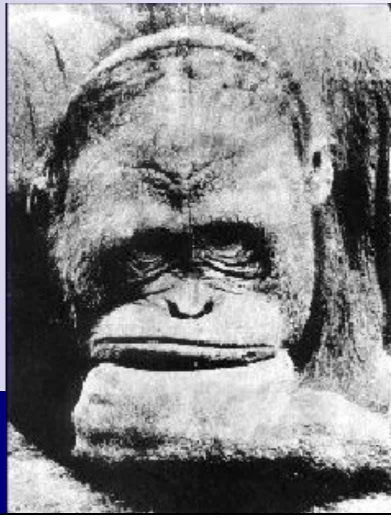
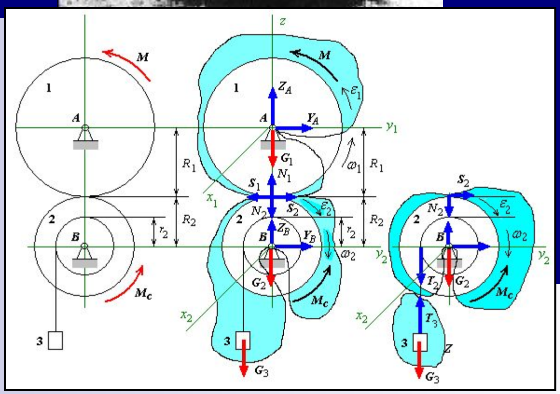
Московский государственный университет путей сообщения
(МИИТ)
Кафедра теоретической механики
Научно-технический центр транспортных технологий
Бондаренко А.Н.





Курс лекций по теоретической механике

Динамика (I часть)

Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СЖД, ПГС и СДМ в НИИЖТе и МИИТе (1974-2006 гг.). Учебный материал соответствует календарным планам в объеме трех семестров.

Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional.

Замечания и предложения можно послать по e-mail: bond@miit.ru .

Москва - 2007

Содержание

- **Лекция 4.** Динамика механической системы. Механическая система. Внешние и внутренние силы. Центр масс системы. Теорема о движении центра масс. Законы сохранения.
- Пример решения задачи на использование теоремы о движении центра масс.
- **Лекция 5.** Импульс силы. Количество движения. Теорема об изменении количества движения. Законы сохранения. Момент количества движения. Теорема об изменении момента количества движения..
- Законы сохранения. Элементы теории моментов инерции. Кинетический момент твердого тела. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела.
- Пример решения задачи на использование теоремы об изменении момента количества движения системы.

Рекомендуемая литература

1. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч.2. М.: Высшая школа. 1977 г. 368 с.
2. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука. 1986 г. 416 с.
3. Сборник заданий для курсовых работ /Под ред. А.А. Яблонского. М.:Высшая школа. 1985 г. 366 с.
4. Бондаренко А.Н. “Теоретическая механика в примерах и задачах. Динамика” (электронное пособие www.miit.ru/institut/ipss/faculties/trm/main.htm), 2004 г.

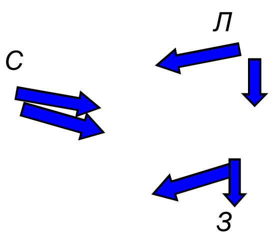
Лекция 4

- **Динамика механической системы.**
- **Система материальных точек или механическая система** – Совокупность материальных точек или материальных тех, объединяемых общими законами взаимодействия (положение или движение каждой из точек или тела зависит от положения и движения всех остальных)
- **Система свободных точек** - движение которых не ограничивается никакими связями (например, планетная система, в которой планеты рассматриваются как материальные точки).
- **Система несвободных точек или несвободная механическая система** – движение материальных точек или тел ограничиваются наложенными на систему связями (например, механизм, машина и т.п.).

- **Силы, действующие на систему**. В дополнение к ранее существовавшей классификации сил (активные и реакции связей) вводится новая классификация сил:

1. **Внешние силы (e)** – действующие на точки и тела системы со стороны точек или тел, не входящих в состав данной системы.
2. **Внутренние силы (i)** – силы взаимодействия между материальными точками или телами, входящими в данную систему.

