

**Отбор корней при
решении
тригонометрических
уравнений**

1.

Вычислите:

$$\text{а) } \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2};$$

$$\text{б) } \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6};$$

в) $\arcsin 2$ **(не существует);**

$$\text{г) } \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3};$$

д) $\arccos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ **(не существует);**

$$\text{е) } \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{5\pi}{6}.$$

2. Решить уравнения:

$$\text{a) } \cos x = -1; \quad x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{б) } \sin x = -\frac{1}{2}; \quad x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{в) } \cos x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{г) } \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

1. Выбор корней в тригонометрическом уравнении с помощью числовой окружности.

Пример 1. $\cos x + \cos 2x - \cos 3x =$
1.

Решение.

$$\cos x - \cos 3x - (1 - \cos 2x) = 0,$$

$$2\sin x \sin 2x - 2\sin^2 x = 0,$$

$$2\sin x (\sin 2x - \sin x) = 0,$$

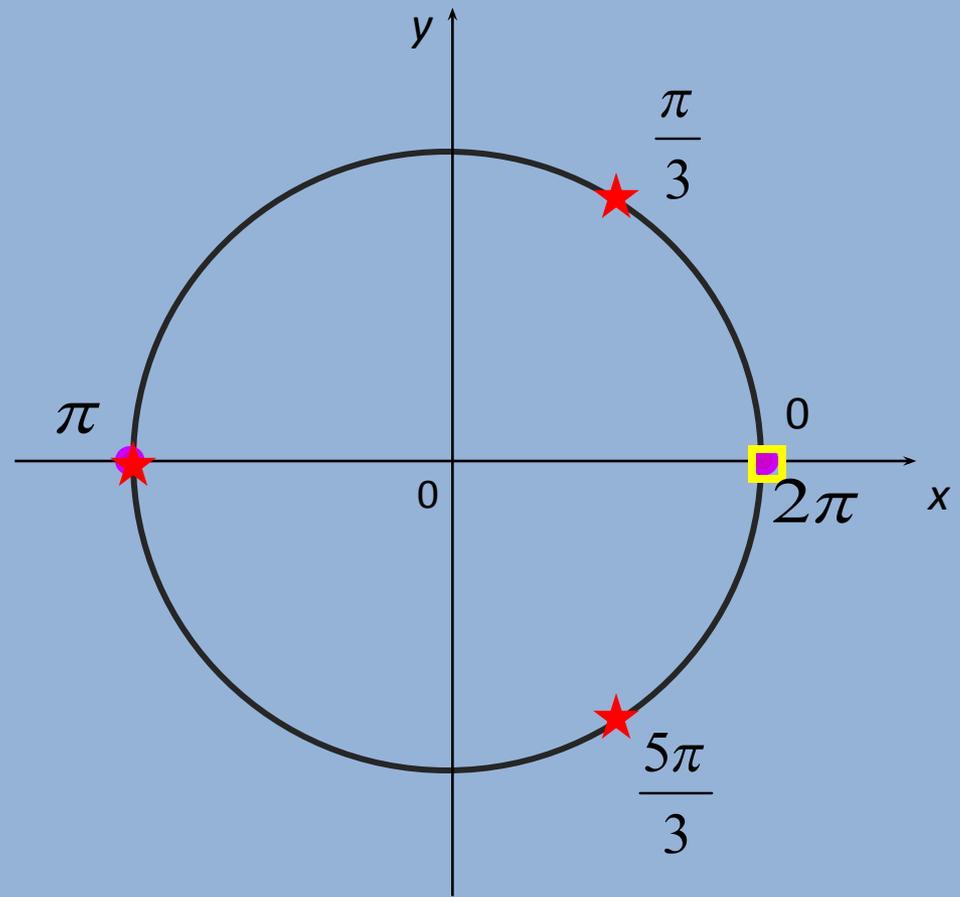
$$4\sin x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{3x\pi}{2} = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin \frac{x}{2} = 0, \\ \cos \frac{3x}{2} = 0; \end{array} \right.$$



$$\left[\begin{array}{l} x = \pi k, k \in Z \\ \frac{x}{2} = \pi n, n \in Z \\ \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z; \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi k, k \in Z \\ x = 2\pi n, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi m}{3}, m \in Z; \end{array} \right.$$



Изобразим серии корней на тригонометрическом круге.

