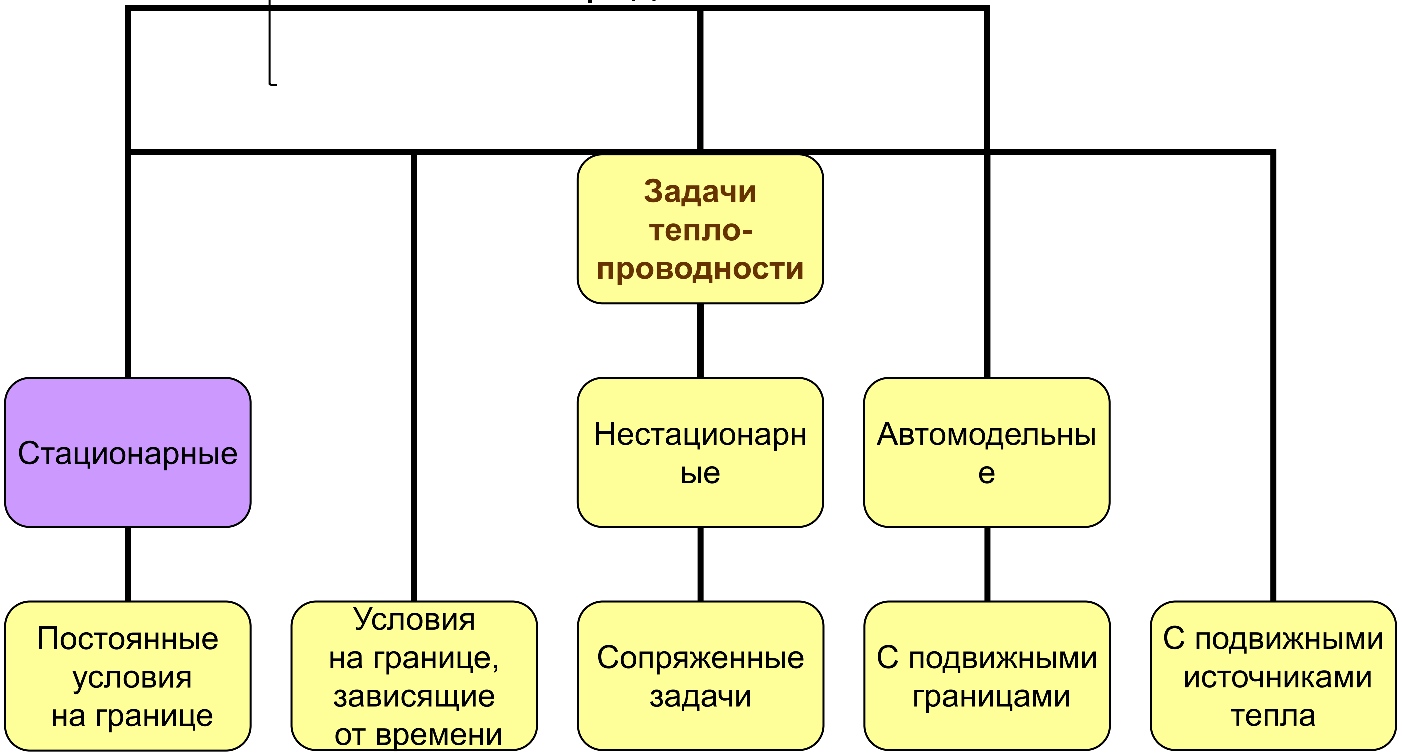
ЛЕКЦИЯ 5

Обзор методов решения задач теплопроводности

Точные методы

- Метод функций Грина
- Метод Дюамеля (Дюамеля-Неймана)
- Метод разделения переменных (метод Фурье)
- Методы интегральных преобразований в конечных и бесконечных пределах

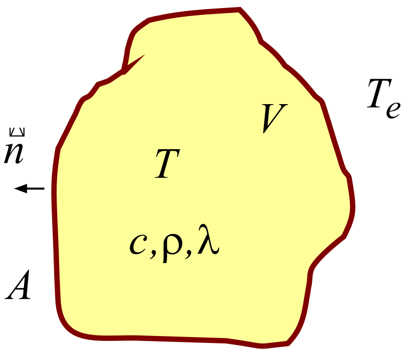


Литература:

1. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача, М.: Энергия, 1975. -488 С.
2. Ф. Крейт, У.Блэк Основы теплопередачи /М.: Мир, 1983. – 512 С.
3. Коздоба Л.А.Методы решения нелинейных задач теплопроводности, М, 1975
4. Теория тепломасообмена, под ред. Леонтьева А.И., М., 1979
5. Баскаков А.П., Берг Б.В., Витт О.К. и др. Теплотехника, Учебник для ВУЗов / М.: Энергоиздат, 1982. – 264 С.
6. Лыков А.В. Теория теплопроводности
7. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача /М: Едиториал УРСС, 2003. – 784 С.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

До сих пор мы рассматривали системы, в которых в результате теплопроводности процессы изменения температуры во времени были завершены. Но для установления стационарного состояния с заданной точностью требуется некоторое время. Кроме того, большинство технологических процессов обработки материалов высокоэнергетическими источниками являются существенно нестационарными. Поэтому на анализе некоторых нестационарных задач мы остановимся, <u>не прибегая к изучению теоретических основ точных аналитических методов.</u>



$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T \qquad (1)$$

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_A = \alpha\left(T - T_e\right) \qquad (2)$$

$$t = 0: \quad T = T_0 \qquad (3)$$

λ велик или тело мало:

$$c\rho V\frac{dT}{dt} = -\alpha\left(T - T_e\right) \qquad (4)$$

$T_e = const$

Уравнение теплового баланса

Характерный размер тела

$$L = \frac{V}{A} = \frac{\text{объем}}{\text{площадь}}$$

для шара $\quad L = \dfrac{(4/3)\pi r_0^3}{4\pi r_0^2} = \dfrac{r_0}{3}$

для цилиндра $\quad L = \dfrac{\pi r_0^2 l}{2\pi r_0 l} = \dfrac{r_0}{2},\ l \gg r_0$

для куба $\quad L = \dfrac{l^3}{6l^2} = \dfrac{l}{6}$

<u>Условие применимости</u>

$$\boxed{\frac{L}{\sqrt{\lambda t_* / (c\rho)}} \ll 1} \qquad (5)$$

Простейшая задача в безразмерных переменных

Вводим переменные $\theta = \left(\dfrac{T - T_e}{T_0 - T_e}\right)$; $\tau = \dfrac{t}{t_*}$; $t_* = L^2/\kappa, \kappa = \lambda/(c\rho)$

Характерный размер тела

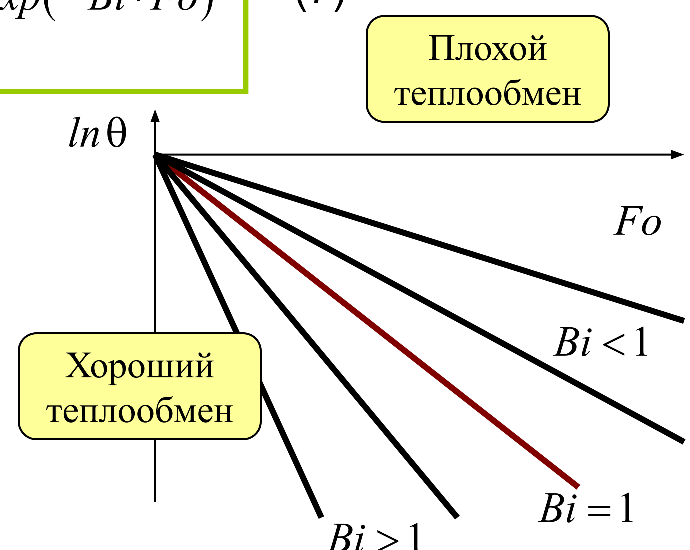
$$L = \frac{V}{A} = \frac{\text{объем}}{\text{площадь}}$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{\alpha A t_*}{c\rho V}\theta = -\frac{\alpha L}{\lambda}\theta = -Bi\theta \qquad (6)$$

$$\theta(0) = 1$$

$Bi = \dfrac{\alpha L}{\lambda}$; - число Био $\qquad \tau = \dfrac{\kappa t}{L^2} = Fo$ - число Фурье

Разделяем переменные: $\dfrac{d\theta}{\theta} = -Bi \cdot Fo$ или $\theta = exp(-Bi \cdot Fo)$ (7)



Использование безразмерных критериев позволяет представить результат для всех тел с любыми коэффициентами теплопроводности на едином графике

Пример

При измерении температуры термометром важно знать, насколько быстро термометр реагирует на изменение температуры.

