этап поиска: однократный "прогон" текста через этот автомат.

1. Этап предобработки.

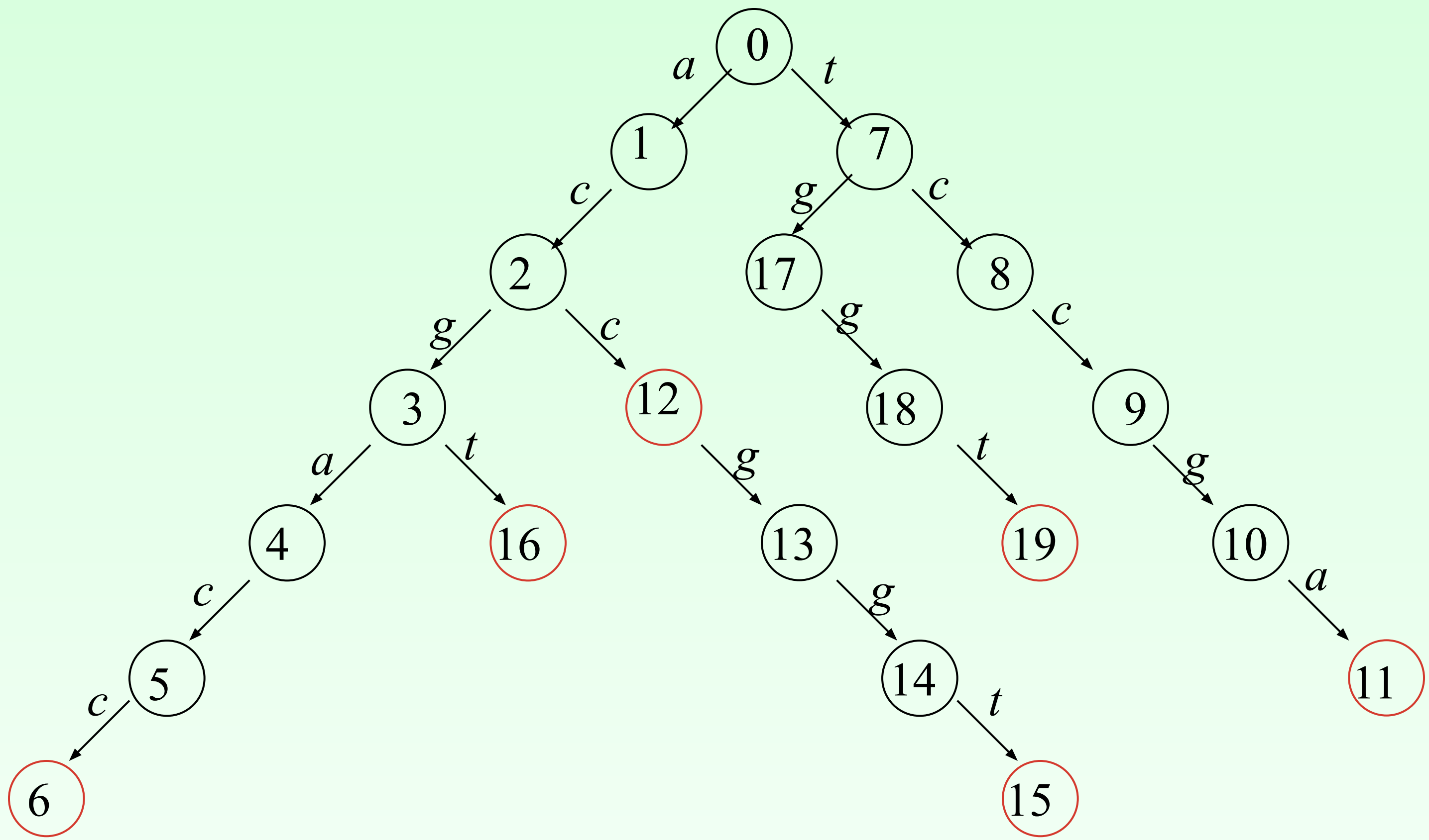
   Сначала строится "машина идентификации цепочек" ***Mp***. Работа машины ***Mp*** описывается тремя функциями: функцией переходов $\varphi(s,a)$ (s – состояние машины, $a \in \Sigma$), функцией отказов $f(s)$ и функцией выходов $o(s)$.

Алгоритм Ахо-Корасик

Функция переходов φ(s,*a*)=s', если существует выходящее из s ребро, помеченное символом "*a*" и связывающее состояния s и s'; в противном случае φ(s,a) = «fail» = −1

Пример. Пусть Σ = {a,c,g,t}; P = {acgacc, tccga, accggt, acgt, acc, tggt};

φ(7, g) =17; φ(3, *a*) = 4;



Алгоритм Ахо-Корасик.

Построение $f(s)$: пусть $\varphi(s\_pred,a) = s$, $f(s\_pred) = s''$.

