Черкаський державний технологічний університет

ТЕМА: “Задача лінійного програмування та деякі методи їх розв’язування"

Дисципліна “Інформаційні технології аналізу систем”

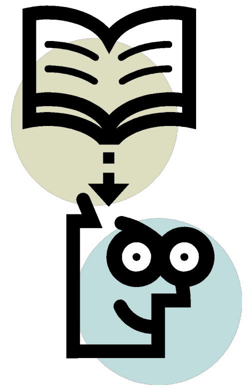
Лекція 8-9

Викладач: Герасименко І. В.

Питання:

1. Загальна задача лінійного програмування та її подання в канонічній формі.
2. Поняття плану, опорного плану, невиродженого опорного плану, оптимального плану задачі лінійного програмування.
3. Властивості розв’язків задачі лінійного програмування.
4. Геометричний метод розв’язування задачі лінійного програмування.

1. Загальна задача лінійного програмування та її подання в канонічній формі



Задача однокритеріальної оптимізації

$$f(x) \to \min(\max), x \in X,$$

в якій цільова функція лінійна і множина ***X*** визначається системою лінійних рівнянь і(або) нерівностей називається задачею **лінійного програмування.**

1. Загальна задача лінійного програмування та її подання в канонічній формі

Загальна задача лінійного програмування

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min(\max)$$

$$X = \{x \in R^n \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,k},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{k+1,m}, \qquad (1)$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,s},\ s \le n\}$$

де $c_j,\ a_{ij},\ b_i \in R^1\ \ i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ - задані дійсні числа.

Класифікація задач лінійного програмування

- Загальна задача лінійного програмування
  - Основна задача ЛП
  - Стандартна задача ЛП
    - Перша стандартна ЗЛП
    - Друга стандартна ЗЛП
  - Канонічна задача ЛП

1. Загальна задача лінійного програмування та її подання в канонічній формі

Основна задача лінійного програмування

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min(\max), \qquad (2)$$

$$X = \{x \in R^n \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m}\},$$

де $c_j,\ a_{ij},\ b_i \in R^1\ \ i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ - задані дійсні числа.

1. Загальна задача лінійного програмування та її подання в канонічній формі

Перша стандартна задача лінійного програмування

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

(3)

$$X = \{x \in R^n \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,m}, x_j \ge 0, j = \overline{1,n}\},$$

де $c_j, a_{ij}, b_i \in R^1$ $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ - задані дійсні числа.

1. Загальна задача лінійного програмування та її подання в канонічній формі

Друга стандартна задача лінійного програмування

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

(3’)

$$X = \{x \in R^n \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, i = \overline{1,m}, x_j \ge 0, j = \overline{1,n}\},$$

де $c_j,\ a_{ij},\ b_i \in R^1 \quad i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ - задані дійсні числа.

1. Загальна задача лінійного програмування та її подання в канонічній формі

Канонічна задача лінійного програмування

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min(\max)$$

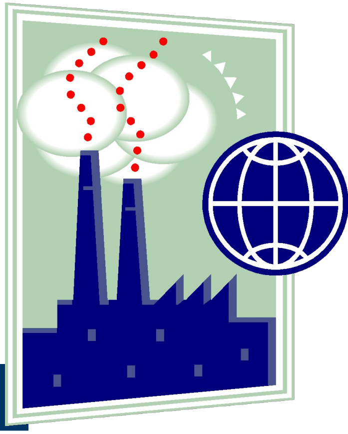
(4)

$$X = \{x \in R^n \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1,m},\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}\},$$

де $c_j,\ a_{ij},\ b_i \in R^1 \ \ i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ - задані дійсні числа.

Приклад 1.

Економічна постановка задачі

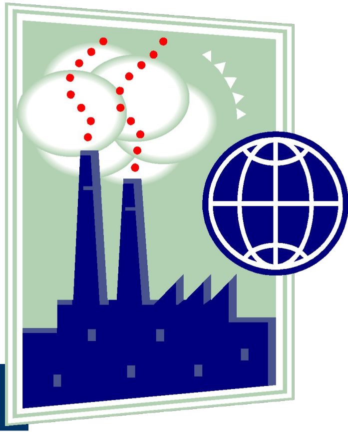


Підприємство може здійснювати випуск продукції за трьома технологіями Т1, Т2 ,Т3. Види і норми витрат ресурсів на один виріб продукції, продуктивність кожної технології та загальна кількість наявних ресурсів наведено в таблиці.

Визначити скільки часу необхідно працювати за кожною з технологій, щоб обсяг виробництва підприємством продукції за наявних умов був найбільшим.

Приклад 1.

Таблиця вхідних даних



Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб за кожною технологією			Загальна кількість ресурсів
	T_1	T_2	T_3	
Сировина (кг)	1,5	1,2	1,8	20000
Електроенергія (квт/год)	4,0	3,5	3,0	5000
Трудові ресурси (людино-год.)	1,5	1,0	2,5	20000
Продуктивність (шт./год.)	25	30	35	

Завдання: побудувати математичну модель поставленої задачі, визначити до якого класу задач математичного програмування вона належить, записати математичну модель у канонічному вигляді, розв”язати задачу за допомогою пакету MathCad.

Математична модель задачі з прикладу 1

$$F(x_1, x_2, x_3) = 25x_1 + 30x_2 + 35x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 1{,}5 \cdot 25x_1 + 1{,}2 \cdot 30x_2 + 1{,}8 \cdot 35x_3 \le 20000, \\ 4 \cdot 25x_1 + 3{,}5 \cdot 30x_2 + 3 \cdot 35x_3 \le 5000, \\ 1{,}5 \cdot 25x_1 + 1 \cdot 30x_2 + 2{,}5 \cdot 35x_3 \le 20000, \end{cases}$$

$$\boxed{x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1{,}3},}$$

де x_i – кількість годин роботи за T_i-ою технологією (i=1,2,3).