Видим, что первая серия (●) включает в себя корни второй серии (□), а третья серия (★) включает в себя числа вида $x = \pi + 2\pi k$ из корней первой серии (●).

Ответ : $\{2\pi n; \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi m}{3} / n, m \in Z\}$.



Пример 2. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x =$

0.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0;$$

$$\frac{\sin x \cos 2x + \sin 2x \cos x}{\cos x \cos 2x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0;$$

$$\frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0;$$

$$\frac{\sin 3x(\cos 3x - \cos x \cos 2x)}{\cos x \cos 2x \cos 3x} = 0;$$

$$\frac{\sin 3x(\cos 3x - \frac{1}{2} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos x)}{\cos x \cos 2x \cos 3x} = 0;$$

$$\frac{\sin 3x(\frac{1}{2} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos x)}{\cos x \cos 2x \cos 3x} = 0;$$

$$\frac{\frac{1}{2} \sin 3x(\cos 3x - \cos x)}{\cos x \cos 2x \cos 3x} = 0;$$

$$\frac{\frac{1}{2} \sin 3x(-2 \sin 2x \sin x)}{\cos x \cos 2x \cos 3x} = 0;$$

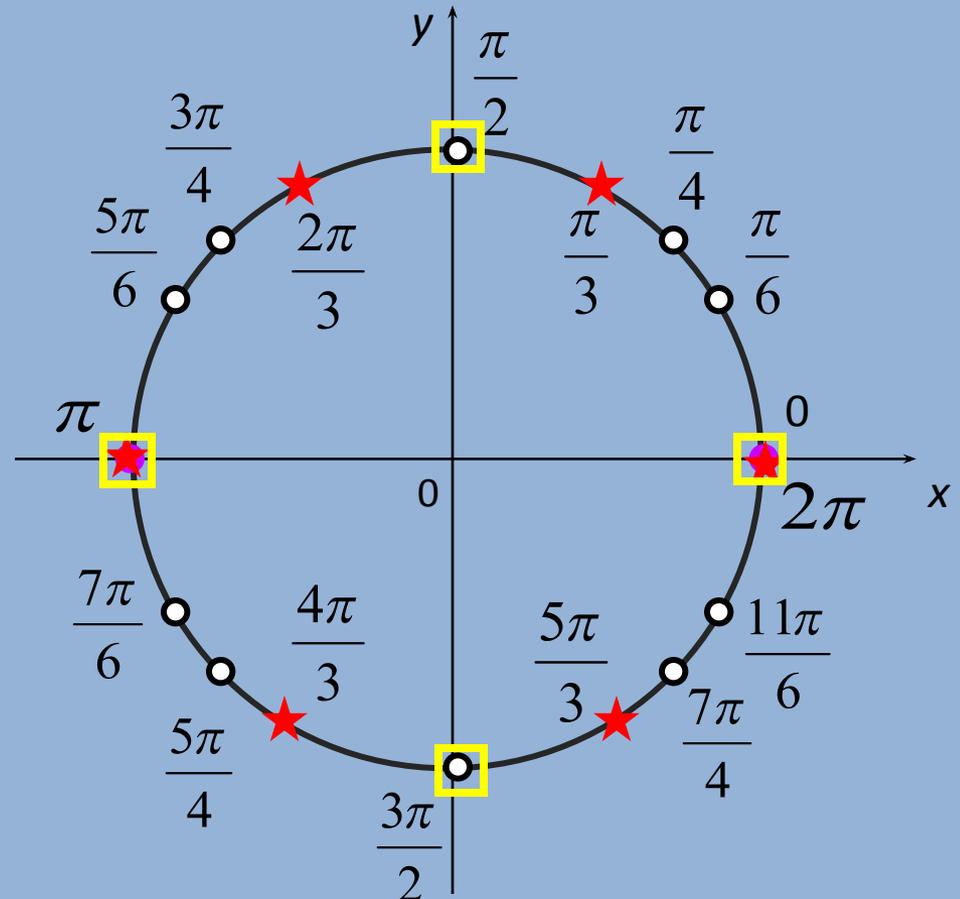
$$\frac{-\sin 3x \sin 2x \sin x}{\cos x \cos 2x \cos 3x} = 0;$$



