Плоскость в пространстве

- Общее уравнение плоскости
- Уравнение плоскости в отрезках
- Уравнение плоскости, проходящей через три точки
- Угол между двумя плоскостями
- Расстояние от точки до плоскости

Общее уравнение плоскости

Если в пространстве фиксирована произвольная декартова система координат *Oxyz*, то всякое уравнение первой степени с тремя переменными *x y z* определяет относительно этой системы плоскость.

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \quad \textbf{(1)}$$

A; B; C; D – некоторые постоянные, причем из чисел *A; B; C* хотя бы одно отлично от нуля.

Общее уравнение плоскости

Пусть точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ принадлежит плоскости:

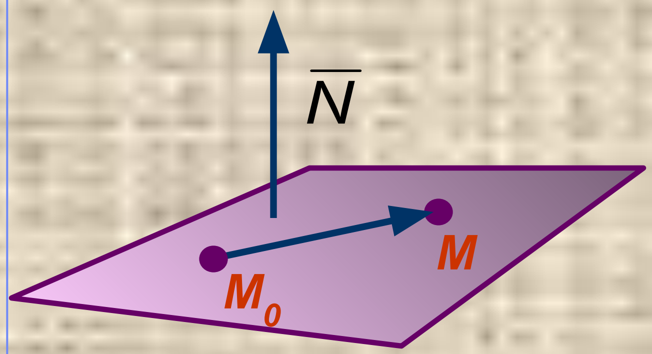
$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \quad \textbf{(2)}$$

Вычтем из уравнения *(1)* тождество *(2):*

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0} \quad \textbf{(3)}$$

Общее уравнение плоскости

Общее уравнение плоскости



Произвольная точка $M(x;\,y;\,z)$ лежит на плоскости, если ее координаты удовлетворяют уравнению (3):

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Уравнение (3) является условием перпендикулярности двух векторов:

$$\overline{M_0M}=\{x-x_0;\,y-y_0;\,z-z_0\} \quad \text{и} \quad \boxed{\overline{N}=\{A;B;C\}}$$

Таким образом, точка M лежит в плоскости, если $\overline{M_0M}\perp\overline{N}$.

Значит $\overline{N}$ перпендикулярен любому вектору, лежащему в плоскости и, следовательно, самой плоскости.

Нормальный вектор плоскости

Общее уравнение плоскости называется <u>*полным*</u>, если все коэффициенты $A;\,B;\,C;\,D$ отличны от нуля.

В противном случае уравнение называется <u>*неполным*</u>.

Общее уравнение плоскости

Виды неполных уравнений:

1) $D = 0; \quad Ax + By + Cz = 0$ Плоскость проходит через точку O.

2) $A = 0; \quad By + Cz + D = 0 \quad // (OX)$

3) $B = 0; \quad Ax + Cz + D = 0 \quad // (OY)$

4) $C = 0; \quad Ax + By + D = 0 \quad // (OZ)$

5) $A = 0; B = 0 \quad Cz + D = 0 \quad // (XOY)$

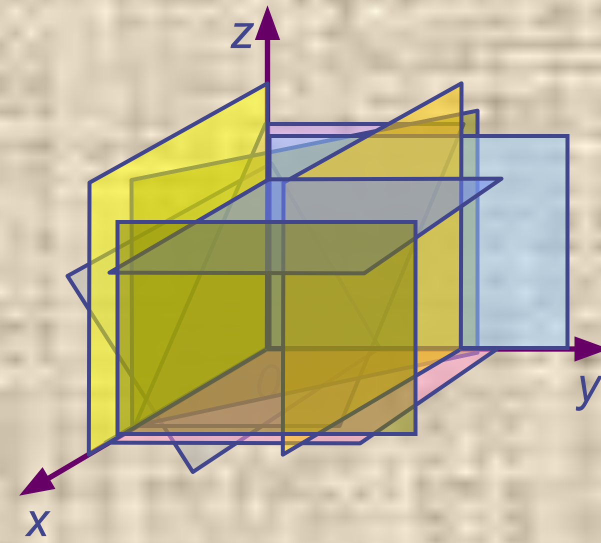
6) $B = 0; C = 0 \quad Ax + D = 0 \quad // (YOZ)$

7) $A = 0; C = 0 \quad By + D = 0 \quad // (XOZ)$

8) $B = 0; C = 0; D = 0 \quad Ax = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (YOZ)$

9) $A = 0; C = 0; D = 0 \quad By = 0 \Rightarrow y = 0 \quad (XOZ)$

10) $A = 0; B = 0; D = 0 \quad Cz = 0 \Rightarrow z = 0 \quad (XOY)$



Уравнение плоскости в отрезках

Рассмотрим полное уравнение плоскости:

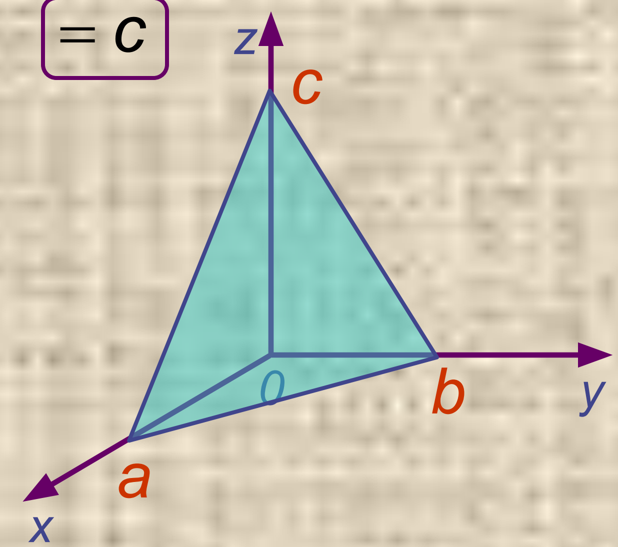
$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax + By + Cz = -D \quad \Rightarrow$$

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

$= a$ $\quad$ $= b$ $\quad$ $= c$

Уравнение плоскости в отрезках

Уравнение в отрезках используется для построения плоскости, при этом a, b и c – отрезки, которые отсекает плоскость от осей координат.

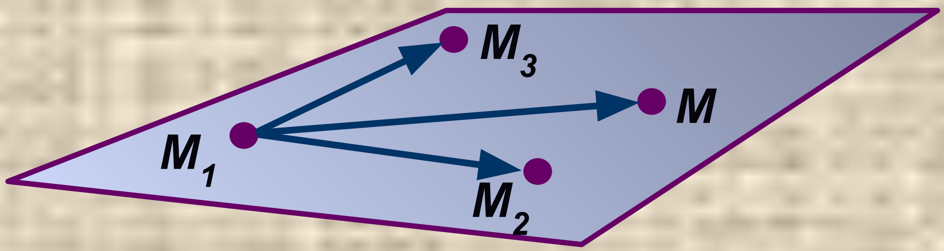


Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть точки ***$M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$*** и ***$M_3(x_3; y_3; z_3)$*** не лежат на одной прямой.

Тогда векторы: $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ и $\overline{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$ не коллинеарны.

Точка ***$M(x; y; z)$*** лежит в одной плоскости с точками ***M_1, M_2*** и ***M_3*** только в том случае, если векторы:



$\overline{M_1M_2}; \overline{M_1M_3}$ и $\overline{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$ компланарны.

$$\left(\overline{M_1M} \times \overline{M_1M_2}\right) \cdot \overline{M_1M_3} = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение плоскости, проходящей через 3 точки

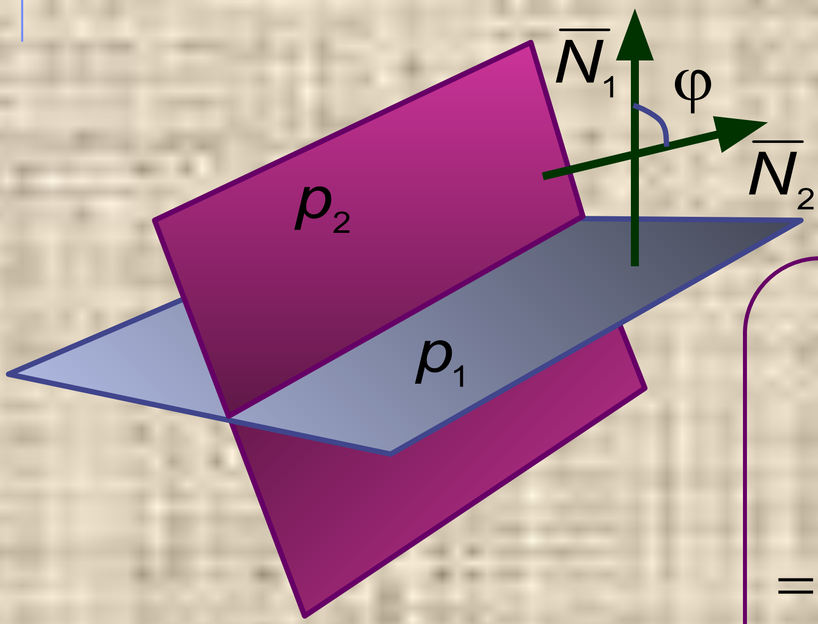
Угол между двумя плоскостями

Пусть две плоскости заданы общими уравнениями:

$$p_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$p_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Углом между этими плоскостями называется угол между нормальными векторами к этим плоскостям.