Полупериодом $t_П$ называют интервал времени, в пределах которого *начальная разность* между истинной температурой и показаниями термометра *сокращается наполовину* после внезапного изменения истинной температуры.

Определим этот полупериод для ртутного термометра, находящегося в потоке воздуха. Пусть ртутный «шарик» имеет форму цилиндра $r_0 = 3$ мм. Коэффициент теплопроводности ртути $\lambda = 7{,}45$ ккал/(м ч К). Коэффициент температуропроводности $\kappa = 0{,}0166$ м²/ч . Термическим сопротивлением тонкой стеклянной стенки пренебрегаем. Коэффициент теплообмена для потока воздуха есть $\alpha = 50$ Ккал/(м²ч К).

находим $\boxed{L = \dfrac{\pi r_0^2 l}{2\pi r_0 l} = \dfrac{r_0}{2},}$ $Bi = \dfrac{\alpha L}{\lambda} = \dfrac{50 \cdot 0{,}003}{7{,}45 \cdot 2} = 0{,}01$ $\boxed{\theta = \mathbf{exp}(-Bi \cdot Fo) \quad (7)}$

отношение $(T - T_e)/(T_0 - T_e) = 0{,}5,$

когда численное значение показателя степени в (7) равно 0,693: $Bi \cdot Fo = \dfrac{\kappa t_П}{L^2} \cdot \dfrac{\alpha L}{\lambda} = 0{,}693;$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\kappa t_П}{L^2} = \frac{0{,}693}{Bi} = \frac{0{,}693}{0{,}01} = 69{,}3 \quad \Longrightarrow \quad t_П = \frac{69{,}3 \cdot 9 \cdot 10^{-6}}{0{,}0166 \cdot 4} \cdot 3600 = 33{,}8 \ c$$

Следовательно, можно полагать, что показания термометра правильно отражают изменение истинной температуры, если это изменение происходит более медленным темпом

Пусть теперь **граничные условия – функция времени**. Примем, что температура потока меняется со временем линейно (и тело будет нагреваться от T_0)

$$T_e = Bt + T_0$$

Тогда уравнение теплового баланса принимает вид

$$c\rho V \frac{dT}{dt} = -\alpha\left(T - Bt - T_0\right); \qquad t = 0: \quad T = T_0 \qquad (8)$$

В переменных (отличается от предыдущего)

$$\theta = \left(\frac{T - T_0}{T_* - T_0}\right); \qquad \tau = \frac{t}{t_*}; \qquad \text{имеем}$$

$$\boxed{\tau = \frac{\kappa t}{L^2} = Fo}$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} + Bi\theta = Bi \cdot \beta\tau, \quad \beta = \frac{Bt_*}{T_* - T_0} \qquad \tau = 0: \ \theta = 0 \qquad t_* = L^2/\kappa$$

Решение имеет вид

$$\theta = \beta \cdot Fo - \frac{\beta}{Bi}\left[1 - exp\left(-Bi \cdot Fo\right)\right] \qquad (9)$$

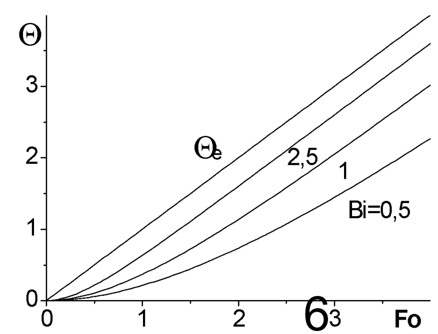
$$\theta_e = \frac{T_e - T_0}{T_* - T_0} = \beta Fo$$

Температура детали T всегда отстает от температуры потока $T_{e,}$. При $\tau = Fo \to \infty$

это отставание становится постоянным

Один из способов решения задачи (8) будет показан дальше: слайд 11

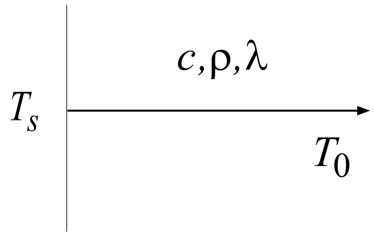
$$\beta = 1 \ : \quad T_* = T_0 + \frac{BL^2}{\kappa}$$



<u>Простейшие краевые задачи</u>

Пусть на поверхности <u>«полубесконечного»</u> тела поддерживается постоянная температура T_s . Это «выполняется», если размер образца *H* много больше зоны прогрева, которая формируется в образце за время обработки $H >> \sqrt{\lambda t_* / (c\rho)}$