$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi n, n \in Z, \\ x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z, \\ x = \frac{\pi m}{3}, m \in Z. \end{array} \right.$$

Изобразим ОДЗ и серии корней на числовой окружности.



Из второй серии корней () числа вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ не удовлетворяют ОДЗ, а числа вида $x = \pi k$ входят в третью серию () Первая серия () так же входит в третью серию () корней (), поэтому ответ можно записать одной формулой.

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi m}{3} / m \in Z \right\}.$$



Пример

$$\frac{\cos 3x}{\sin 2x} = 0.$$

3.

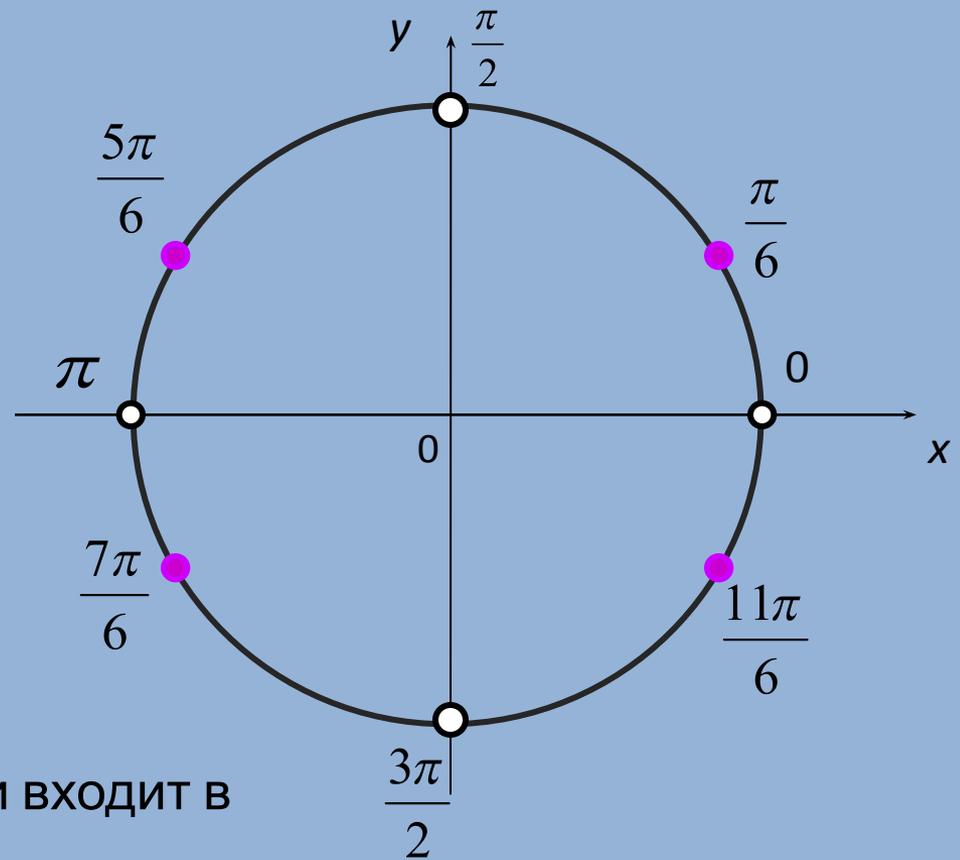
Решени

е.

$$\begin{cases} \cos 3x = 0, \\ \sin 2x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z; \end{cases}$$



Иногда случается, что часть серии входит в ответ,

а часть нет. Нанесем на числовую окружность корни, все числа серии $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$ удовлетворяющие

условию $x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z$.