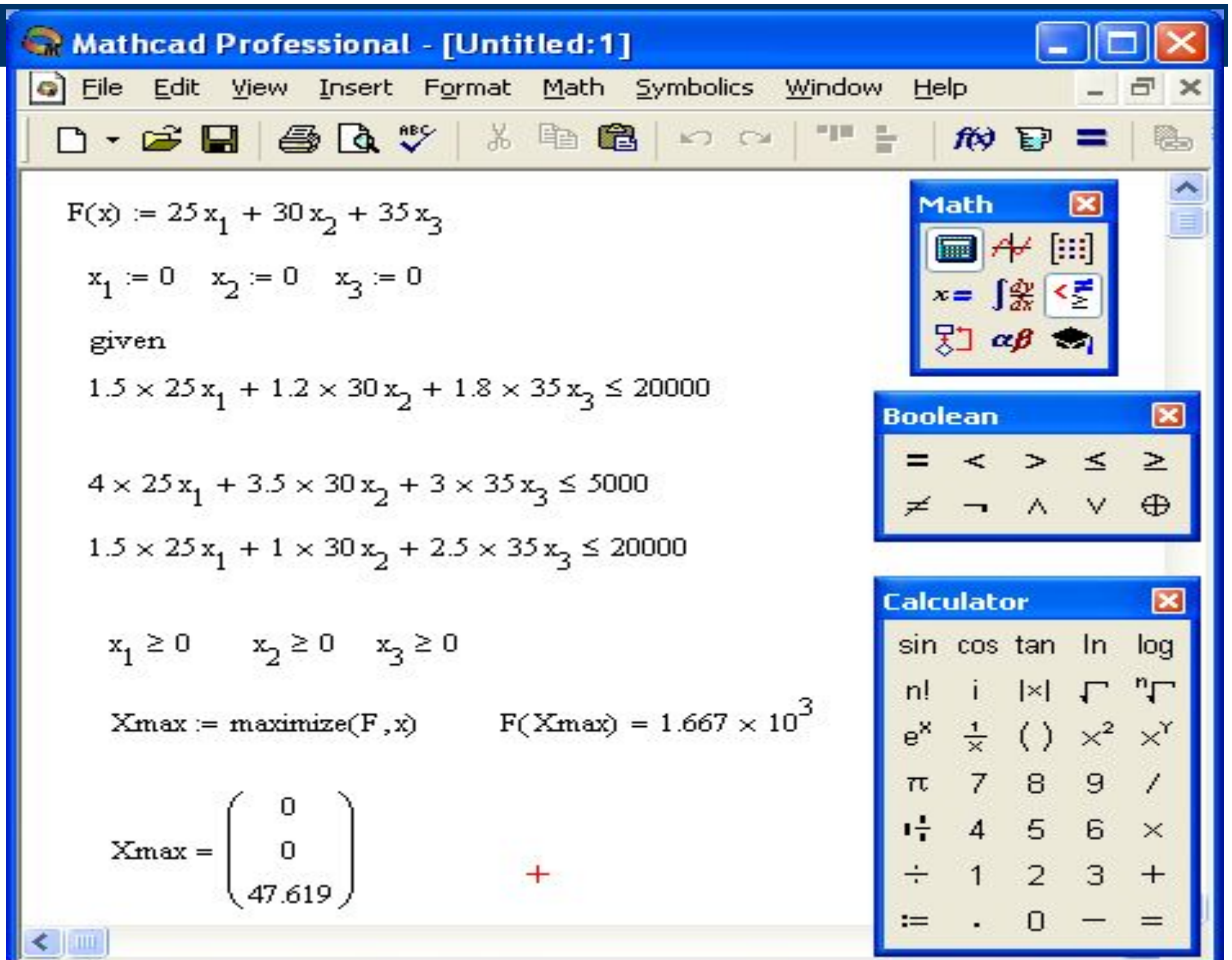
Канонічна форма математичної моделі задачі з прикладу 1

$$F(x) = 25x_1 + 30x_2 + 35x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 1{,}5 \cdot 25x_1 + 1{,}2 \cdot 30x_2 + 1{,}8 \cdot 35x_3 + x_4 = 20000, \\ 4 \cdot 25x_1 + 3{,}5 \cdot 30x_2 + 3 \cdot 35x_3 + x_5 = 5000, \\ 1{,}5 \cdot 25x_1 + 1 \cdot 30x_2 + 2{,}5 \cdot 35x_3 + x_6 = 20000, \end{cases}$$

$$\boxed{x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1{,}6}}$$

Розв’язок задачі за допомогою п MathCad



Висновок:

Оптимальний план використання підприємством технологій для випуску продукції:

за технологією Т1 – 0 годин,

за технологією Т2 – 0 годин,

за технологією Т3 – 47,6 години.

При цьому максимальний обсяг випуску продукції підприємством становить

1666 виробів.

2. Поняття плану, опорного плану, невиродженого опорного плану, оптимального плану задачі лінійного програмування

Розглянемо задачу лінійного програмування, записану в канонічній формі:

(5) $$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min\ (\max),$$

(6) $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

(7) $$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$$

$$b_i \geq 0,\ i = \overline{1,m},\ m \leq n$$

2. Поняття плану, опорного плану, невиродженого опорного плану, оптимального плану задачі лінійного програмування

Введемо позначення: $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

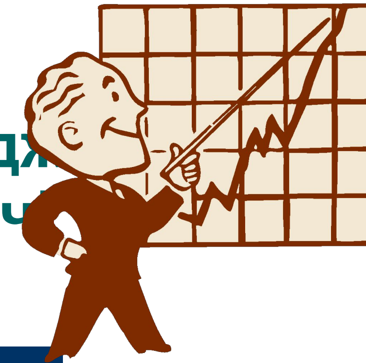
$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ a_{m1} \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ . \\ a_{m2} \end{pmatrix}, P_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ . \\ a_{mm} \end{pmatrix}, \; P_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ . \\ a_{mm+1} \end{pmatrix}, \; \ldots\ldots, P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ . \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \; P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{pmatrix}.$$

$$f(x) = \langle c, X \rangle \rightarrow \min \; (\max)$$

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_m P_m + \ldots + x_n P_n = P_0$$

$$X \geq 0$$

2. Поняття плану, опорного плану, невиродж опорного плану, оптимального плану задач лінійного програмування



Означення 1. *Планом* задачі лінійного програмування (5)-(7) називається вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, компоненти якого задовольняють умови (6), (7).

Означення 2. План $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ задачі (5)-(7) називається *опорним*, якщо вектори P_j, які відповідають додатним компонентам x_j плану X, утворюють лінійно-незалежну систему.

Зауваження. Оскільки вектори P_j є m-вимірними, то максимальне число таких векторів, що утворюють лінійно-незалежну систему, не перевершує m. Звідси випливає, що кожний опорний план містить не більше ніж m додатних компонент.

2. Поняття плану, опорного плану, невиродженого опорного плану, оптимального плану задачі лінійного програмування

Означення 3. Опорний план називається *невиродженим*, якщо він містить рівно *m* додатних компонент. Якщо опорний план містить менше за *m* додатних компонент, то такий опорний план називається *виродженим*.