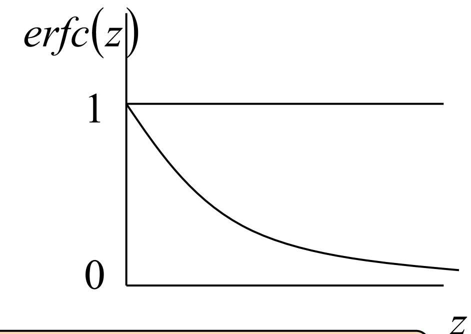
I



$$\begin{cases} c\rho \dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}\right) & c,\rho,\lambda - const \\ x = 0: \quad T = T_s \\ x \to \infty: \quad T = T_0 \\ t = 0: \quad T = T_0 \end{cases} \qquad (10)$$

Безразмерные переменные

$$\theta = \left(\frac{T - T_0}{T_s - T_0}\right); \quad \tau = \frac{t}{t_*}; \quad \xi = \frac{x}{x_*} \Longrightarrow \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{t_* \lambda}{c\rho x_*^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}; \qquad \frac{t_* \lambda}{c\rho x_*^2} = 1:$$



Характерный размер

$$t_* = \frac{L^2}{\kappa} = \frac{x_*^2}{\kappa} \equiv Fo, \quad \kappa = \lambda/(c\rho) \quad L = x_*^2 = \sqrt{\kappa t_*}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial \tau} = \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}; \\ \xi = 0: \quad \theta = 1; \\ \xi \to \infty: \quad \theta = 0; \\ \tau = 0: \quad \theta = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

$$\theta = erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right)$$

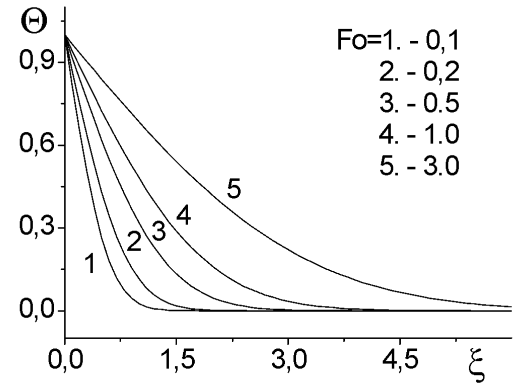
$$erfc(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-y^2} dy \qquad (12)$$

$$erfc(0) \equiv 1 \qquad erfc(\infty) = 0$$

Для любых теплофизических свойств и любых температур в рамках данной задачи

$$\theta = erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{Fo}}\right) \qquad (13)$$

$$T = T_0 + (T_s - T_0)erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \qquad (14)$$



Полезно знать асимптотические разложения

$$z << 1: \quad erfc(z) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} z \quad \Longrightarrow \quad T \approx T_0 + (T_s - T_0)\frac{x}{\sqrt{\pi\kappa t}} \quad x \neq 0, t \neq 0 \qquad (15)$$

$$z >> 1: \quad erfc(z) \approx \frac{exp(-z^2)}{z\sqrt{\pi}} \quad \Longrightarrow \quad T \approx T_0 + 2\sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}}\frac{(T_s - T_0)}{x} exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right) \qquad (16)$$

Такие задачи удобно решать ***операционным методом*** (т.е., методом интегральных преобразований по Лапласу). Это один из самых эффективных методов решения нестационарных задач теплопроводности

$$\tau \to p \qquad f(\tau) \to F(p) \qquad F(p) = \int_0^\infty f(\tau) exp(-p\tau) d\tau \qquad (17)$$

Обозначения и определения

$$f(\tau) \to \bar{f}(p) \qquad \bar{f}(p) = \int_0^\infty f(\tau) exp(-p\tau) d\tau \qquad (17,a)$$

$"\to"$ эквивалентно $"\div"$

Говорят: функция $\bar{f}(p)$ или $F(p)$ является изображением функции $f(\tau)$ или

Функция $f(\tau)$ с помощью преобразования (15) переходит в $\bar{f}(p)$ или в $F(p)$

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial\tau} = \dfrac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}; \\ \xi = 0: \quad \theta = 1; \\ \xi \to \infty: \quad \theta = 0; \\ \tau = 0: \quad \theta = 0. \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} p\bar{\theta} - \cancelto{0}{\theta(0,\xi)} = \dfrac{d^2\bar{\theta}}{d\xi^2}; \\ \xi = 0: \quad \bar{\theta} = \dfrac{1}{p}; \\ \xi \to \infty: \quad \bar{\theta} = 0; \end{cases} \qquad (18)$$