Оставшиеся решения из серии корней можно объединить в формулу

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ : $\left\{ \pm \frac{\pi}{6} + \pi n / n \in Z \right\}.$

2. Отбор корней в тригонометрическом уравнении алгебраическим способом

Пример

1.

$$\cos 2x + \cos \frac{3x}{4} = 2$$

Решение.

Поскольку наибольшее значение функции $y = \cos t$ равно 1, то уравнение

равносильно системе

$$\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \cos \frac{3x}{4} = 1; \\ x = \pi k, k \in Z, \\ x = \frac{8\pi n}{3}, n \in Z; \end{cases}$$

Решением уравнения является пересечение серий, то есть нам надо решить уравнение

$$\pi k = \frac{8\pi n}{3};$$

$$k = \frac{8n}{3};$$

Получаем

м

$$k = 8t, \quad n = 3t, t \in Z$$

Итак, $x = 8\pi t, t \in Z$.

Ответ : $\{8\pi t \mid t \in Z\}$.

Пример

$$\cos \frac{x}{4} \sin x - 2 \sin^2 x + \cos x + \sin \frac{x}{4} \cos x - 2 \cos^2 x = 0.$$

2.

Решени

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x = 2;$$

$$\begin{cases} \sin \frac{5x}{4} = 1, \\ \cos x = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5x}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi}{5} + \frac{8\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}, \\ x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$2\pi k = \frac{2\pi}{5} + \frac{8\pi n}{5};$$

Решением уравнения является пересечение серий, то есть нам надо

решить уравнение $k = \frac{1 + 4n}{5};$

$$5k = 1 + 4n;$$

$$n = \frac{5k - 1}{4};$$

$$n = k + \frac{k - 1}{4}, \text{ где } \frac{k - 1}{4} \text{ — целое число.}$$

Пусть $\frac{k - 1}{4} = m,$ тогда

$$k = 4m + 1, \quad n = 5m + 1.$$

Итак, $x = 2\pi + 8\pi m, m \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\{2\pi + 8\pi m / m \in \mathbb{Z}\}.$

3. Отбор корней в тригонометрическом уравнении с некоторыми условиями

Пример 1. Найти корни уравнения $\sin 2x = \cos x \mid \cos x \mid$,
удовлетворяющие
условию $x \in [0; 2\pi]$.

Решение.