Означення 4. ***Оптимальним планом*** або *розв`язком задачі* лінійного програмування (5)-(7), називається план цієї задачі, який мінімізує (максимізує) лінійну функцію (5), іншими словами, X^* – оптимальний план задачі лінійного програмування, якщо для будь-якого плану X задачі (5)-(7) виконується умова

$$f(X^*) \le f(X) \ \left(f(X^* \ge f(X))\right)$$

2. Поняття плану, опорного плану, невирод… опорного плану, оптимального плану зада… лінійного програмування

Приклад 2. Нехай задача лінійного програмування має вигляд

$$f(x)=2x_1-x_2+2x_3-3x_4\rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3+5x_4=2, \\ x_1+3x_2+2x_3-3x_4=3; \end{cases}$$

$$x_j\geq 0,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

З'ясувати, які з векторів є планами, опорними планами:

$$X_1=(1,0,1,0)\quad X_2=(0,1,0,1)\quad X_3=(0,1,0,0)$$

$$X_4=(0,0,3,1)\quad X_5=\left(\frac{3}{2},0,0,-\frac{1}{2}\right)\quad X_6=\left(\frac{1}{2},0,2,\frac{1}{2}\right)$$

3. Властивості розв'язків задачі лінійного програмування

Запишемо задачу (5) – (7) у матричному вигляді:

(8) $$f(X) = cX^T \to \min(\max)$$

(9) $$A \cdot X^T = b$$

(10) $$X \geq 0$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots \\ a_{m1}\, a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

3. Властивості розв'язків задачі лінійного програмування

Теорема 1. ***Множина всіх планів задачі (8)–(10) – опукла.***

Опуклу множину планів задачі лінійного програмування позначимо через ***М.***

Зауважимо, що ***М*** може бути порожньою множиною, опуклим многогранником або необмеженою опуклою многогранною областю.

3. Властивості розв’язків задачі лінійного програмування

Нехай лінійна функція задачі лінійного програмування обмежена знизу і зверху на множині планів.

Теорема 2. Лінійна функція задачі лінійного програмування (8) – (10) досягає мінімального (максимального) значення у крайній точці опуклої множини *M* планів задачі. Якщо лінійна функція набуває мінімального (максимального) значення більш ніж в одній крайній точці, то вона набуває цього ж значення в будь-якій точці, яка є опуклою комбінацією цих точок.

3. Властивості розв’язків задачі лінійного програмування

Теорема 3 (критерій крайності точки опуклої множини планів). *Для того щоб точка* ***X***, *яка містить* ***m*** *додатніх координат, була крайньою точкою множини планів* ***M*** *задачі лінійного програмування* (8)-(10)*, необхідно і досить, щоб вектори , які відповідають додатним компонентам , утворювали лінійно незалежну систему.*

4. Геометричний метод розв’язування задачі лінійного програмування

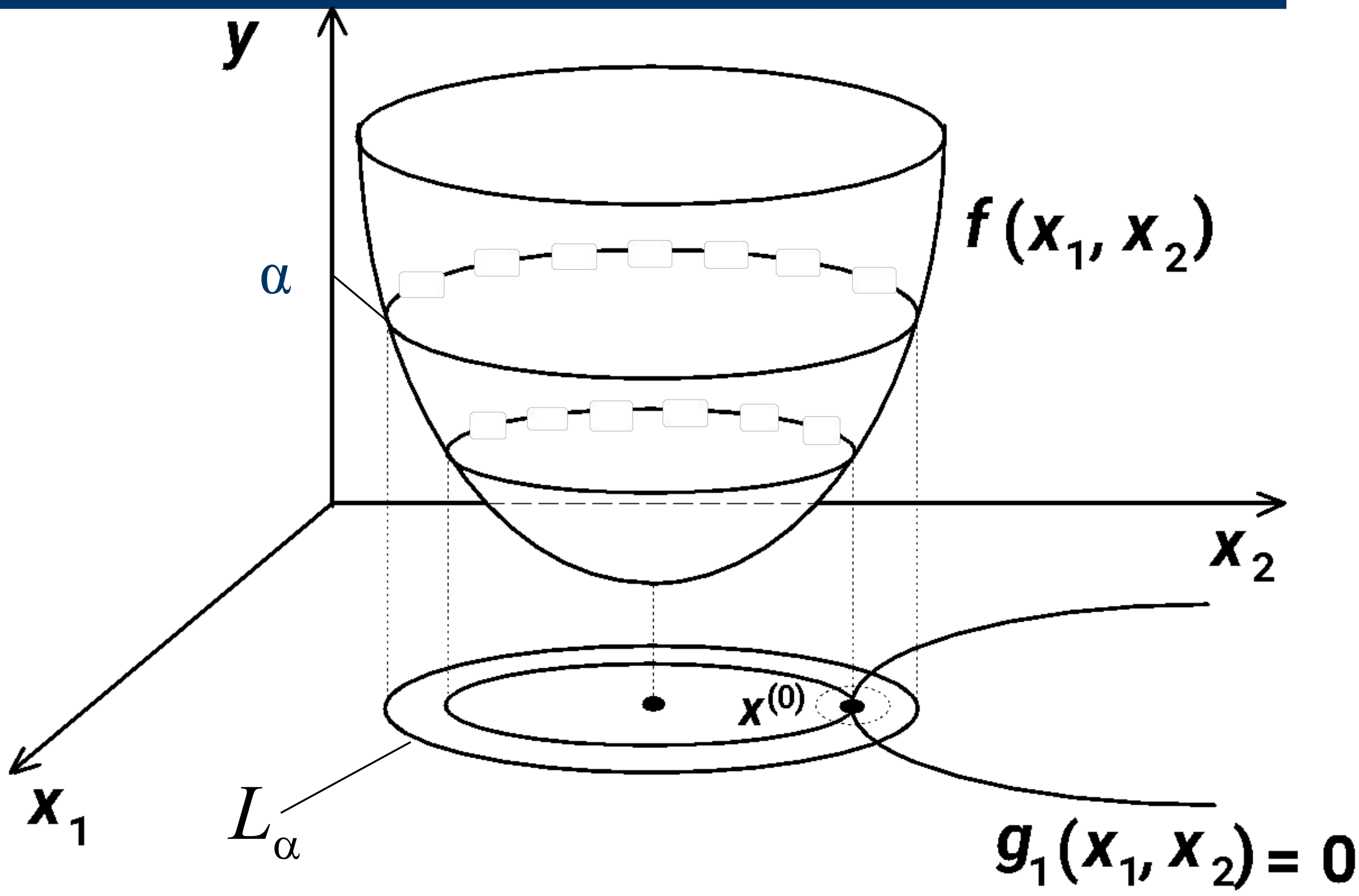
Розглянемо двовимірну задачу мінімізації:

(11) $$f(x_1, x_2) \to min, x \in X \subset R^2$$

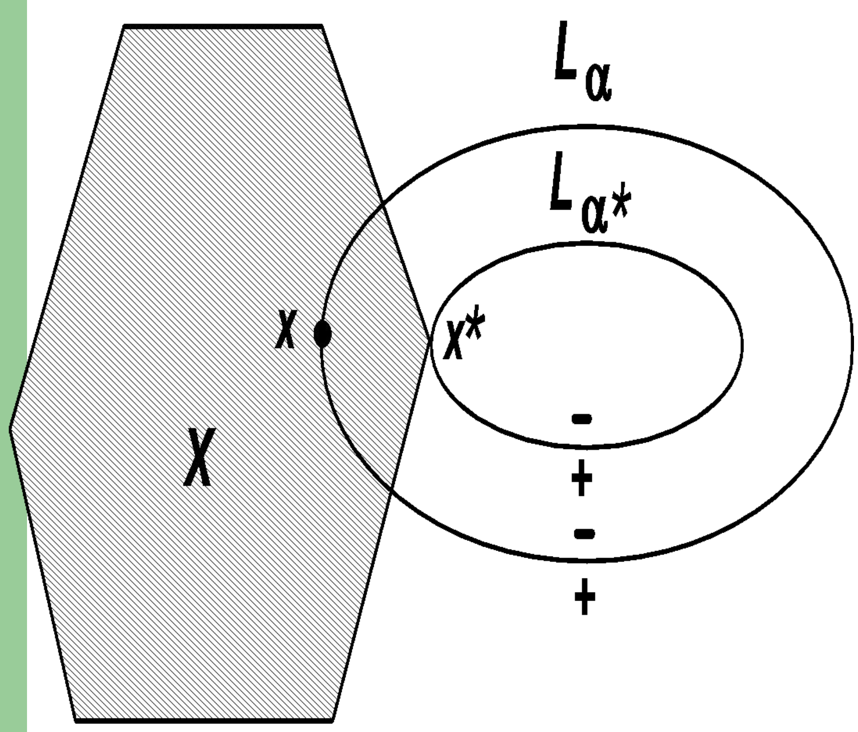
Лінією (поверхнею) рівня функції $f(x)$ є множина точок

$$L_\alpha = \{x \in R^n \mid f(x) = \alpha, \alpha \in R^1\}$$

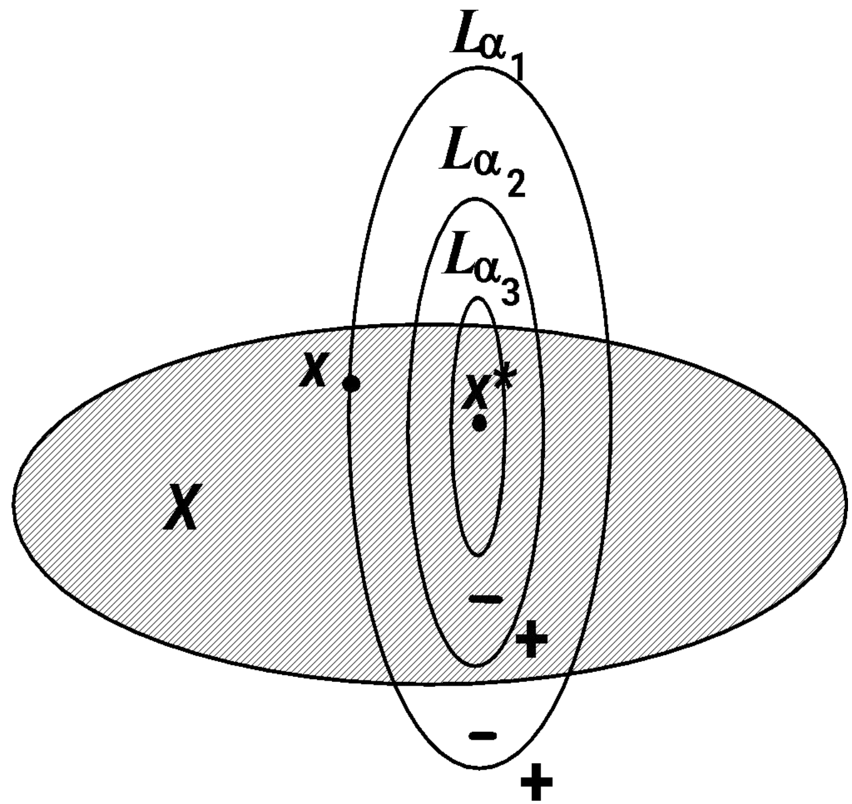
4. Геометричний метод розв’язування задачі лінійного програмування



4. Геометричний метод розв’язування задачі лінійного програмування



$\alpha > \alpha^*$



$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$

4. Геометричний метод розв’язування задачі лінійного програмування

Особливість геометричної інтерпретації двовимірної задачі лінійного програмування

$$f(x_1, x_2) = \mathrm{c}_1 x_1 + c_2 x_2 \to \min\ (\max),\ x \in X \subset R^2$$

полягає в тому, що:

- допустима множина *X* являє собою опуклу многокутну область (обмежену) або необмежену;

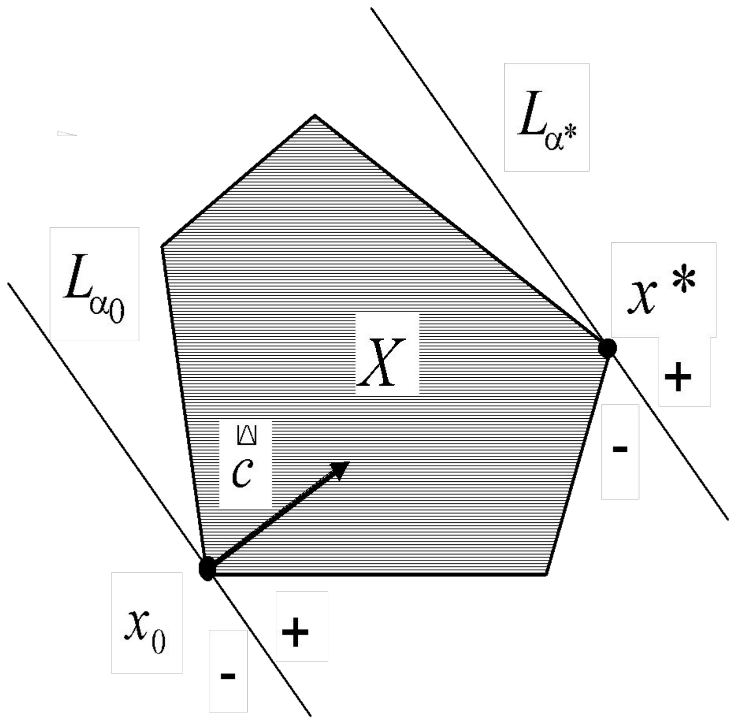
4. Геометричний метод розв’язування задачі лінійного програмування