Общее решение в пространстве изображений имеет вид $\bar{\theta} = Ae^{k_1\xi} + Be^{k_2\xi}$, где

k_i - корни уравнения $k^2 - p = 0,\ k_1 = -\sqrt{p};\ k_2 = \sqrt{p}$

В соответствии с граничными условиями $B \equiv 0$ и $A = \dfrac{1}{p}$

$$\bar{\theta} = \frac{1}{p} exp\left(-\sqrt{p}\xi\right) \qquad (19)$$

Обратное преобразование

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p)e^{p\tau}dp \qquad (20)$$

Лыков А.В. Теория теплопроводности

$$\bar{\theta} \rightarrow \quad \theta = erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) \qquad (12)$$

Для ряда задач такой путь был бы весьма сложным, если бы не имеющиеся в настоящее время таблицы интегральных преобразований и теоремы, существенно упрощающие ход решения

Бейтмен Н.Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований в двух томах. Справочная математическая библиотека. Т.1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.1969 г. Т.2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций. М. 1970

изображение	оригинал	изображение	оригинал
$\frac{1}{p}$	1	$\frac{1}{p+a}$	$e^{-a\tau}$
$\frac{1}{p^2}$	τ	$\frac{p}{p^2+k^2}$	$\cos(k\tau)$
$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}$	$\frac{1}{p}e^{-k\sqrt{p}}$ $k \ge 0$	$\operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{\tau}}\right)$
$p^{-3/2}$	$2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}$	$\left(\sqrt{p-a}-\sqrt{p-b}\right)$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau^3}}\left(e^{b\tau}-e^{a\tau}\right)$

В некоторых случаях перейти к оригиналам все же не удается. И тогда на помощь приходят разнообразные приближенные методы и асимптотические разложения, позволяющие построить приближенное решение изучаемой задачи, что очень важно для инженерных приложений. Некоторые простые примеры мы далее рассмотрим.

$$\frac{d\theta}{d\tau} + Bi\theta = Bi \cdot \beta\tau,$$
$$\tau = 0: \ \theta = 0$$

Возвращаемся к простейшей задаче:

$\beta = 1$ $$\frac{d\theta}{d\tau} + Bi\theta = Bi \cdot \tau, \qquad \tau = 0: \quad \theta = 0 \qquad (9)$$

В пространстве изображений по Лапласу: $$p\bar{\theta} + Bi\bar{\theta} = \frac{Bi}{p^2} \Longrightarrow \bar{\theta} = \frac{Bi}{p^2(p+Bi)}$$

Раскладываем на множители: $$\bar{\theta} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+Bi}\right) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{Bi}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+Bi}\right)$$

В соответствии с представленной таблицей: $$\frac{1}{p} \longrightarrow 1$$

$$\frac{1}{p+Bi} \longrightarrow e^{-Bi\cdot\tau}$$

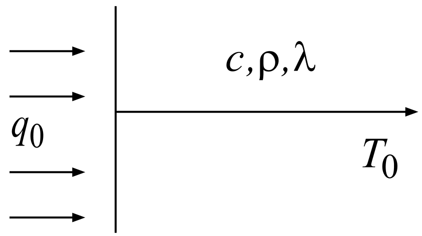
$$\frac{1}{p^2} \longrightarrow \tau$$

$$\theta = Fo - \frac{1}{Bi}\left[1 - \mathbf{exp}(-Bi \cdot Fo)\right]$$

Мы пользовались правилом: $$f'(\tau) \longrightarrow pF(p) - f(+0)$$

«Противоположное» правило: $$\int_0^\tau f(t)\,dt \longrightarrow \frac{1}{p}F(p)$$

II



$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) \qquad \lambda = const$$

$$x = 0: \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q_0 \qquad (21)$$

$$x \to \infty: \quad T = T_0$$

$$t = 0: \quad T = T_0$$

$$\theta = \left(\frac{T - T_0}{T_* - T_0}\right); \qquad \tau = \frac{t}{t_*}; \quad \xi = \frac{x}{x_*} \qquad (22)$$