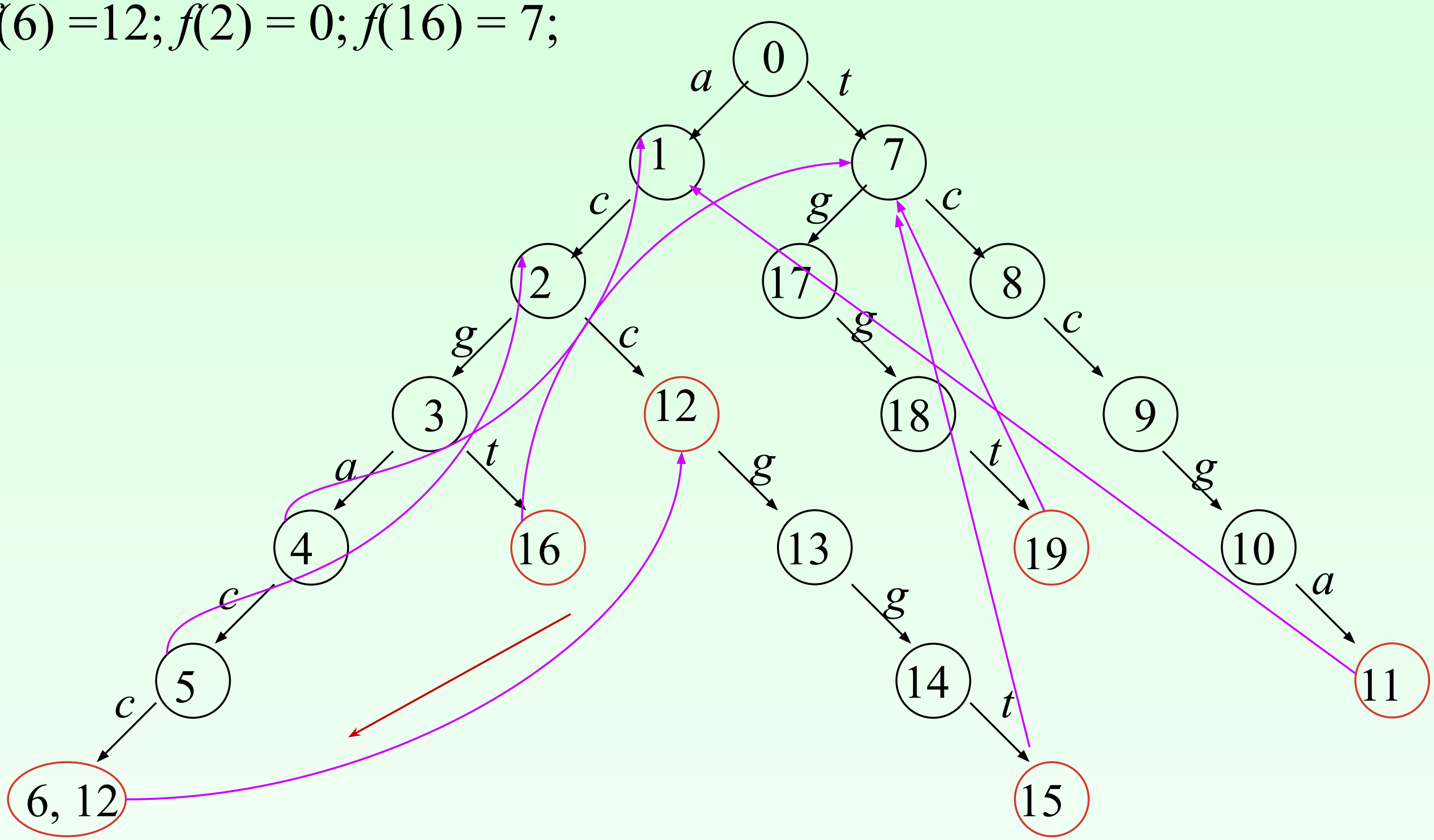
Metka : Если φ(s",a)<> fail, то f(s)= φ(s",a); o(s) := o(s) $\cup$ o(f(s)) ,

иначе s" := f(s"); goto Metka.

Порядок построения: по уровням дерева (структура «очередь»).

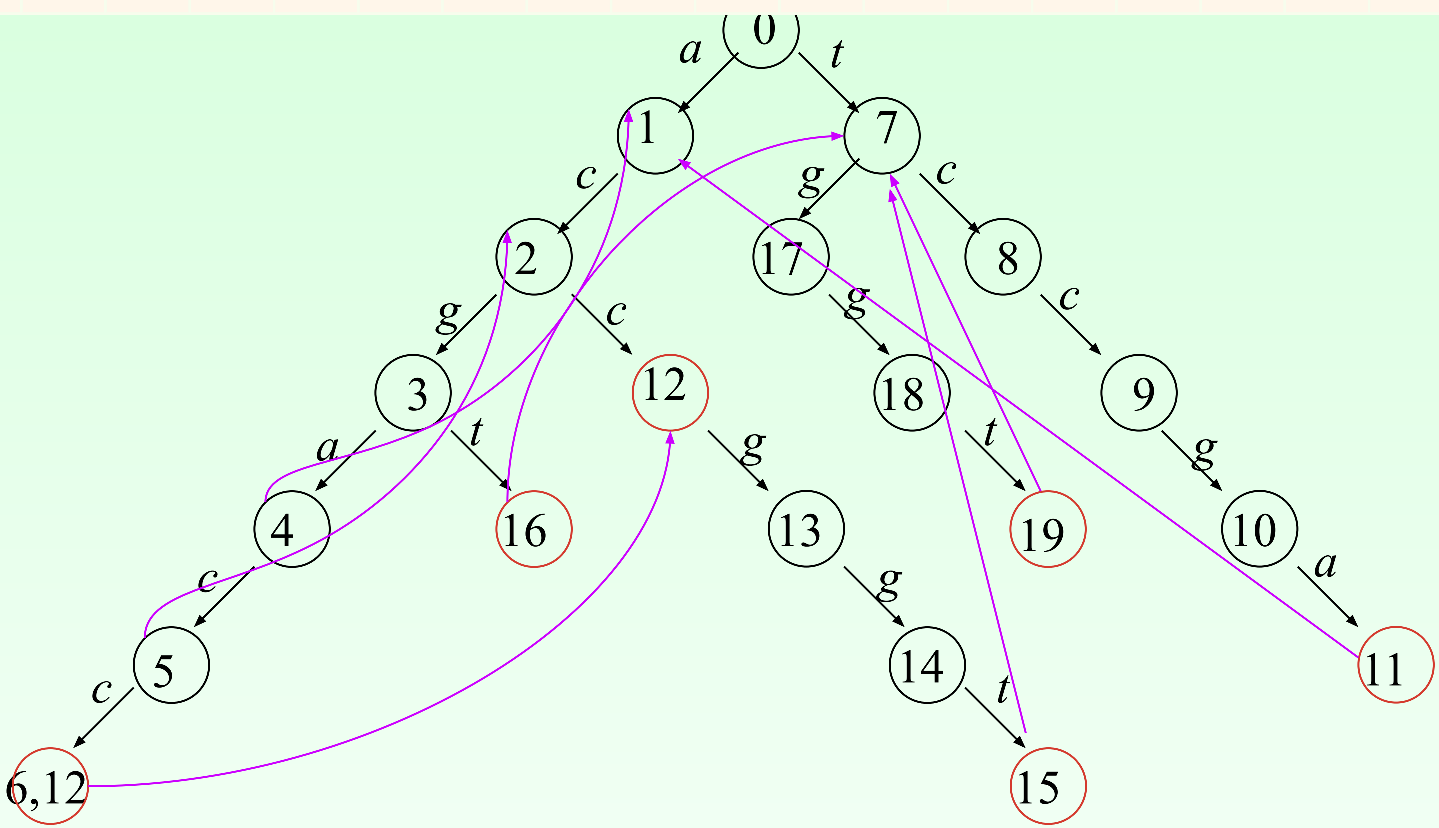
Пример. Пусть Σ = {a,c,g,t}; P = {acgatc, tccga, accggt, acgt, acc, tggt}; o(6)={1,4};

$f(6) = 12$; $f(2) = 0$; $f(16) = 7$;



Алгоритм Ахо-Корасик.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
A	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	11	1	…							1
C	0	2	0	0	5	6	0	8	9	0	0	2								8
G	0	0	3	0	0	3	13	17	0	10	0	0								17
T	7	7	7	16	7	7	7	7	7	7	7	7								7



Повтор — пара совпадающих фрагментов текста.