$$\sin 2x = \cos x \mid \cos x \mid;$$

$$2\sin x \cdot \cos x - \cos x \mid \cos x \mid = 0;$$

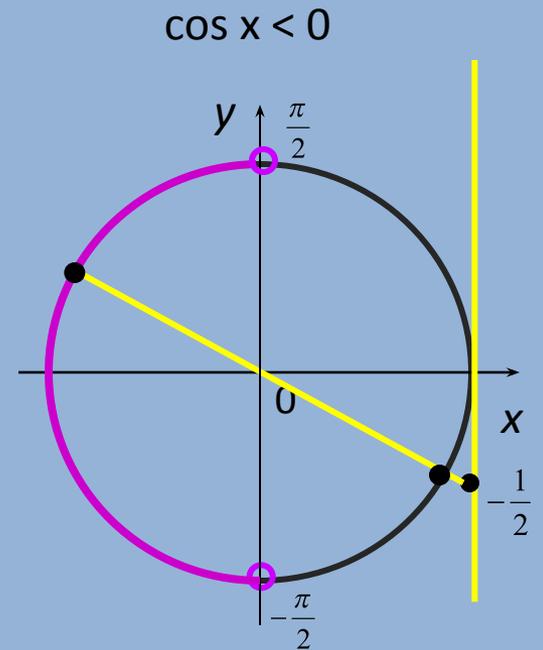
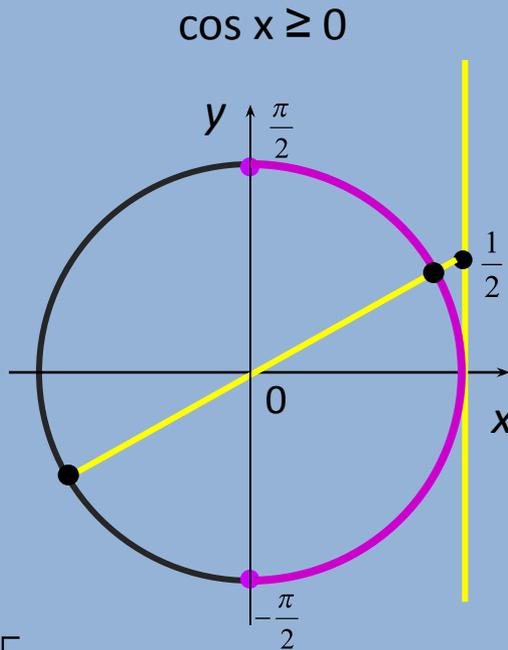
$$\cos x (2\sin x - \mid \cos x \mid) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \cos x \geq 0, \\ \cos x(2\sin x - \cos x) = 0; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \cos x < 0, \\ \cos x(2\sin x + \cos x) = 0; \end{array} \right. \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ x = \arctg \frac{1}{2} + \pi k, k \in Z; \end{array} \right. \\ \cos x < 0, \\ \left. \begin{array}{l} x = -\arctg \frac{1}{2} + \pi m, m \in Z. \end{array} \right\}$$

Найдём решение систем с помощью числовых окружностей:



$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ x = \arctg \frac{1}{2} + 2\pi k, k \in Z. \end{array} \right.$$

$$x = \pi - \arctg \frac{1}{2} + 2\pi m, m \in Z.$$

Условию

$x \in [0; 2\pi]$ удовлетворяют числа $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \arctg \frac{1}{2}$

(для первой системы) и $x = \pi - \arctg \frac{1}{2}$ (для второй системы).

Ответ : $\left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \arctg \frac{1}{2}; \pi - \arctg \frac{1}{2} \right\}$.



Пример 2. Найти все решения уравнения

принадлежащие отрезку $[\pi; \frac{3\pi}{2}]$.

$$\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{2} \cos 3x = 0,$$

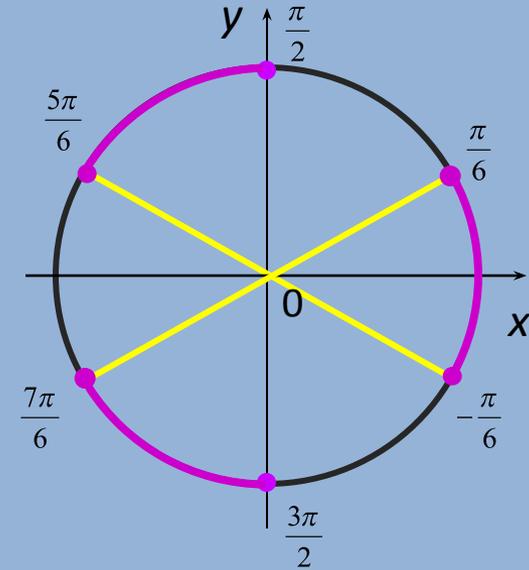
Решение.