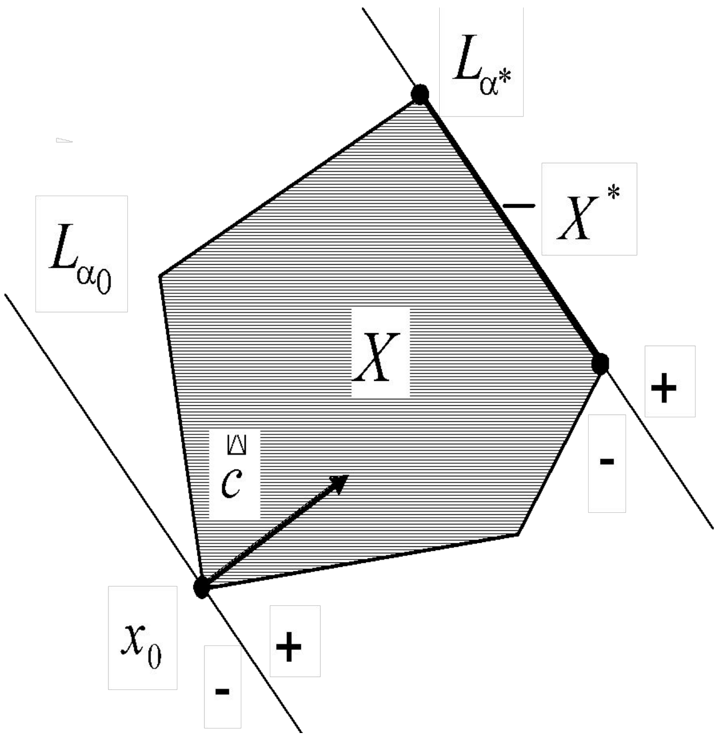
- лінія рівня цільової функції $f(x_1, x_2)$ є пряма, при цьому градієнт функції - вектор

$$\bar{c} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = (c_1, c_2)$$

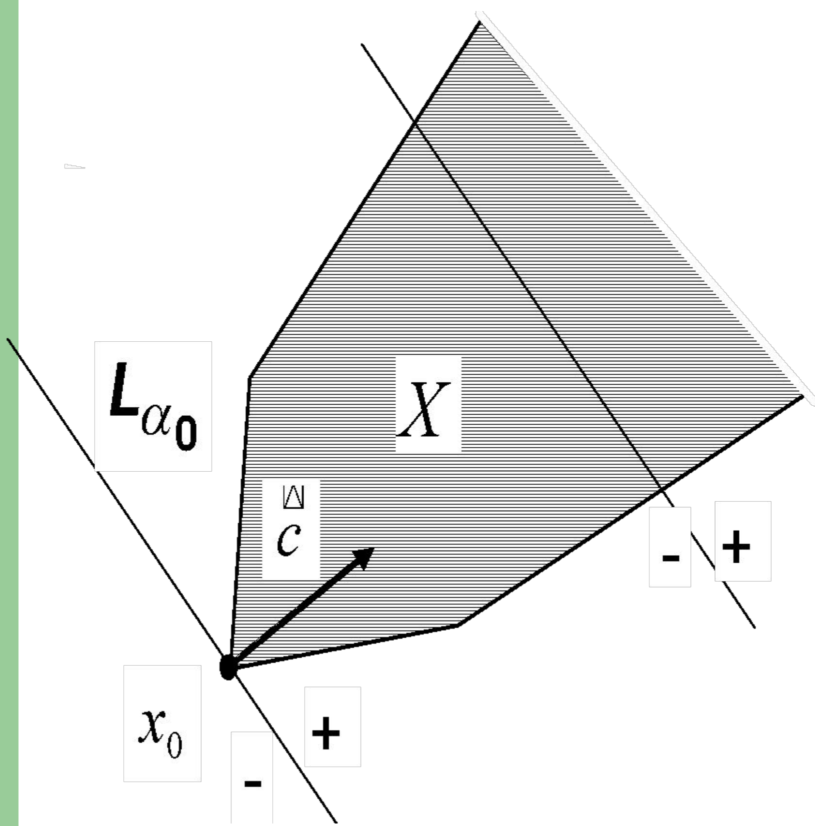
перпендикулярний цій прямій і є напрямом найшвидшого зростання цільової функції в кожній точці допустимої множини *X*, а антиградієнт (вектор $-\bar{c}$) є напрямом її найшвидшого спадання;
- якщо задача має розв’язок, то він досягається обов’язково на межі допустимої множини ***X***, а сам розв’язок задачі є або деяка вершина многокутника або множина точок деякої його сторони.

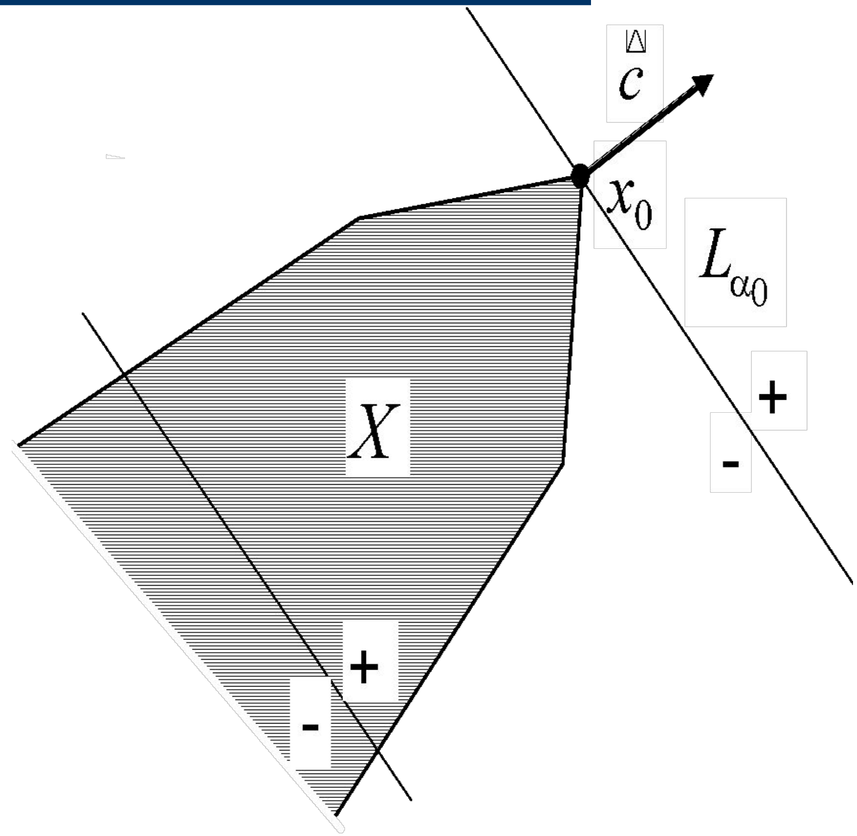
4. Геометричний метод розв’язування задачі лінійного програмування





4. Геометричний метод розв’язування задачі лінійного програмування





4. Геометричний метод розв’язування задачі лінійного програмування

Розглянемо більш детально алгоритм розв'язування двовимірної задачі лінійного програмування виду:

(12) $$f(x)=\sum_{j=1}^{2} c_j x_j \to \min\ (\max)$$

(13) $$\sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ \hline \ge \end{Bmatrix} b_i \quad i=\overline{1,m},\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,2}$$

4. Геометричний метод розв’язування задачі лінійного програмування

1. Побудувати прямі, рівняння яких одержуються внаслідок заміни в обмеженнях (13) знаків нерівностей на знаки рівностей.