Классификация повторов

- **По способу их прочтения и использованию переименований:**

Повтор (в широком смысле) — пара фрагментов текста, совпадающих с точностью до переименования элементов алфавита и (или) изменения направления считывания.

Типы повторов:

– прямые : … AGTTC … AGTTC…

– симметричные: … AGTTC … CTTGA…

– с точностью до подстановки на элементах алфавита: секвентные переносы в музыке; замены 0 ↔ 1; A ↔ T, C ↔ G.

– прямые комплементарные: … AGTTC… TCAAG…

– инвертированные: … AGTTC… GAACT…

Повторы в текстах

Слова и словосочетания.

Повтор предложения (абзаца) – признак ошибки.

Мелодические обороты.

В ДНК-последовательностях:

1. Участки с аномальным нуклеотидным составом: (А,Т)-богатые…
2. Участки микросателлитной ДНК: периодичности с малой длиной периода (2-3) и достаточно высокой кратностью повторений.
3. Тандемные повторы с произвольной длиной периода.
4. Разнесенные повторы значительной длины.
5. Мобильные элементы

Классификация повторов

· **По наличию искажений:**

Повторы могут быть

совершенные:

… AGTTC … AGTTC…

и несовершенные (с заменами, вставками, делециями):

… AGTTC … AATTC … (замена),

… AGTTC … AGTTTC… (вставка),

в том числе с точностью до агрегирования:

… AGTTC … GATCT …

(совпадают при заменах {A,G} → Pu, {C,T} → Py).

Классификация повторов

- **По характеру расположения в тексте:**

будем различать повторы

разнесенные

… AGTTC … AGTTC…

тандемные … AGTTC AGTTC…

с наложением : … AGTTCAGTTCAGTTC …

Представление текста в терминах повторов

Полный частотный спектр текста. Пусть

Σ – конечный алфавит;

S – текст, составленный из элементов Σ;

$N = |S|$ – длина текста;

$S[i] = s_i$ – i-й элемент текста S $(1 \le i \le N)$;

$S[i:j]$ – фрагмент текста, включающий элементы с i-го по j-й $(1 \le i < j \le N)$.

l-грамма – связная цепочка текста длины $\boldsymbol{l}$ $(S[i : i + l - 1])$.

$$S = \underline{s_1\, s_2\, s_3}\, s_4\, s_5 \ldots s_N$$

Полное число ***l***-грамм: $\boldsymbol{N - l + 1}$.

Число различных l-грамм: $\boldsymbol{M_l \le N - l + 1}$.

Частотная характеристика l-го порядка текста S – совокупность элементов $\Phi_l(S) = \{\varphi_{l1}, \varphi_{l2}, \ldots, \varphi_{l\,Ml}\}$
где $\varphi_{l\,i}$ $(1 \le i \le M_l)$ есть пара :
« i-я l-грамма – $\boldsymbol{x_i}$, ее частота в тексте – $\boldsymbol{F_l(x_i)}$ ».

$\boldsymbol{l_{\max}(S)}$ – наибольшее $\boldsymbol{l}$, при котором в S есть ***повторяющиеся*** $\boldsymbol{l}$-граммы.

Совокупность частотных характеристик

$$\Phi\,(S) = \{\Phi_1(S), \Phi_2(S),\ldots, \Phi_{l\,max\,+\,2}(S)\}$$

называется *полным частотным спектром текста S*.

Усеченный спектр

$$\Phi^*(S) = \{\Phi^*_1(S), \Phi^*_2(S),\ldots, \Phi^*_{l\,max}(S)\}$$

$\Phi^*_l(S)$ отличается от $\Phi_l(S)$ отсутствием l-грамм с единичной частотой встречаемости.

Пример. Пусть S = caabcabbca.

Тогда $\Phi^*(S) = \{\Phi^*_1(S), \Phi^*_2(S), \Phi^*_3(S)\}$, где

$\Phi^*_1(S) = \{<a, F_1(a) = 4>; \quad <b, F_1(b) = 3>; \quad <c, F_1(c) = 3>\}$;

$\Phi^*_2(S) = \{<ca, F_2(ca) = 3>; \quad <ab, F_2(ab) = 2>; \quad <bc, F_2(bc) = 2>\}$;

$\Phi^*_3(S) = \{<bca, F_3(bca) = 2>\}$;

Для повторов значительной длины спектр можно дополнить позиционной информацией.

Наиболее важными являются следующие параметры частотного спектра:

$l_{\max}$ — длина максимального повтора в тексте.

Для случайного текста длины N с вероятностями появления элементов алфавита p_r $(1 \le r \le n = |\Sigma|)$ можно пользоваться оценкой: .

$$l_{\max} \sim 2 \ln N \Big/ \left| \ln \sum_{r=1}^{n} p_r^2 \right|$$

Если реальная длина $l_{\max}$ в тексте существенно превышает ожидаемое значение, это свидетельствует о наличии дупликативных механизмов порождения текста.

M_l — размер словаря l-грамм.

Он фигурирует в определении комбинаторной сложности текста.

$F_l^{\max} = \max\limits_{1 \le i \le M_l} F_l(x_i)$ — максимальное значение частот встречаемости l-грамм в тексте $(1 \le l \le l_{\max})$;

$F_l^{\min} = \min\limits_{1 \le i \le M_l} F_l(x_i)$ — минимальное значение частот встречаемости l –грамм в тексте $(1 \le l \le l_{\max})$; представляет интерес лишь при малых значениях l; при больших, обычно $F_l^{\min} = 1$.

E_l^k — Число различных l-грамм, каждая из которых встречается в тексте ровно k раз ($k = 1,2,\ldots,N - l + 1$); зависимость E_l^k от k при фиксированном l является аналогом известной в лингвистике кривой Юла;

$M_l - E_l^1$ — число различных повторяющихся l-грамм;

E_l^0 — число l-грамм, ни разу не встретившихся в тексте. Наличие таковых в ситуации, когда $N / n^l >> 1$, можно трактовать как аномальный эффект.

Имеют место простые соотношения, связывающие основные параметры:

$$M_l = \sum_{k=1}^{F_l^{\max}} E_l^k, \qquad N - l + 1 = \sum_{k=1}^{F_l^{\max}} k \cdot E_l^k, \qquad E_l^0 = n^l - M_l.$$

Алгоритмы отыскания совершенных повторов

Метод лексикографической сортировки

Лексикографический порядок слов $u = u_1 \dots u_p$ и $v = v_1 \dots v_q$:
$u \leq v$, если $u = v$ или $(\exists\ j$, такое что $u_j < v_j$ и $u_i = v_i\ \forall\ i < j)$ или $(p < q$ и для всех $i \leq p\ \ u_i = v_i)$.