ОДЗ: $\cos 3x \geq 0$;

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 3x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

Отметим ОДЗ на тригонометрическом круге:



Отрезку $[\pi; \frac{3\pi}{2}]$ принадлежит только один промежуток из ОДЗ, а

Решим уравнение и выберем корни, принадлежащие этому промежутку:

$$1 + \sin 2x = 2\cos^2 3x;$$

$$\sin 2x = \cos 6x;$$

$$\sin 2x - \cos 6x = 0;$$

$$\sin 2x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) = 0;$$

$$\left[\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right].$$



$$2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

$$2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0. \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ 4x - \frac{\pi}{4} = \pi k, k \in Z. \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \\ x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z. \end{array} \right.$$

Выберем корни,
удовлетворяющие условию
задачи.

Из первой

серии:

$$\frac{7\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \leq \frac{3\pi}{2}, n \in Z;$$

$$28\pi \leq 9\pi + 12\pi n \leq 36\pi, n \in Z;$$

$$19 \leq 12n \leq 27, n \in Z.$$

Следовательно $n=2$, то
есть

$$x = \frac{11\pi}{8}.$$

Из второй

серии:

$$\frac{7\pi}{6} \leq \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4} \leq \frac{3\pi}{2}, n \in Z;$$

$$56\pi \leq 3\pi + 12\pi n \leq 72\pi, n \in Z;$$

$$53 \leq 12n \leq 69, n \in Z.$$

Следовательно $n=5$, то
есть

$$x = \frac{21\pi}{16}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{11\pi}{8}; \frac{21\pi}{16} \right\}$.



Пример 3. Найти все корни уравнения

которые удовлетворяют условию

$$10 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{2} + 2x\right) + 3,$$

$$x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{19\pi}{12}\right].$$

Решение.

$$10 \sin^2 x = -\cos 2x + 3;$$

$$10 \sin^2 x = 2 \sin^2 x - 1 + 3,$$

$$8 \sin^2 x = 2;$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{4};$$

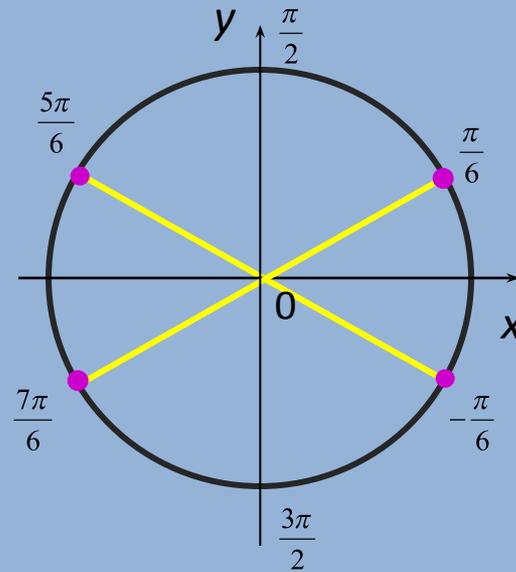
$$\sin x = \pm \frac{1}{2};$$

$$\left[x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \right.$$

$$\left. x = (-1)^m \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi m, m \in \mathbb{Z}; \right.$$

С помощью числовой окружности получим:

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$



Выберем корни, удовлетворяющие условию

задачи.
Из первой
серии:

$$-\frac{2\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6} + \pi n \leq \frac{19\pi}{12}, n \in \mathbb{Z};$$

$$-8\pi \leq 2\pi + 12\pi n \leq 19\pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$-10 \leq 12n \leq 17, n \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно $n=0$ или $n=1$, то
есть

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6}, \\ x = \frac{7\pi}{6}. \end{cases}$$

Из второй
серии:

$$-\frac{2\pi}{3} \leq -\frac{\pi}{6} + \pi n \leq \frac{19\pi}{12}, n \in \mathbb{Z};$$

$$-8\pi \leq -2\pi + 12\pi n \leq 19\pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$-6 \leq 12n \leq 21, n \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно $n=0$ или $n=1$, то
есть

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6}, \\ x = \frac{5\pi}{6}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \pm \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} \right\}$.