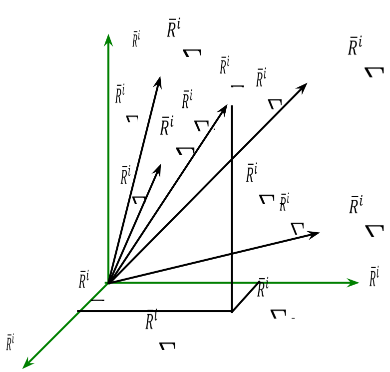
Одна и та же сила может являться как внешней, так и внутренней силой. Все зависит от того, какая механическая система рассматривается.
Например: В системе Солнце, Земля и Луна все силы тяготения между ними являются внутренними. При рассмотрении системы Земля и Луна силы
тяготения, приложенные со стороны Солнца – внешние:



На основании закона действия и противодействия каждой внутренней силе Fk соответствует другая внутренняя сила Fk’, равная по модулю и противоположная по направлению.
Из этого следуют **два замечательных свойства внутренних сил**:

1. **Главный вектор всех внутренних сил системы равен нулю**: $\bar{R}^i$
2. **Главный момент всех внутренних сил системы относительно любого центра равен нулю**: $\bar{R}^i$

Или в проекциях на координатные оси: $\bar{R}^i$ $\bar{R}^i$



- **Центр масс системы материальных точек**. Для описания движения системы в целом вводится геометрическая точка, называемой **центром масс**, радиус-вектор которой определяется выражением $\bar{R}^i$, где *M* – масса всей системы: $\bar{R}^i$

Или в проекциях на координатные оси:

$\bar{R}^i$

Формулы для центра масс аналогичны формулам для центра тяжести. Однако, понятие центра масс более общее, поскольку оно не связано с силами тяготения или силами тяжести.

- **Теорема о движении центра масс системы**

$\bar{R}^i$

Произведение массы системы на ускорение ее центра массе равно главному вектору внешних сил.

В проекциях на координатные оси: $\bar{R}^i$

Центр масс системы движется как материальная точка массой, равной массе всей системы, к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

Следствия из теоремы о движении центра масс системы (законы сохранения):

1. Если в интервале времени [t_1, t_2] главный вектор внешних сил системыравен нулю, $R^e = 0$, то скорость центра масс постоянна , v_C = **const** (центр масс движется равномерно прямолинейно – **закон сохранениядвижения центра масс**).

Аналогичные утверждения справедливы для осей x, y и z.

3. Если в интервале времени [t_1, t_2] главный вектор внешних сил системы равен нулю, $R^e = 0$, и в начальный момент скорость центра масс равна нулю,
$v_C = 0$, то радиус-вектор центра масс остается постоянным, r_C = **const** (центр
масс находится в покое – **закон сохранения положения центра масс**).

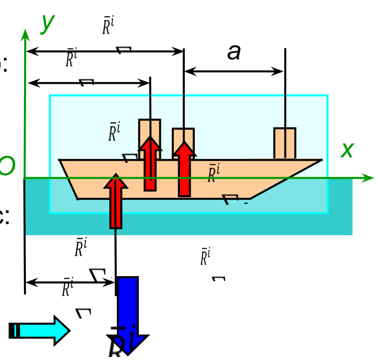
Аналогичные утверждения справедливы для осей x, y и z.

Определим на какое расстояние надо пересесть человеку массы m_1, чтобы лодка осталась на месте:

$\bar{R}^i$

$\bar{R}^i$

Пример: Два человека массами m_1 и m_2 находятся в лодке массой m_3. В начальный момент времени лодка с людьми находилась в покое. Определить перемещение лодки, если человек массой m_2 пересел к носу лодки на расстояние *a*.



1. Объект движения (лодка с людьми):
2. Отбрасываем связи (воду):
3. Заменяем связь реакцией:
4. Добавляем активные силы:
5. Записываем теорему о центре масс:

$\bar{R}^i$

Проецируем на ось *x* : $\bar{R}^i$

$\bar{R}^i$ $\bar{R}^i$

$\bar{R}^i$ $\bar{R}^i$

Лодка переместится на расстояние l в противоположную сторону.

Лекция 4 (продолжение 4.2)

- **Импульс силы** – **мера механического взаимодействия**, характеризующая передачу механического движения со стороны действующих на точку сил за данный промежуток времени:

$\bar{R}^i$

В проекциях на координатные оси: $\bar{R}^i$

В случае постоянной силы: $\bar{R}^i$

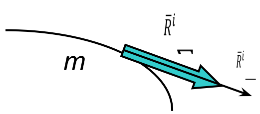
В проекциях на координатные оси: $\bar{R}^i$

- **Импульс равнодействующей** – **равен геометрической сумме импульсов приложенных к точке сил за один и тот же промежуток времени**:

$$\bar{R}^i = \sum \bar{F}_k^i = 0.$$

- **Количество движения точки** – мера механического движения, определяемая вектором, **равным произведению массы точки на вектор ее скорости:**

$\bar{R}^i$



- **Количество движения системы материальных точек** – **геометрическая сумма количеств движения материальных точек:**

$\bar{R}^i$

$\bar{R}^i$

Вектор количества движения системы равен произведению массы всей системы на вектор скорости центра масс системы.