Пример. S = abcdabcbcbabcd; $l = 3$;

abc f(abc) = 3 аналог для произвольного ***l* -**
abc суффиксный массив
abc
bab
bcb f(bcb) = 2
bcb
bcd f(bcd) = 2
bcd
cba
cbc
cda
dab

Числовая сортировка

Задача:

Дан ***массив*** **A** из n ***элементов***: $a_1, a_2, \ldots a_n$

С каждым элементом a_i связан ***ключ*** $k_i \in K$.

На множестве ключей K задано отношение порядка — **линейного** (или **совершенного**) **упорядочивания**, для которого выполнены следующие условия:

закон трихотомии: для любых $x,y \in K$ либо $x < y$, либо $x > y$, либо $x = y$;

транзитивность: для любых $x,y, z \in K$ если $x < y$ и $y < z$, то $x < z$.

Задачей сортировки по неубыванию является нахождение перестановки элементов p(1), p(2), … p(n) при которой ключи располагаются в порядке неубывания: $\mathbf{k_{p(1)} \le k_{p(2)} \le \ldots \le k_{p(n)}}$.

В результате работы алгоритма и применения перестановки получается отсортированный массив: $a_{p(1)}, a_{p(2)}, \ldots , a_{p(n)}$

Аналогично можно определить **сортировку по невозрастанию**.

Числовая сортировка

Сортировка выбором (*Selection sort*) :

- находим номер минимального значения в текущем списке
- производим обмен этого значения со значением первой неотсортированной позиции (обмен не нужен, если минимальный элемент уже находится на данной позиции)
- сортируем хвост списка, исключив из рассмотрения уже отсортированные элементы

5 9 4 7 2 4 **1** 6

1 **9** 4 7 **2** 4 5 6

1 2 **4** 7 9 4 5 6

1 2 4 **7** 9 **4** 5 6

1 2 4 4 **9** 7 **5** 6

1 2 4 4 5 **7** 9 **6**

1 2 4 4 5 6 **9** **7**

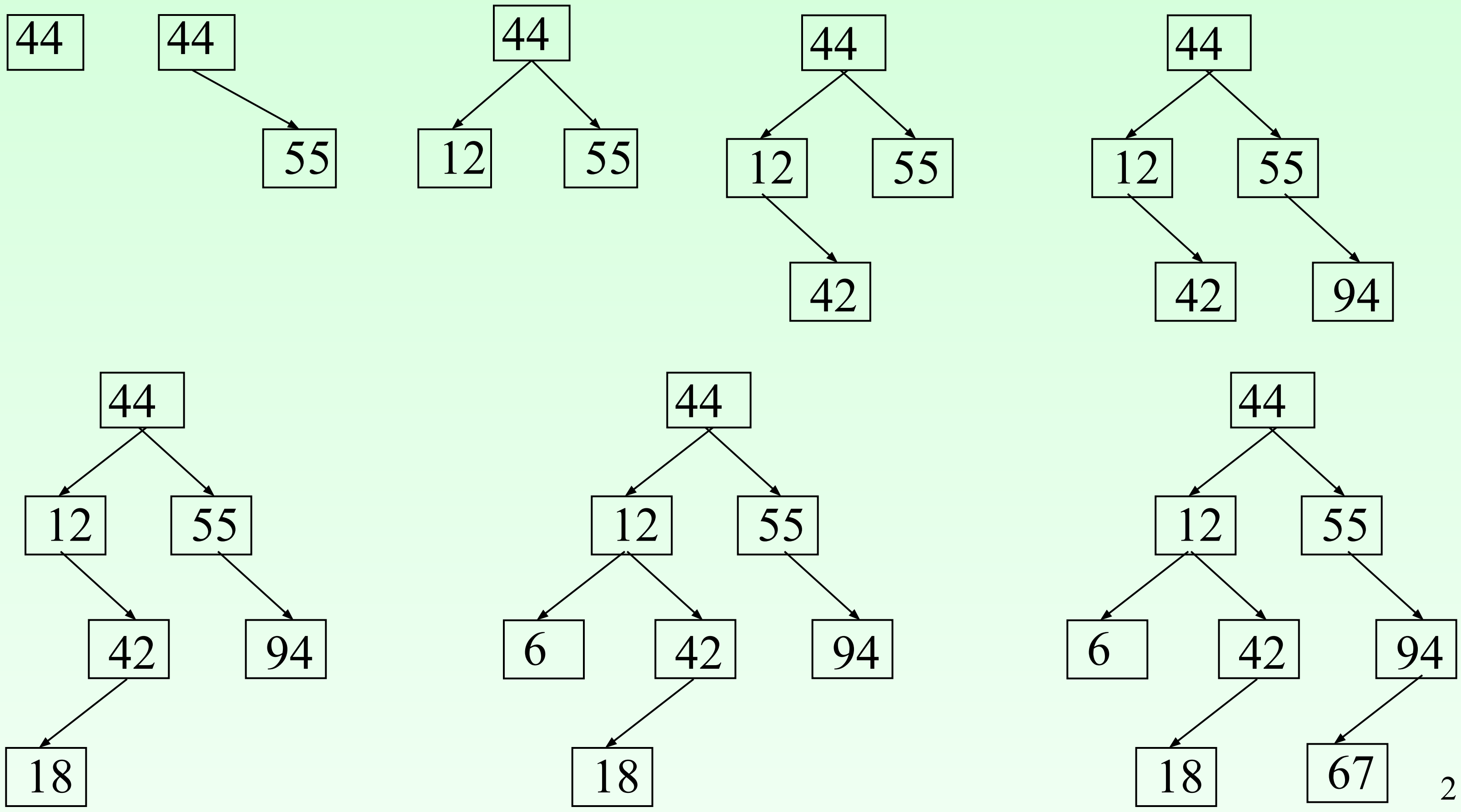
1 2 4 4 5 6 7 9

Числовая сортировка

- **Сортировка пузырьком (сортировка всплыванием)**
- Элементы последовательно сравниваются попарно и, если порядок в паре неверный, выполняется обмен элементов. При каждом проходе алгоритма по внутреннему циклу, очередной наибольший элемент массива ставится на своё место в конце массива рядом с предыдущим «наибольшим элементом», а наименьший элемент перемещается на одну позицию к началу массива («всплывает»).

