ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ПРОИЗВОДНАЯ

1. Понятие производной

Рассмотрим задачу о производительности труда, как пример необходимости введения понятия производной функции.

Пусть функция $u=u(t)$ выражает количество произведенной продукции u за время t и необходимо найти производительность труда в момент времени t_0.

Очевидно, за период времени от t_0 до $t+\Delta t$ *количество произведенной продукции изменится от значения* $u_0=u(t_0)$ до значения $u_0+\Delta u=u(t_0+\Delta t)$; тогда средняя производительность труда за этот период времени $z_{cp} = \dfrac{\Delta u}{\Delta t}$

Производительность труда в момент t_0 можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t+\Delta t$ *при* $\Delta t \to 0$, т.е. $z = \lim\limits_{\Delta t \to 0} z_{cp} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta t}$

Этот предел играет чрезвычайно важную роль в математическом анализе, являясь основным понятием дифференциального исчисления.

Дадим общее определение производной.

Пусть функция *y=f(x)* определена на промежутке *X*. Возьмем любую точку $x \in X$. Дадим значению *x* приращение $\Delta x \neq 0$, тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Производной функции *y=f(x)* называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует):

$$y' = \lim_{\Delta x \leftarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \leftarrow 0} \frac{\Delta f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

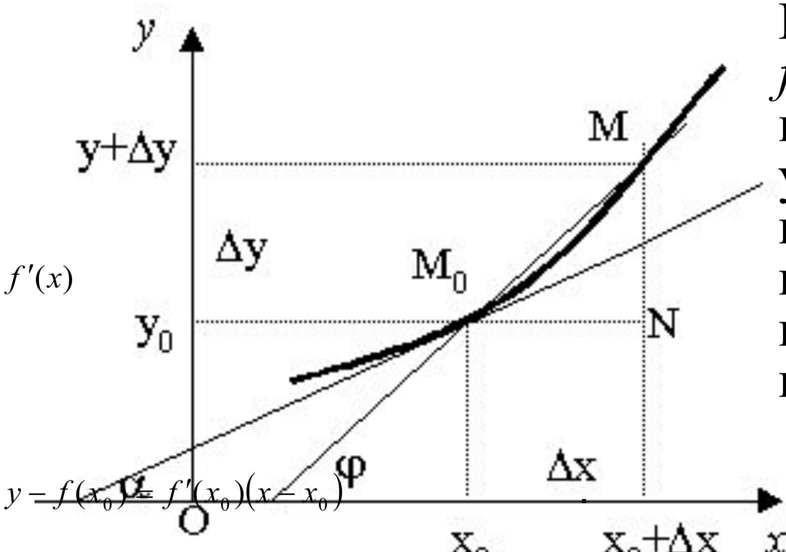
Производная функции имеет несколько обозначений:

$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df(x)}{dx}$$

Нахождение производной функции называется *д**ифференцированием*** этой ***функции***.

Если функция в точке *x* имеет конечную производную, то функция называется ***дифференцируемой в*** этой ***точке***. Функция, дифференцируемая во всех точках промежутка *X*, называется *дифференцируемой на* этом *промежутке*.

Установим геометрический смысл производной. Для этого рассмотрим график функции $y=f(x)$, определенной и непрерывной на некотором интервале (a,b).



Координаты точек: $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$. Прямая, проходящая через точки M_0 и M называется секущей. Обозначим через ϕ угол, который образует секущая M_0M с положительным направлением оси Ox. Под касательной к кривой $y=f(x)$ в точке M_0 будем понимать предельное положение секущей M_0M при приближении точки M к M_0, т.е. при $\Delta x \to 0$.

(тангенс угла ϕ) секущей M_0M может быть найден из треугольника ΔM_0MN:

$$k_{M_0M} = tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Тогда угловой коэффициент касательной -

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} k_{M_0M} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Таким образом из задачи о касательной вытекает ***геометрический смысл производной***: производная есть угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной, проведенной к кривой $y=f(x)$ в точке x_0, т.е.

$$k = f'(x)$$

2. Дифференцируемость функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена на интервале (a,b), x – некоторое фиксированное значение аргумента $x \in (a,b)$, Δx – любое приращение аргумента такое, что $x+\Delta x \in (a,b)$. Тогда:

Функция $y=f(x)$ называется ***дифференцируемой*** в точке x, если приращение *Δy этой функции в точке x*, соответствующее приращению аргумента Δx, может быть представлено в виде $\Delta y=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$, где A – некоторая константа, не зависящая от Δx, а $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция, такая что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$

3. Основные правила дифференцирования

Производная функции $y=f(x)$ может быть найдена по следующей схеме:

.Дадим аргументу x приращение $\Delta x\neq 0$ и найдем наращение функции $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$.