В проекциях на координатные оси: $\bar{R}^i$

- **Теорема об изменении количества движения системы**

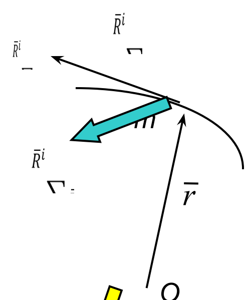
$\bar{R}^i$

Производная вектора количества движения системы по времени равна главному вектору внешних сил системы.

В проекциях на координатные оси: $\bar{R}^i$

- **Момент количества движения точки или кинетический момент движения относительно некоторого центра** – мера механического движения, определяемая вектором, **равным векторному произведению радиуса-вектора материальной точки на вектор ее количества движения:**

$\bar{R}^i$



- **Кинетический момент системы материальных точек относительно некоторого центра – геометрическая сумма моментов количеств движений всех материальных точек относительно этого же центра:**

$\bar{R}^i$

В проекциях на оси: $\bar{R}^i$

- **Теорема об изменении момента количества движения системы**

$\bar{R}^i$

Производная вектора момента количества движения системы относительно некоторого центра по времени равна главному моменту внешних сил системы относительно этого же центра.

В проекциях
на координатные оси:

$\bar{R}^i$

Производная момента количества движения системы относительно некоторой оси по времени равна главному моменту внешних сил системы относительно этой же оси.

- **Следствия из теоремы об изменении момента количества движения системы (законы сохранения)**:

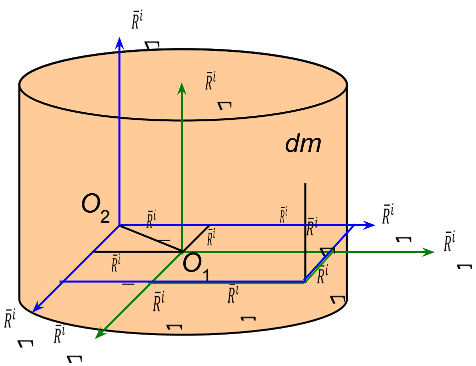
1. Если в интервале времени [t_1, t_2] вектор главного момента внешних сил системы относительно некоторого центра равен нулю, $\boldsymbol{M_O^e} = 0$, то вектор момента количества движения системы относительно этого же центра постоянен, $\boldsymbol{K_O}$ = **const – закон сохранения момента количества движения системы**).

2. Если в интервале времени [t_1, t_2] главный момент внешних сил системы относительно оси x равен нулю, $M_x^e = 0$, то момент количества движения системы относительно оси x постоянен, K_x = const.

Аналогичные утверждения справедливы для осей y и z.

- **Элементы теории моментов инерции** – При вращательном движении твердого тела мерой инерции (сопротивления изменению движения) является момент инерции относительно оси вращения. Рассмотрим основные понятия определения и способы вычисления моментов инерции.

Теорема о моментах инерции твердого тела относительно параллельных осей – формула перехода к параллельным осям:



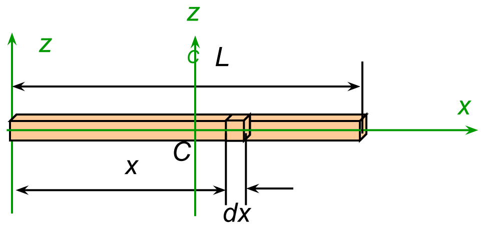
$\bar{R}^i$

Масса тела M

$\bar{R}^i$ Расстояние между осями z_1 и z_2

Лекция 5 (продолжение 5.2)

4.Момент инерции однородного стержня постоянного сечения относительно оси z и Zc:



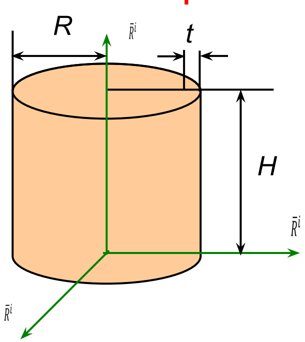
$\bar{R}^i$

Момент инерции стержня относительно центральной оси (проходящей через центр тяжести)