•Первый цикл:	второй цикл	третий цикл	четвертый цикл
•**5 9** 4 7 2 4 1 6	**5 4** 7 2 4 1 6 9	**4 5** 2 4 1 6 7 9	4 2 4 1 5 6 7 9
•5 **4 9** 7 2 4 1 6	**4 5** 7 2 4 1 6 9	4 **2 5** 4 1 6 7 9	**2 4** 4 1 5 6 7 9
•5 4 **7 9** 2 4 1 6	4 **5** 7 2 4 1 6 9	4 2 **4 5** 1 6 7 9	2 4 **1 4** 5 6 7 9
•5 4 7 **2 9** 4 1 6	4 5 **2 7** 4 1 6 9	4 2 4 **1 5** 6 7 9	пятый цикл
•5 4 7 2 **4 9** 1 6	4 5 2 **4 7** 1 6 9	2 1 4 4 5 6 7 9	
•5 4 7 2 4 **1 9** 6	4 5 2 4 **1 7** 6 9	шестой цикл	
•5 4 7 2 4 1 **6 9**	4 5 2 4 1 **6** 7 9	1 2 4 4 5 6 7 9	

Сортировка деревом. При добавлении в дерево нового элемента его последовательно сравнивают с нижестоящими узлами. Если элемент >= корня - он идет в правое поддерево, сравниваем его уже с правым сыном, иначе - он идет в левое поддерево, сравниваем с левым, и так далее, пока есть сыновья, с которыми можно сравнить. **44 55 12 42 94 18 06 67**



Числовая сортировка

Сортировка вычерпыванием :

Пусть известно, что максимальный элемент сортируемого массива не превосходит некоторое натуральное *m*:

- Организовать *m* пустых очередей по одной для каждого натурального числа от 1 до *m*. Каждую такую очередь называют *черпаком*.
- Просмотреть последовательность A слева направо, помещая элемент a_i в очередь с номером $a_{i.}$
- Сцепить эти очереди, т.е. содержимое (i+1)-й очереди приписать к концу i-й очереди (i=1,2,... *m*-1), получив тем самым упорядоченную последовательность.

Пример: **1 3 2 5 2 5 1 2 1 5 4 3 4 5.**   Просмотрели 5 элементов

1:   **1**

2:   **2**   **2**

3:   **3**

4:

5:   **5**

Числовая сортировка

Сортировка вычерпыванием :

Пусть известно, что максимальный элемент сортируемого массива не превосходит некоторое натуральное m:

- Организовать m пустых очередей по одной для каждого натурального числа от 1 до m. Каждую такую очередь называют *черпаком*.
- Просмотреть последовательность А слева направо, помещая элемент a_i в очередь с номером a_i.
- Сцепить эти очереди, т.е. содержимое (i+1)-й очереди приписать к концу i-й очереди (i=1,2,... m-1), получив тем самым упорядоченную последовательность.

Пример: 1 3 2 5 2 5 1 2 1 5 4 3 4 5 : 1 1 1 2 2 2 3 3 4 4 5 5 5 5

1: 1 1 1

2: 2 2 2

3: 3 3

4: 4 4

5: 5 5 5 5

Лексикографическая сортировка на основе сортировки вычерпыванием :

- l-граммы сортируем по позиции l
- Полученный список сортируем по позиции $l - 1$
- …
- Полученный список сортируем по позиции 1

Пример: abcdabcbcbabcd; $l = 3$;

1. abc
2. bcd
3. cda
4. dab
5. abc
6. bcb
7. cbc
8. bcb
9. cba
10. bab
11. abc
12. bcd

Лексикографическая сортировка на основе сортировки вычерпыванием

- l-граммы сортируем по позиции l
- Полученный список сортируем по позиции $l - 1$
- …
- Полученный список сортируем по позиции 1

Пример: abcdabcbcbabcd; $l = 3$;

abc, bcd, cda, dab, abc, bcb, cbc, bcb, cba, bab, abc, bcd;

Сортировка по 3-й позиции:

a: cda, cba

b: dab, bcb, bcb, bab

c: abc, abc, cbc, abc

d: bcd, bcd

Список l-грамм после первого этапа:

cda, cba, dab, bcb, bcb,bab, abc, abc, cbc, abc, bcd, bcd

Сортировка по 2-й позиции:

a: dab, bab

b: cba, abc, abc, cbc, abc

c: bcb, bcb, bcd, bcd

d: cda

Список l-грамм после второго этапа:

dab, bab, cba, abc, abc, cbc, abc, bcb, bcb, bcd, bcd, cda

Сортировка по 1-й позиции:

a: abc, abc, abc

b: bab, bcb, bcb, bcd, bcd

c: cba, cbc, cda

d: dab

Список l-грамм после 3 этапа:

abc, abc, abc, bab, bcb, bcb, bcd, bcd, cba, cbc, cda, dab

Алгоритмы отыскания совершенных повторов

Метод, основанный на хешировании.

Хеширование – отображение, которое ставит в соответствие произвольной l-грамме текста x_i $(1\le i \le N - l + 1)$ число $h(x_i)$, (адрес, по которому хранится информация об x_i).

Пример простейшего отображения – представление l-граммы $x_i = a_{i1}a_{i2}\dots a_{il}$, где $a_{ij} \in \Sigma$ $(j = 1 \div l)$ в q-ичной системе счисления, где $q = |\Sigma|$.

$$h_1(x_i) = k_1 q^{l-1} + k_2 q^{l-2} + \dots + k_l q^0 = \sum_{i=1}^{l} k_i q^{l-i}$$

$(0 \le k_i \le q - 1)$.

Недостаток этого отображения – большой (порядка $|\Sigma|^l$) диапазон изменения чисел $h_1(x_i)$ (сильно разреженный массив адресов).

Достоинство – отображение h_1 взаимно-однозначное и достаточно просто вычислимо.

Трудоемкость «рекуррентного хеширования» — $O(N)$.

Компромисс по памяти и по времени может быть достигнут, если сузить диапазон изменения возможных значений $h(x)$.

Для этого:

а) отказаться от требования однозначности функции расстановки $h(x_i)$,

в) разделить «наложившиеся» объекты с помощью специальной техники (открытая адресация, перехеширование, использование списковых структур и т. д.).

Пример функции расстановки, допускающей наложения:

$h_2(x_i) = h_1(x_i) \bmod M$

M - простое число (размер поля).