$$\overline{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$$

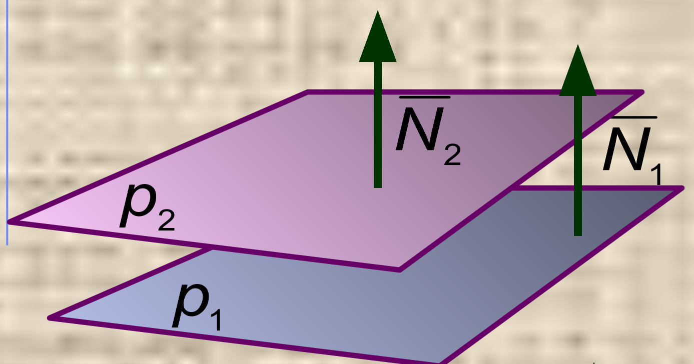
$$\overline{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{|\overline{N}_1| \cdot |\overline{N}_2|} =$$

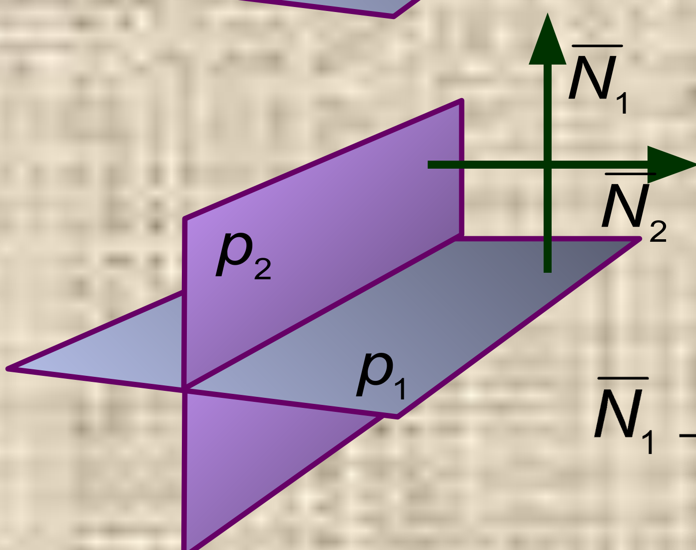
$$= \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Угол между двумя плоскостями

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей аналогичны условию параллельности и перпендикулярности нормальных векторов:



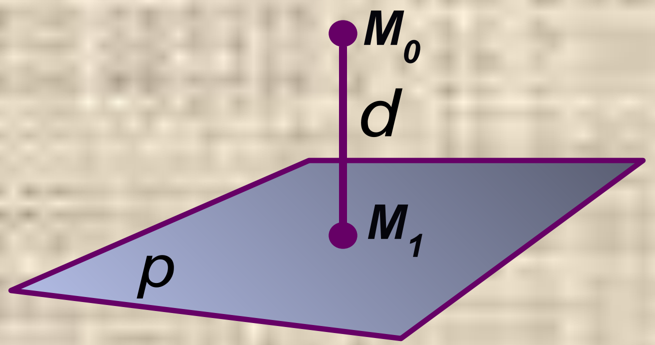
$$\overline{N}_1 \, // \, \overline{N}_2 \Rightarrow \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$$



$$\overline{N}_1 \perp \overline{N}_2 \Rightarrow \boxed{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0}$$

Расстояние от точки до плоскости

Пусть точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на плоскость $p:\ Ax + By + Cz + D = 0$



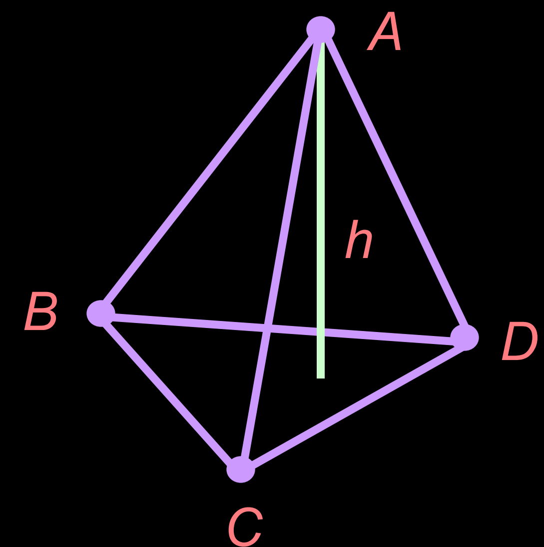
$$d = |M_1M_0|$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Пример

Найти длину высоты тетраэдра *ABCD* , опущенной из точки А.

Координаты вершин: *A(1; 1; 1), B(0; 2; 5), C(3; -1; 4), D(4; 2; 1)*



Уравнение плоскости *BCD*:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-5 \\ 3-0 & -1-2 & 4-5 \\ 4-0 & 2-2 & 1-5 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-5 \\ 3 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - (y-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} + (z-5) \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$12x + 8(y-2) + 12(z-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{3x + 2y + 3z - 19 = 0}$$

Пример

Расстояние от точки *A* до плоскости BCD:

$$h = \frac{|3\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 - 19|}{\sqrt{9+4+9}} \Rightarrow$$

$$h = \frac{11}{\sqrt{22}} \approx 2.34$$