$\bar{R}^i$ $\Rightarrow$ $\bar{R}^i$

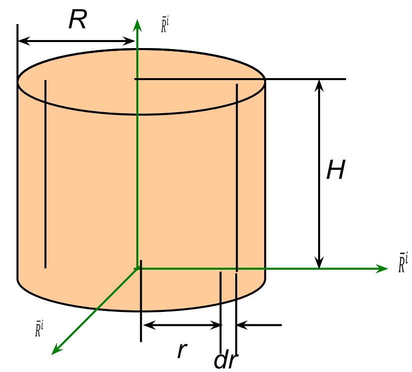
$\bar{R}^i$

6. Момент инерции тонкого цилиндра относительно оси симметрии :



$\bar{R}^i$

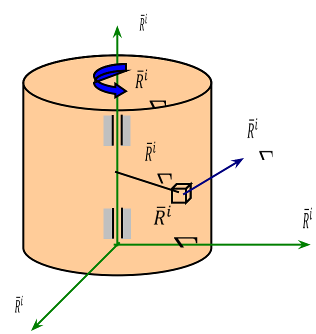
5. Момент инерции однородного сплошного цилиндра относительно оси симметрии:



$\bar{R}^i$

- **Кинетический момент твердого тела**

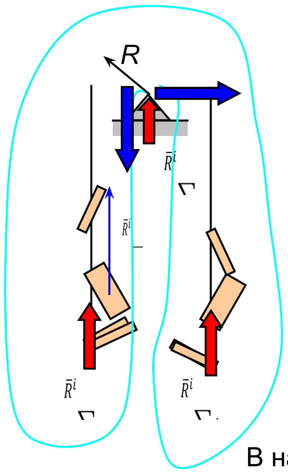
Кинетический момент вращающегося тела равен произведению угловой скорости на момент инерции относительно оси вращения.



$\bar{R}^i$

Лекция 5 (продолжение 5.3)

Пример: Два человека одинакового веса $G_1 = G_2$ висят на канате, переброшенном через сплошной блок весом $G_3 = G_1/4$. В некоторый момент один из них начал подниматься по канату с относительной скоростью u. Определить скорости подъема каждого из людей.



1. Выбираем объект движения (блок с людьми):
2. Отбрасываем связи (опорное устройство блока):
3. Заменяем связь реакциями (подшипника):
4. Добавляем активные силы (силы тяжести):
5. Записываем теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси вращения блока:

$\bar{R}^i$

Так как момент внешних сил равен нулю, то кинетический момент должен оставаться постоянным:

$\bar{R}^i$ ⇒ $\bar{R}^i$

В начальный момент времени $t = 0$ было равновесие и $K_{z0} = 0$.

После начала движения одного человека относительно каната вся система пришла в движение, но кинетический момент системы должен остаться равным нулю: $K_z = 0$.

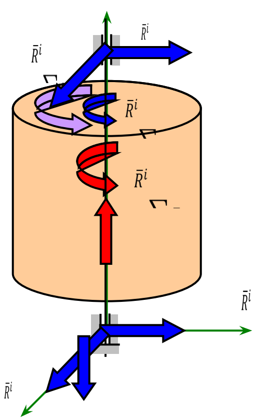
Кинетический момент системы складывается из кинетических моментов обоих людей и блока:

$\bar{R}^i$

Здесь v_2 – скорость второго человека, равная скорости троса,

$\bar{R}^i$ $\bar{D}^i$ $\bar{R}^i$ $\bar{R}^i$ $\bar{D}^i$

- **Дифференциальное уравнение вращения твердого тело относительно оси:**



Запишем теорему об изменении кинетического момента твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$\bar{R}^i$

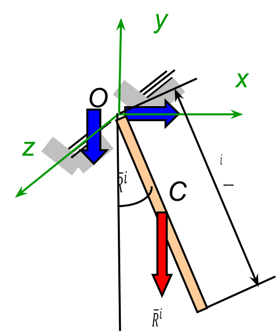
Кинетический момент вращающегося твердого тела равен: $\bar{R}^i$

Момент внешних сил относительно оси вращения равен вращающему моменту (реакции и сила тяжести моментов не создают): $\bar{R}^i$

Подставляем кинетический момент и вращающий момент в теорему

$\bar{R}^i$ ⇒ $\bar{R}^i$

Пример: Определить период малых свободных колебаний однородного стержня массы M и длиной l, подвешенного одним концом к неподвижной оси вращения.



$\bar{R}^i$

Или: $\bar{R}^i$

В случае малых колебаний $\sin\varphi \approx \varphi$:

$\bar{R}^i$ $\bar{R}^i$

Период колебаний: $\bar{R}^i$

Момент инерции стержня: $\bar{R}^i$ $\bar{R}^i$