Пример списковой схемы устранения наложений

Информа-
ционный
массив

x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7
x_8

Расстановочное
поле

№	$I(x)$	$\mathrm{A}(x)$
1	$I\,(x_4)$	*
2		
3	$I\,(x_1)$	•
4	$I\,(x_6)$	*
5		
6	$I\,(x_2)$	•
7	$I\,(x_8)$	*
8		

Дополнительное
поле (ДП)

№	$I(x)$	$\mathrm{A}(x)$
1	$I\,(x_3)$	•
2	$I\,(x_5)$	*
3	$I\,(x_7)$	*
4		

Префиксное и суффиксное деревья

Если $v = xyz$, то x – префикс v, z – суффикс, y – подслово. Оптимальные алгоритмы отыскания совершенных повторов основаны на построении префиксного дерева, суффиксного дерева или графа подслов текста (DAtG).

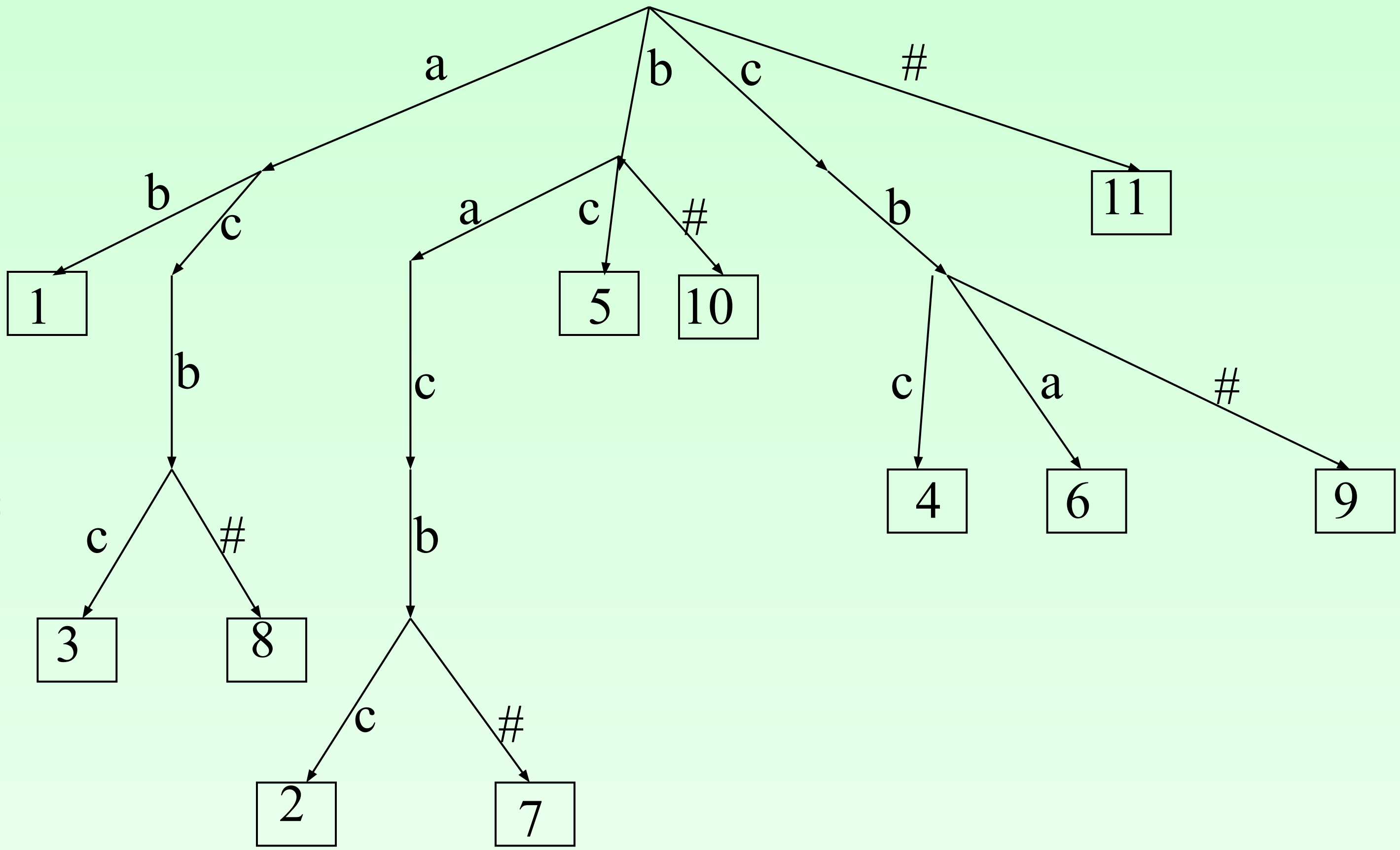
Первая конструкция разработана Вайнером (teiner P., 1973), вторая − Мак-Крейгом (McCreight, 1976), третья − (A.Blumer, J.Blumer, A.Ehrenfeucht, et al., 1984). Все конструкции ***функционально эквивалентны*** и реализуются за линейное (в зависимости от длины текста) время с линейными затратами памяти.

Префикс−идентификатор $pr(i)$ позиции i в тексте T − кратчайшее подслово, начинающееся в позиции i и встречающееся в T # только один раз *(#* - конечный маркер).