. Находим приращение функции $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

. Составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

4. Находим предел этого отношения при $\Delta x\to 0$, т.е. $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (если он существует).

Пример. Найти производную функции $y=x^3$.

Решение. 1. Дадим аргументу x приращение $\Delta x\neq 0$ и найдем наращенное значение функции $y+\Delta y=(x+\Delta x)^3$.

2. *Находим приращение функции* $\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3-x^3=\Delta x(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)$.

3. Составляем соотношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2$

4. Находим предел $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)=3x^2$

$$\boxed{\left(x^n\right)' = nx^{n-1}}$$

Правила дифференцирования:

.Производная постоянной функции равна нулю, т.е. $c'=0$.

.Производная аргумента равна 1, т.е. $x'=1$.

.Производная алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна такой же сумме производных этих функций, т.е. $(u+v)' = u' + v'$

4. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго, т.е. $(uv)' = u'v + uv'$

Следствие: постоянный множитель можно выносить за знак производной

$$(cu)' = cu'$$

5. Производная частного двух дифференцируемых функций может быть найдена по формуле $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Пример. Найти производную функции $y = x^3\left(\sqrt[4]{x} + 1\right)$ и вычислить ее значение в точке $x=1$.

Решение. Функцию y можно представить как произведение двух функций

$$u = x^3, v = x^{\frac{1}{4}} + 1$$

Тогда производна произведения будет равна

$$y' = \left(x^3\right)'\left(x^{\frac{1}{4}} + 1\right) + x^3\left(x^{\frac{1}{4}} + 1\right)' =$$

$$= 3x^2\left(x^{\frac{1}{4}} + 1\right) + x^3\left(\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + 0\right) = 3x^{\frac{9}{4}} + 3x^2 + \frac{1}{4}x^{\frac{9}{4}} = x^2\left(\frac{13}{4}\sqrt[4]{x} + 1\right)$$

Значение производной в точке $x=1$ вычисляется как $y'(x=1) = 4.25.$

Пример. Найти производную функции $y = \dfrac{x^3 - 1}{\sqrt{x}}$ и вычислить ее значение в точке $x=1$.

Решение. Воспользуемся формулой для производной частного и производной от суммы двух функций:

$$y' = \frac{\left(x^3 - 1\right)'\sqrt{x} - \left(x^3 - 1\right)\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{3x^2\sqrt{x} - \left(x^3 - 1\right)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{5x^3 + 1}{2x\sqrt{x}} \qquad y'(x=1) = 3$$

4. Производная сложной и обратной функций

Пусть переменная y есть функция от переменной u ($y=f(u)$), а переменная u в свою очередь есть функция от переменной x, т.е. задана сложная функция $y=f[\phi(x)]$. Тогда можно сформулировать теорему:

Если $y=f(u)$ и $u=\phi(x)$ – дифференцируемые функции от своих аргументов, то ***производная сложной функции*** существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу u и умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной x, т.е. $y' = f'(u) \cdot u'$

Пусть $y=f(x)$ – дифференцируемая и строго монотонная функция на некотором промежутке X. Если переменную y рассматривать как аргумент, а переменную x как функцию, то новая функция $x=\phi(y)$ является обратной к данной и непрерывной на соответствующем промежутке Y. Докажем теорему:

Для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, ***производная обратной функции*** равна обратной величине производной данной функции, т.е. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$

Пример. Найти производную функции $y=\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$

Решение. Представим $y=\sqrt[3]{u}$, где $u=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

Имеем

$$y'=\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}u'=\frac{1}{3}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'=\frac{1}{3}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{4x}{3(x^2+1)\sqrt[3]{(x^2+1)(x^2-1)^2}}$$

7. Дифференциал функции

Пусть функция *y=f(x)* определена на промежутке *X* и дифференцируема в некоторой окрестности точки $x \in X$. Тогда существует конечная производная $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

На основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций можно записать $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$

где $\alpha(\Delta x)$- бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$.