Таким образом мы определяем масштаб температуры

$$-\frac{\partial\theta}{\partial\xi} = \frac{q_0\sqrt{\kappa t_*}}{\lambda(T_* - T_0)} \equiv \frac{q_0\sqrt{t_*}}{\sqrt{c\rho\lambda}(T_* - T_0)} \equiv 1 \qquad (23)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial\tau} = \dfrac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}; \\ \xi = 0: \quad -\dfrac{\partial\theta}{\partial\xi} = 1; \\ \xi \to \infty: \quad \theta = 0; \\ \tau = 0: \quad \theta = 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} p\bar{\theta} - \cancelto{0}{\theta(0,\xi)} = \dfrac{d^2\bar{\theta}}{d\xi^2}; \\ \xi = 0: \quad \dfrac{d\bar{\theta}}{d\xi} = \dfrac{1}{p}; \\ \xi \to \infty: \quad \bar{\theta} = 0; \end{cases} \Longrightarrow \bar{\theta} = \frac{1}{p\sqrt{p}} exp\left(-\sqrt{p}\,\xi\right) \qquad (24)$$

$$\Downarrow$$

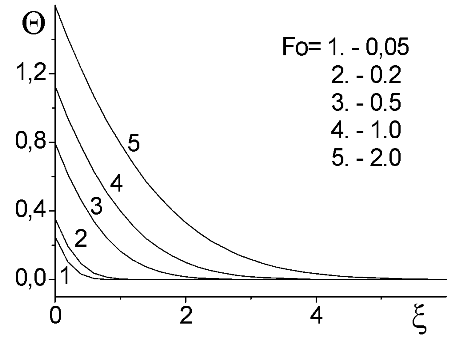
$$\theta = 2\sqrt{\tau}\, i\, erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) \equiv$$

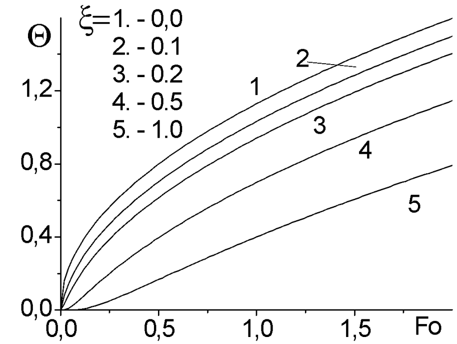
$$\equiv 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\, exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau}\right) - \xi erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right)$$

(25)

Решаем на доске!

$$\theta = 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\, exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau}\right) - \xi erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) \qquad (25)$$





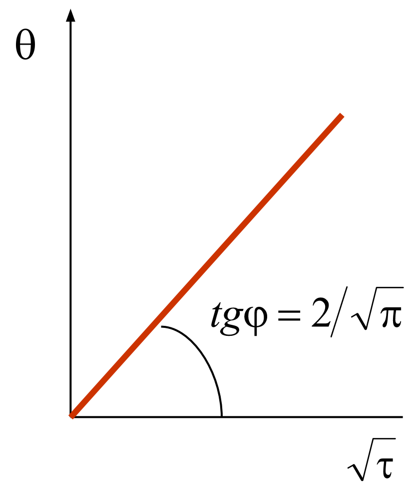
$$\xi = 0: \; -\frac{\partial\theta}{\partial\xi} = 1; \;\; \theta = 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}$$

Температура поверхности

(25) в физических переменных:

$$T = T_0 + \frac{q_0}{\sqrt{c\rho\lambda}}\left\{2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\, exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right) - \frac{x}{\sqrt{\kappa}}\, erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right)\right\} \qquad (26)$$

На поверхности: $$x = 0: \;\; T = T_0 + \frac{q_0}{\sqrt{c\rho\lambda}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t} \qquad (27)$$



II,а Граничные условия зависят от времени

$$x = 0 : \ -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q_0 f(t); \quad \xi = 0 : \ -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = f(\tau); \quad (28)$$

В пространстве изображений решение будет иметь вид

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{f}(p)}{\sqrt{p}} exp\left(-\sqrt{p}\xi\right) \qquad (29)$$

$$f(\tau) \to F(p) \ , \qquad \theta(\xi,\tau) = \int_0^{\tau} \frac{f(y)}{\sqrt{\tau - y}} \boldsymbol{exp}\left[-\frac{\xi^2}{4(\tau - y)}\right] dy$$