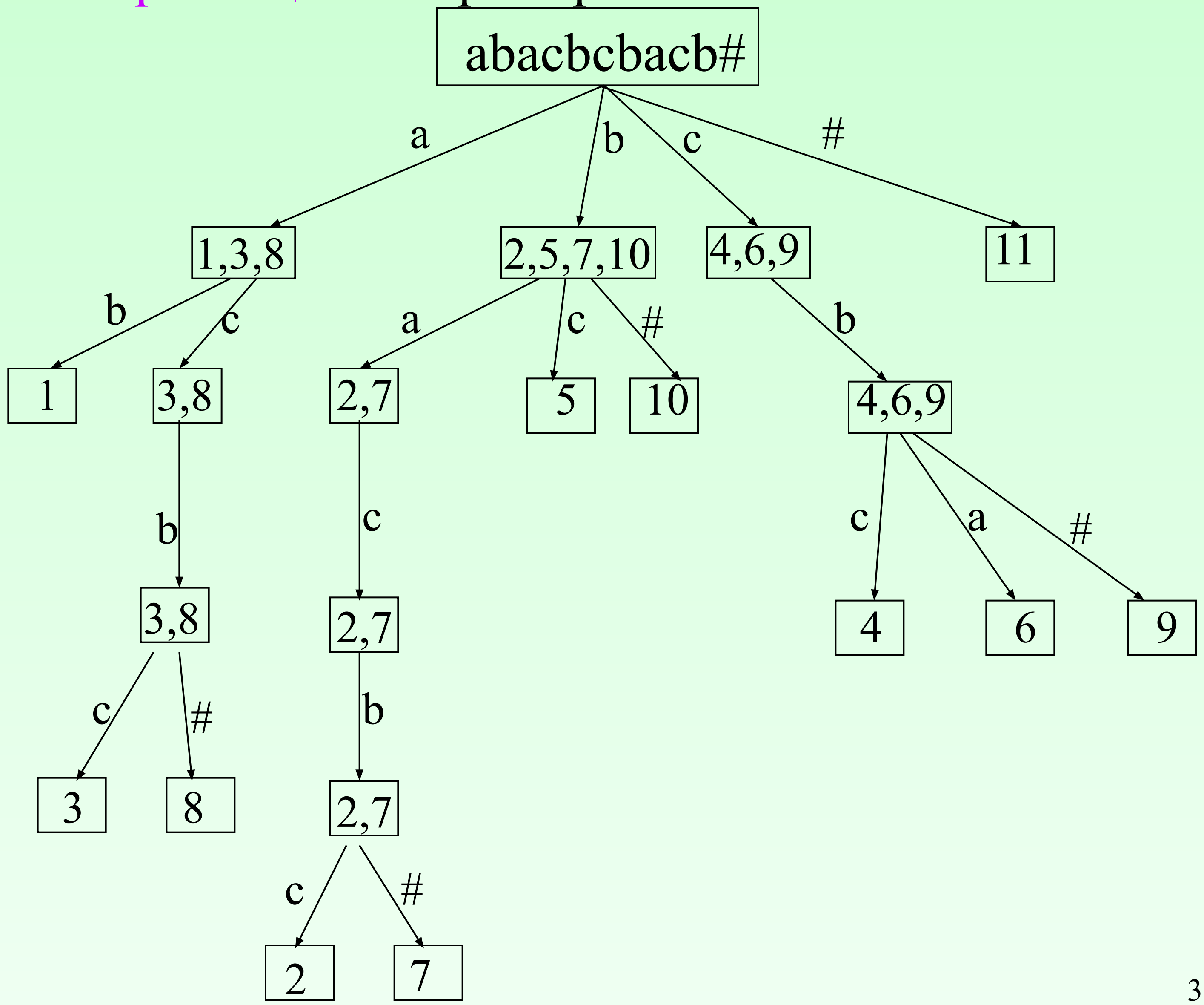
Префиксное дерево = дерево префикс-идентификаторов.

Пример дерева префикс-идентификаторов для T# = abacbcbacb#

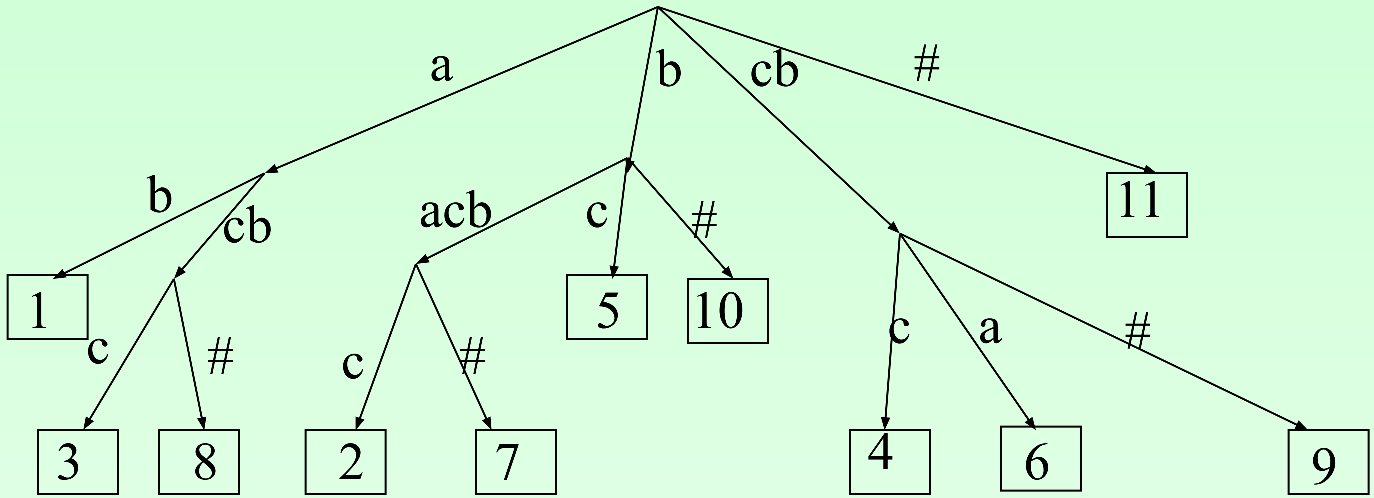
i	$pr(i)$
1.	ab
2.	bacbc
3.	acbc
4.	cbc
5.	bc
6.	cba
7.	bacb#
8.	acb#
9.	cb#
10.	b#
11.	#