2. Знайти півплощини, які визначаються кожним з обмежень-нерівностей задачі.

3. Знайти множину допустимих розв”язків задачі **M**, як перетин знайдених півплощин.

4. Геометричний метод розв'язування задачі лінійного програмування

4. Побудувати пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ (лінію рівня цільової функції), при цьому величина ***h*** підбирається так, щоб лінія рівня проходила через множину допустимих розв"язків ***M***. Побудувати вектор $\bar{c} = (c_1, c_2)$.

5. Рухаючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ в напрямі вектора *c* при розв"язуванні задачі максимізації (або в зворотньому напрямі при розв"язанні задачі мінімізації), знайти точку (множину точок), де цільова функція приймає максимальне (мінімальне) значення, або встановити необмеженість зверху (знизу) функції на допустимій множині.

4. Геометричний метод розв’язування задачі лінійного програмування

6. Якщо існує єдиний розв’язок задачі, визначити координати знайденої точки як розв’язок системи двох відповідних рівнянь з двома невідомими, і обчислити значення цільової функції в цій точці. Якщо існує безліч розв’язків, то визначити координати принаймні однієї екстремальної точки і обчислити значення цільової функції в цій точці.

4. Геометричний метод розв’язування задачі лінійного програмування

Приклад 2. На виготовлення двох видів продукції П1 і П2 витрачаються три види ресурсів А1, А2 і А3. Запаси ресурсів, норми їх витрат і прибуток від реалізації одиниці продукції (у.о.) задані у таблиці. Знайти такий план виробництва, який би забезпечував найбільший прибуток.

Побудувати математичну модель поставленої задачі і розв’язати її геометричним методом.

Витрати ресурсів на одиницю продукції						Наявність ресурсів			Прибуток на одиницю продукції	
A_1		A_2		A_3		A_1	A_2	A_3		
$П_1$	$П_2$	$П_1$	$П_2$	$П_1$	$П_2$				$П_1$	$П_2$
2	5	4	3	2	4	80	91	68	15	12

4. Геометричний метод розв’язування задачі лінійного програмування

Розв”язування. Математична модель задачі має такий вигляд:

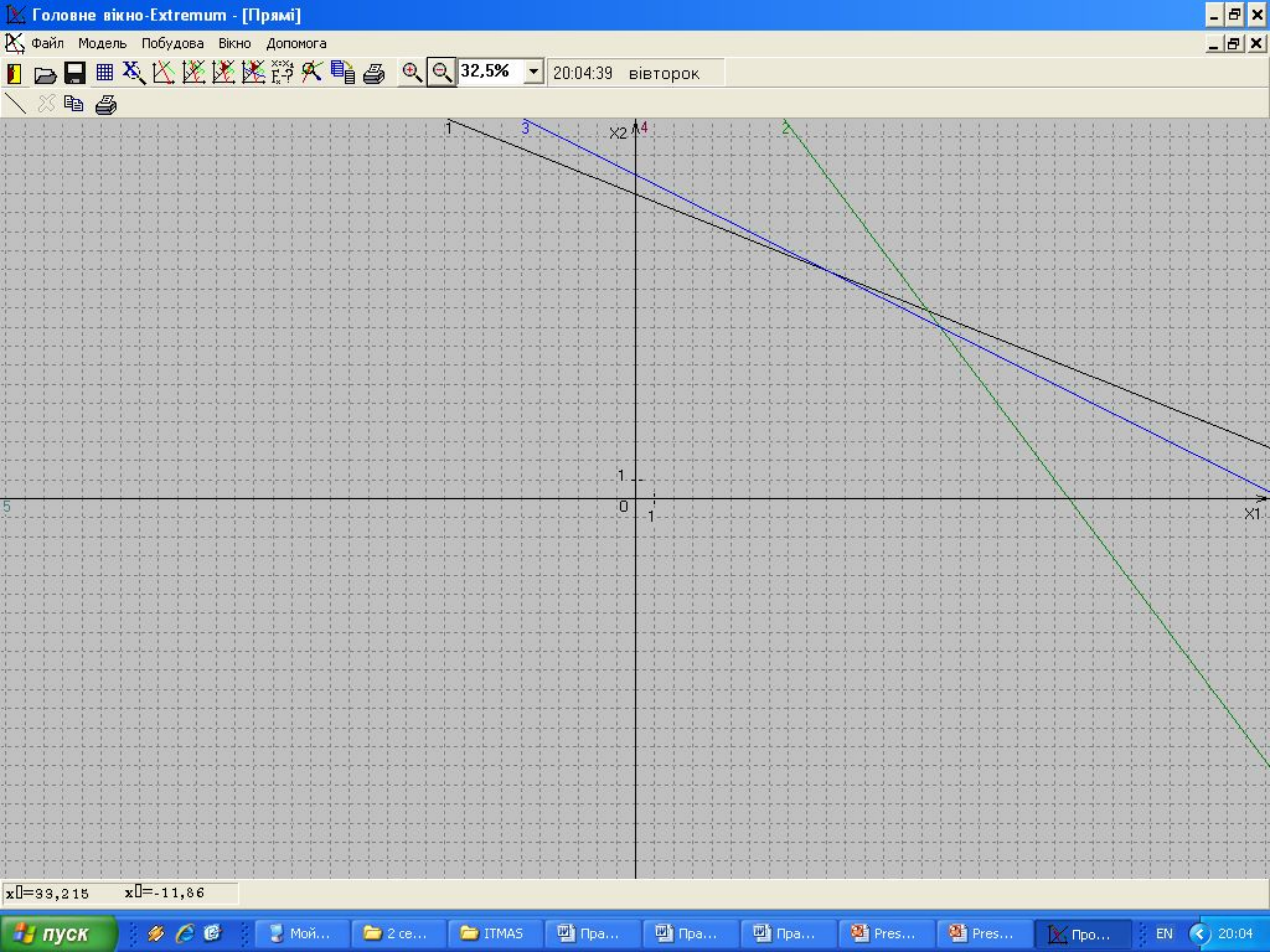
$$f(x) = 15x_1 + 12x_2 \to \max$$

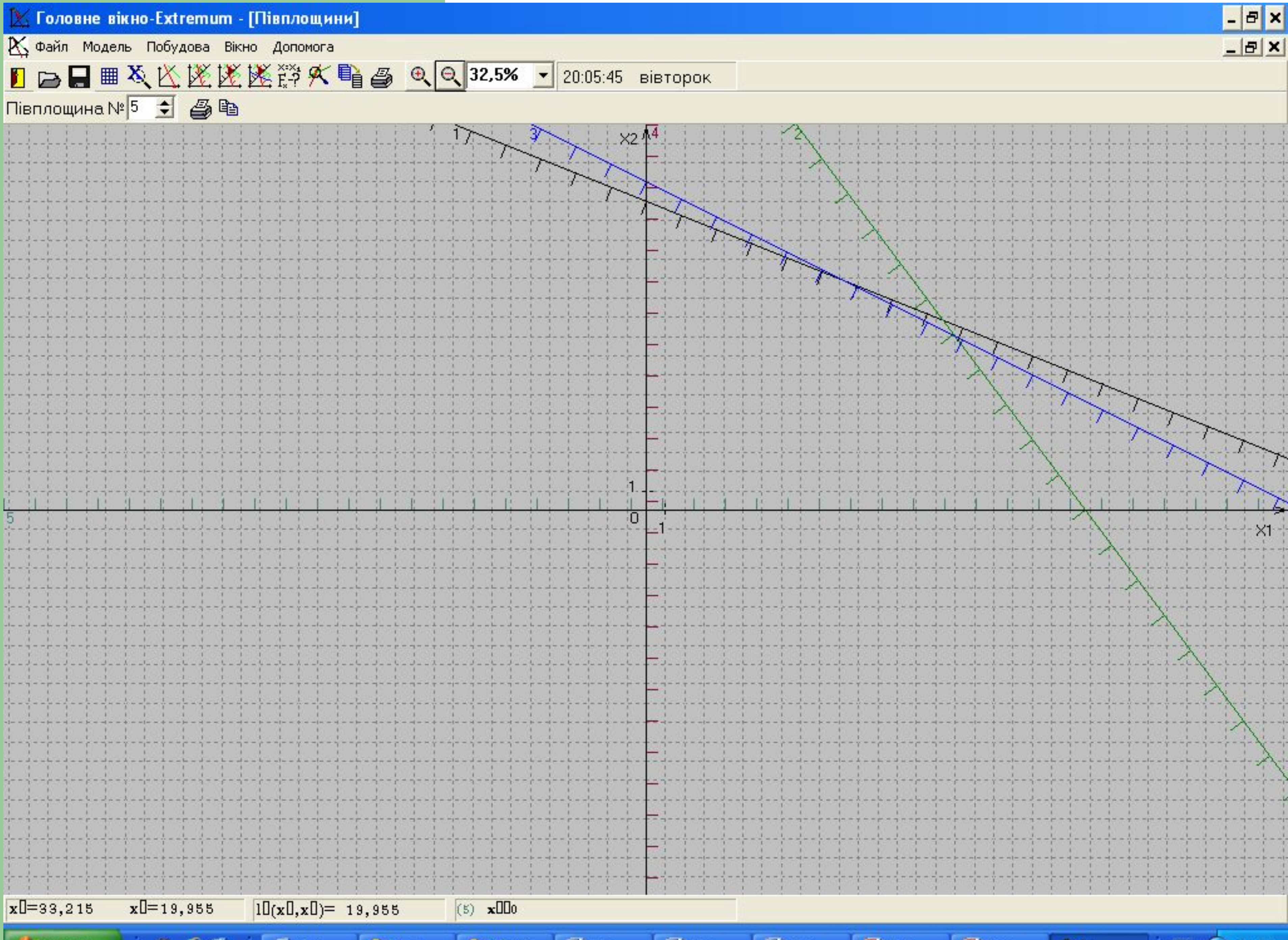
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 80, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 91, \\ 2x_1 + 4x_2 \le 68, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}$$

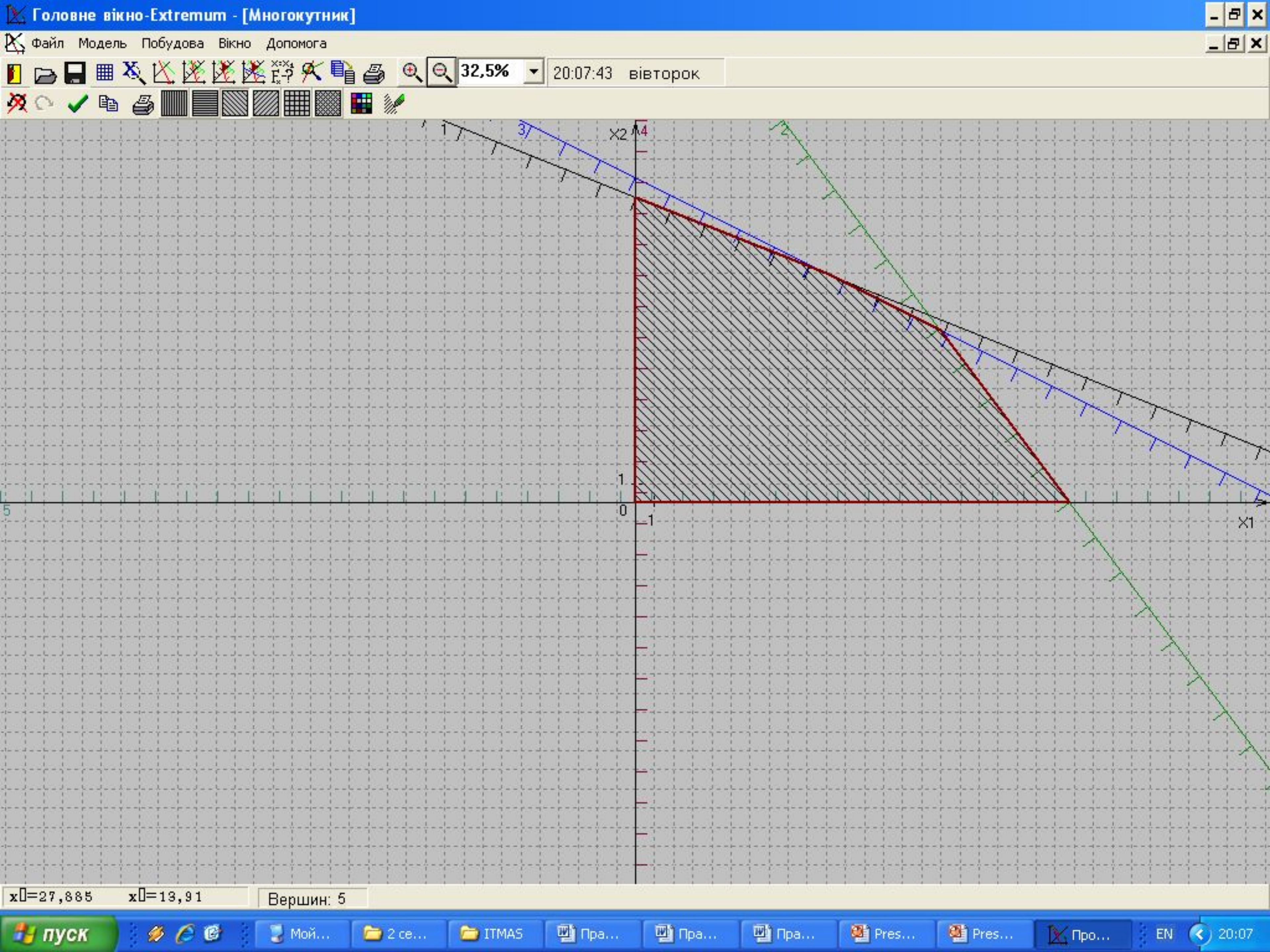
де x_1 – обсяг випуску продукції виду П1,