Таким образом, приращение функции Δy состоит из двух слагаемых:

- *линейного относительно* Δx;
- *нелинейного, представляющего бесконечно малую более высокого порядка, чем* Δx.

Дифференциалом функции называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Под дифференциалом dx независимой x понимают любое, не зависящее от x число, поэтому, по определению, ***дифференциалом независимой переменной*** x называют ее приращение Δx, т.е. полагают $dx=\Delta x$.

Свойства дифференциала в основном аналогичны свойствам производной:

$dc=0$.

$d(cu)=0$.

$d(u \pm v)=du \pm dv$.

$d(uv)=vdu+udv$.

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Найдем *дифференциал сложной функции*. Рассмотрим функцию $y=f(u)$, где аргумент $u=\phi(x)$ сам является функцией от x.

$$dy = f'(u)du$$

Последнее равенство означает, что формула дифференциала не изменяется, если вместо функции от независимой переменной x рассматривать функцию от зависимой переменной u. Это свойство дифференциала получило название *инвариантности формы дифференциала*.

8. Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке (a,b). Ее производная $f'(x)$ называется *производной первого порядка*. Но производная $f'(x)$ *сама является функцией, которая сама может иметь производную. Производная функции* $f'(x)$ в точке $x_0 \in (a,b)$ называется *второй производной функции* $f(x)$ и обозначается $f''(x_0)$ или $f^{(2)}(x_0)$, т.е.

$$y'' = (y')$$

Аналогично: *производной n-го порядка* называется производная от производной (n-1) –го порядка.

Дифференциалом второго порядка d^2y функции $y=f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции, т. е. $d^2y=d(dy)$.

Аналогично: *дифференциалом n-го порядка* d^ny называется дифференциал от дифференциала (n-1)-го порядка этой функции, т. е. $d^ny=d(d^{n-1}y)$.

В общем случае $d^n y = f^{(n)} dx^n$

Пример. Найти производные до n-го порядка включительно от функции

$$y = \ln x$$

Решение. Первая производная - $y' = \dfrac{1}{x}$

вторая производная - $$y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

третья - $$y''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3}$$

четвертая - $$y^{(n)} = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = -\frac{2\cdot 3}{x^4}$$

Очевидно, что производная n-го порядка $$y^{(n)} = -\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

9. Дифференцирование неявной функции и функции, заданной параметрически

Рассмотрим дифференцирование неявной функции, заданной уравнением $F(x,y)=0$.

Для нахождения ***производной неявной функции*** y, нужно продифференцировать обе части уравнения, рассматривая y как функцию от x, а затем из полученного уравнения, найти производную y'.

Пример. Найти производную функции y, заданную уравнением

$$x^2 - xy + \ln y = 0$$

и вычислить ее значение в точке $(2, 1)$.

Решение. Дифференцируем обе части равенства и, учитывая, что y есть функция от x, получим

$$2x - y - xy' + \frac{y'}{y} = 0$$

откуда $$y' = \frac{2xy - y^2}{xy - 1}$$

Значение производной при $x=2$, $y=1$ $$y'(2,1) = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1}{2 \cdot 1 - 1} = 3$$

Иногда оказывается удобным задавать кривую не уравнением вида *F(x,y)=0*, а вводя третью переменную *t*. Совокупность двух уравнений

$$x=\phi(t),\quad y=\psi(t)$$

может служить для построения и исследования кривой, так как при каждом значении t она определяет положение соответствующей точки кривой. Такой способ задания кривой называется ***параметрическим***, а функция $y=\psi\left[\varphi^{-1}(x)\right]$ называется ***заданной параметрически***.

Формула $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ выражает закон *дифференцирования функции, заданной параметрически*.

Для второй производной $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{\left[\varphi'(t)\right]^3}$

Пример. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функции заданной параметрически: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

Решение. Для нахождения производной воспользуемся формулами

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\left[\varphi'(t)\right]^3}$$

где $x = \varphi(t) = \cos t,\ x' = \varphi'(t) = -\sin t;\ y = \psi(t) = \sin t,\ y' = \psi'(t) = \cos t$

Тогда $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos t}{-\sin t} = -ctgt$

$\psi''(t) = -\sin t,\ \varphi''(t) = -\cos t$ и

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-\sin t)((-\sin t) - (-\cos t)(\cos t)}{\sin^3 t} = \frac{1}{\sin^3 t}$$