Алгоритм Мартинеца на примере   T# = abacbcbacb#

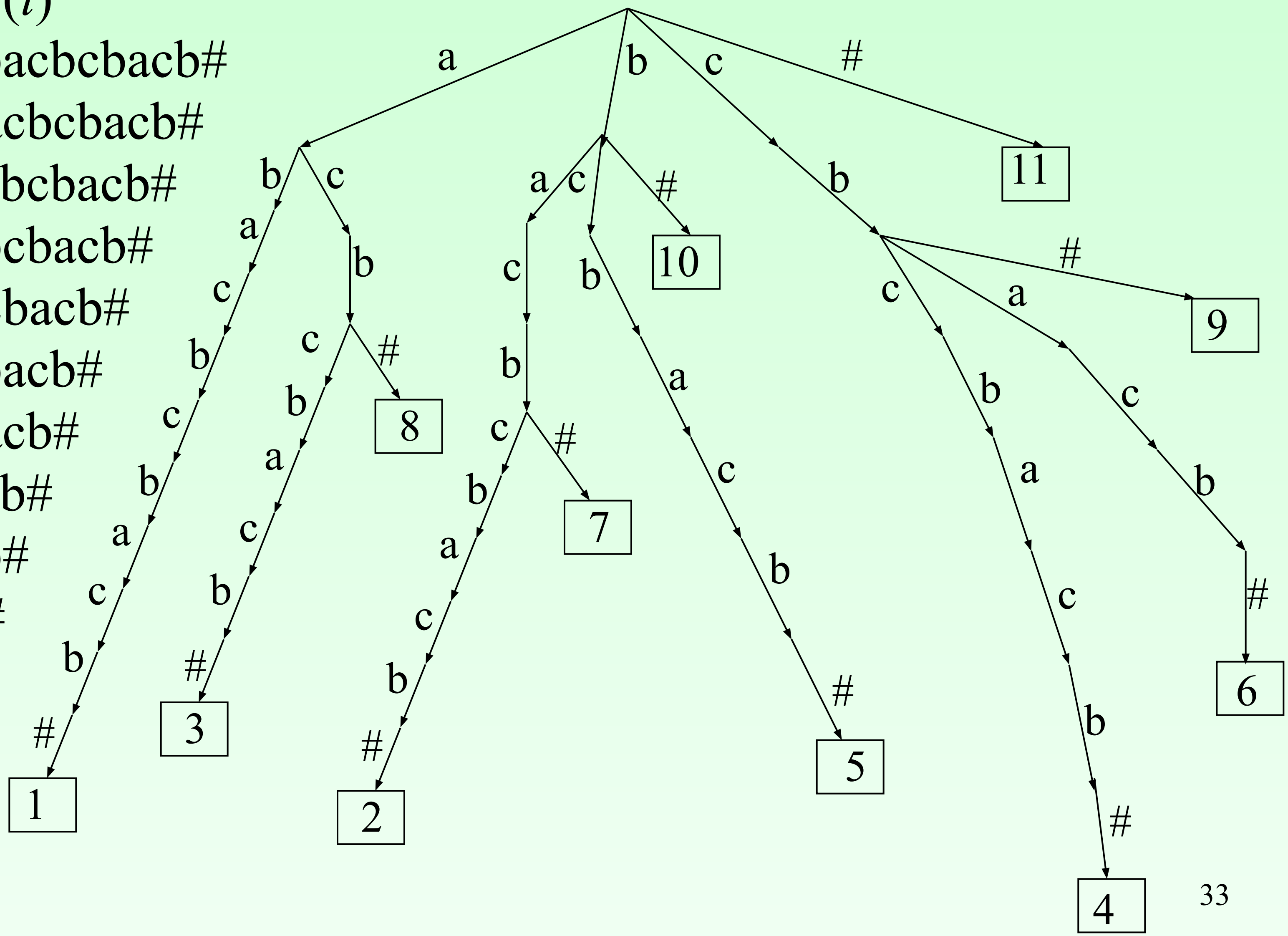


Пример компактного префиксного дерева для T# = abacbcbacb#

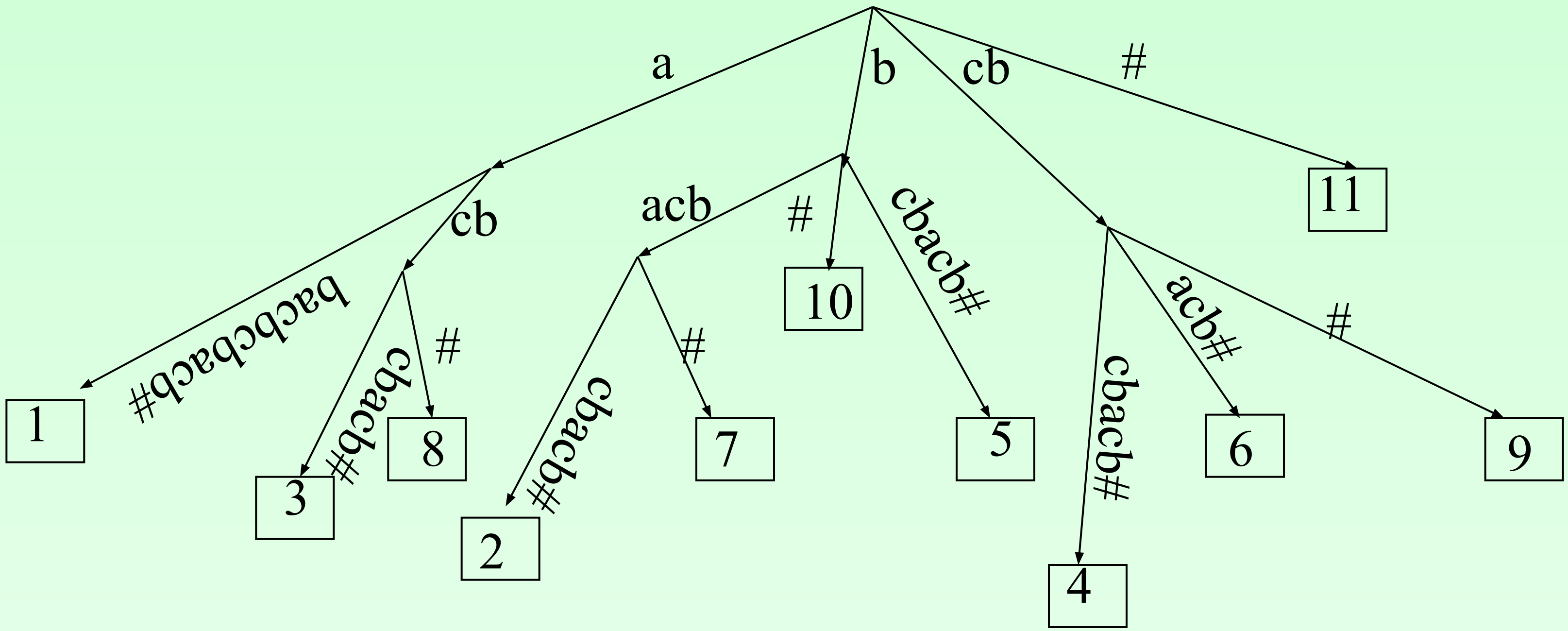


Пример дерева всех суффиксов для T# = abacbcbacb#

i	$suf(i)$
1.	abacbcbacb#
2.	bacbcbacb#
3.	acbcbacb#
4.	cbcbacb#
5.	bcbacb#
6.	cbacb#
7.	bacb#
8.	acb#
9.	cb#
10.	b#
11.	#



Суффиксное дерево для T# = abacbcbacb#



Задачи, решаемые с помощью суффиксного дерева:

- Вычисление параметров полного частотного спектра;
- Поиск образца;
- Последовательный поиск множества образцов;
- Поиск образца во множестве строк;
- Наибольшая общая подстрока двух строк;
- Общие подстроки более чем двух строк;
- Задача загрязнения ДНК. Даны строки S_1 и S_2: S_1 − вновь расшифрованная ДНК, S_2 − комбинация источников возможного загрязнения. Найти все подстроки S_2, которые встречаются в S_1 и длина которых не меньше заданного l;
- Суффиксно-префиксные совпадения всех пар строк (из заданного множества строк);
- Обнаружение всех «нерасширяемых» повторов;
- Задача о наибольшем общем «продолжении». Найти длину наибольшего общего префикса i-го суффикса строки S_1 и j-го суффикса строки S_2
- Выявление всех «нерасширяемых» палиндромов.