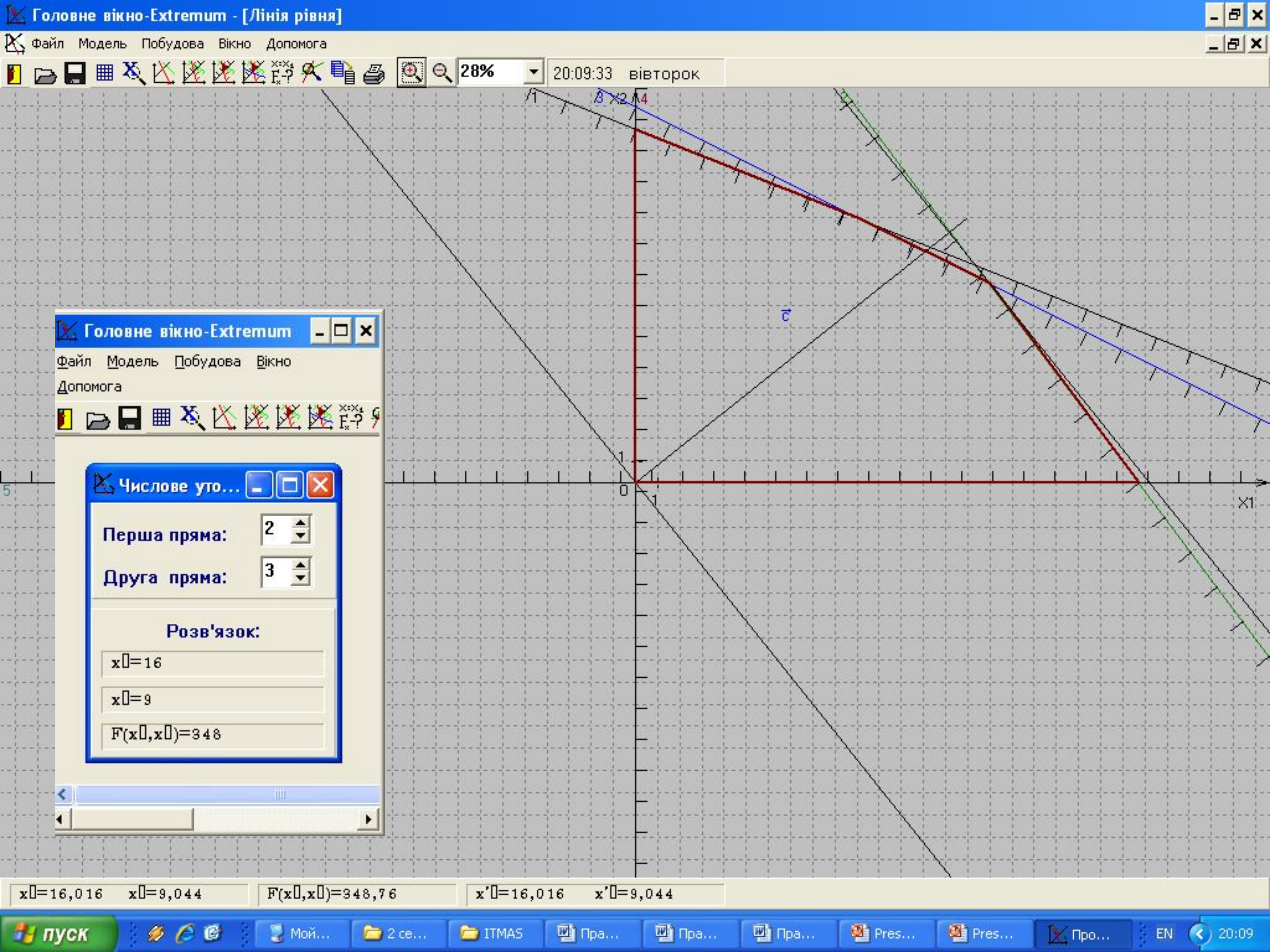
x_2 – обсяг випуску продукції виду П2.


Головне вікно-Extremum - [Прямі]
Файл Модель Побудова Вікно Допомога
32,5%
20:04:39 вівторок
X2
X1
x□=33,215 x□=-11,86
пуск
Мой…
2 се…
ITMAS
Пра…
Пра…
Пра…
Pres…
Pres…
Про…
EN
20:04



Головне вікно-Extremum - [Півплощини]
Файл Модель Побудова Вікно Допомога
32,5%
20:05:45 вівторок
Півплощина № 5
X2
X1
0
1


Головне вікно-Extremum - [Многокутник]
Файл
Модель
Побудова
Вікно
Допомога
32,5%
20:07:43 вівторок
X2
X1
1
2
3
4
0
1.
1
5
x□=27,885
x□=13,91
Вершин: 5
пуск
Мой…
2 се…
ITMAS
Пра…
Пра…
Пра…
Pres…
Pres…
Про…
EN
20:07


Головне вікно-Extremum - [Лінія рівня]
Файл Модель Побудова Вікно Допомога
28%
20:09:33 вівторок
Головне вікно-Extremum
Файл Модель Побудова Вікно Допомога
Числове уто...
Перша пряма: 2
Друга пряма: 3
Розв'язок:
x=16
x=9
F(x,x)=348
x=16,016 x=9,044
F(x,x)=348,76
x'=16,016 x'=9,044
X1
X2
пуск
EN 20:09

Mathcad - [Untitled:1]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

My Site Go

$$f(x) := 15x_1 + 12x_2$$

$$x_2 := 0$$

given

$$2x_1 + 5x_2 \le 80$$

$$4x_1 + 3x_2 \le 91$$

$$2x_1 + 4x_2 \le 68$$

$$x \ge 0$$

$$x\_max := maximize(f, x) \qquad x\_max = \begin{pmatrix} 16 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$f(x\_max) = 348$$

Press F1 for help. AUTO NUM Page 1

4. Геометричний метод розв’язування задачі лінійного програмування

Відповідь:

Обидва види продукції є рентабельними, при цьому оптимальний план дорівнює $X_1^*=16$, $X_2^*=9$, а оптимальний прибуток від реалізації продукції дорівнює 348 у.о.

Ваші запитання

8(0472) 730271

herasymenkoinna@gmail.com

Дякую за увагу!