В физических переменных:

$$T(t,x) = T_0 + \frac{q_0}{\sqrt{\pi c \rho \lambda}} \int_0^t \frac{f(y)}{\sqrt{t - y}} exp\left[-\frac{c\rho}{\lambda}\frac{x^2}{4(t-y)}\right] dy \qquad (30)$$

Пример 1. Для одиночного импульса имеем

единичная функция Хевисайда

$$f(t) = \eta(t_i - t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le t_i, \\ 0, & t > t_i, \end{cases}$$

Тогда

$$T(x,t) = T_0 + \frac{q_0}{\sqrt{\pi c \rho \lambda}} \int_0^t \frac{\eta(t_i - y)}{\sqrt{t - y}} \boldsymbol{exp}\left[-\frac{c\rho}{\lambda}\frac{x^2}{4(t-y)}\right] dy$$

$$T(x,t)=T_0+\frac{q_0}{\sqrt{\pi c\rho\lambda}}\int_0^t\frac{\eta(t_i-y)}{\sqrt{t-y}}\boldsymbol{exp}\left[-\frac{c\rho}{\lambda}\frac{x^2}{4(t-y)}\right]dy$$

Введем новую переменную по формуле $z^2=\dfrac{x^2}{4a(t-y)}$ $\quad a=\dfrac{\lambda}{c\rho}$

$$\Longrightarrow \quad y=t-\frac{x^2}{4az^2} \qquad dy=-\frac{x^2}{2az^3}dz$$

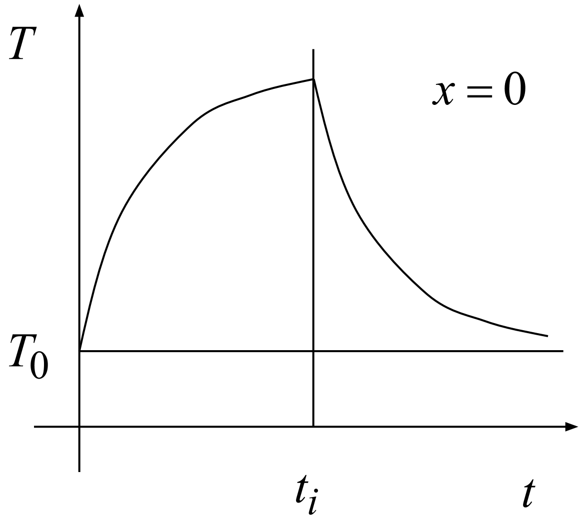
Следовательно

$$T(x,t)=T_0+\frac{q_0}{\lambda\sqrt{\pi}}\int_{x/2\sqrt{at}}^{\infty}x\frac{\boldsymbol{exp}\left[-z^2\right]}{z^2}\eta\left(t_i+\frac{x^2}{4az^2}-t\right)dz$$

Подинтегральная функция равна нулю, если $z^2\le\dfrac{x^2}{4a(t_i-t)}$ $\Longrightarrow$

$$T(x,t)=T_0+\frac{q_0}{\lambda\sqrt{\pi}}\int_{x/2\sqrt{at}}^{x/2\sqrt{at_i}}x\frac{\boldsymbol{exp}\left[-z^2\right]}{z^2}dz$$

<u>Интегрируем по частям</u> $\quad u=\boldsymbol{exp}\left(-z^2\right)$ $\qquad dv=dz/z^2$ $\qquad \int_A^B udv=uv\Big|_A^B-\int_A^B vdu$



$$T = T_0 + \frac{q_0}{\sqrt{c\rho\lambda}}\left\{\left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,\mathbf{exp}\left(-\frac{x^2}{4at}\right) - \frac{x}{\sqrt{a}}\,erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\right] - \right.$$

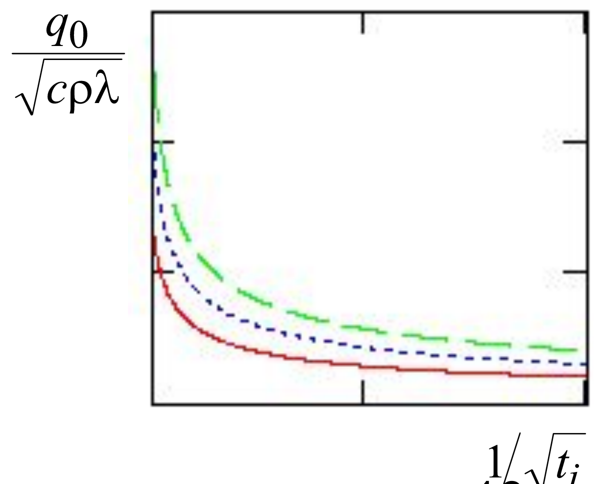
$$\left. - \left[2\sqrt{\frac{t-t_p}{\pi}}\,\mathbf{exp}\left(-\frac{x^2}{4a(t-t_p)}\right) - \frac{x}{\sqrt{a}}\,erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{a(t-t_p)}}\right)\right]\eta(t-t_p)\right.$$

$$x = 0: \qquad T = T_0 + \frac{2q_0}{\sqrt{\pi c\rho\lambda}}\left[\sqrt{t} - \eta(t-t_p)\sqrt{(t-t_p)}\right]$$

Найти область параметров (q_0,t_i),

в которой $T(0,t_i)<T_s$

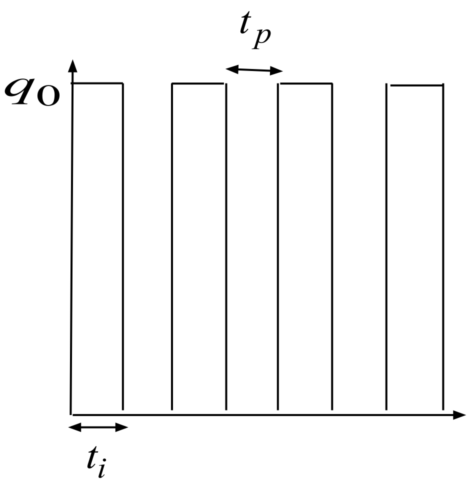
$$\frac{q_0}{\sqrt{c\rho\lambda}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{T_s - T_0}{\sqrt{t}}$$



Пример 2

$$T(t,x)=T_0+\frac{q_0}{\sqrt{\pi c\rho\lambda}}\int_0^t \frac{f(y)}{\sqrt{t-y}}\,exp\left[-\frac{c\rho}{\lambda}\frac{x^2}{4(t-y)}\right]dy \qquad (30)$$

$$q(t)=q_0 f(t) \qquad f(t)=\begin{cases}1, & (t_i+t_p)(k-1)\le t< t_i+(t_i+t_p)(k-1)\\ 0, & t_i+(t_i+t_p)(k-1)\le t<(t_i+t_p)k\end{cases} \qquad (31)$$

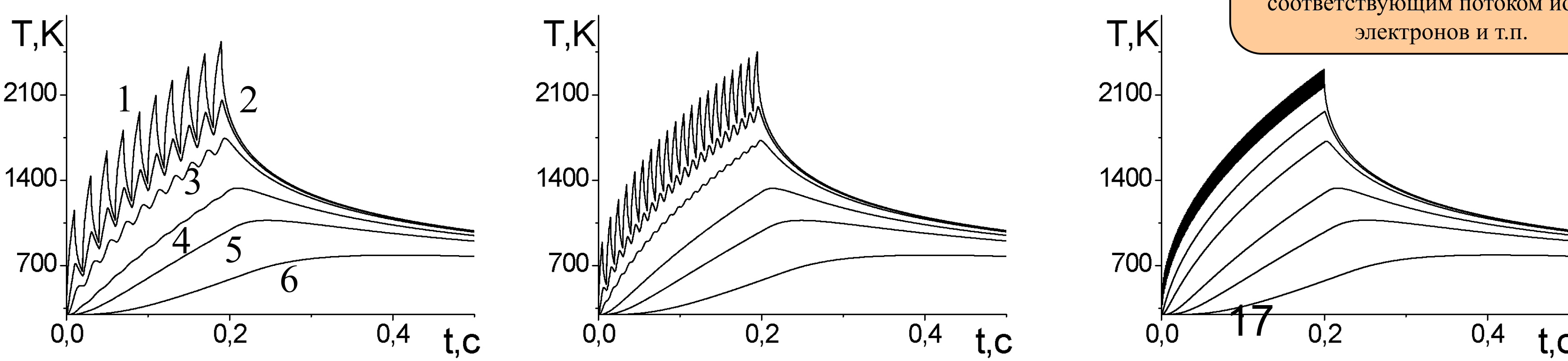


$I_0=q_0 t_i$ ← За один импульс, Дж/см^2

$I=1{,}0\cdot 10^3$ Дж/см^2 ; $q_0=1{,}0\cdot 10^4$ Вт/см^2 $\quad Fe$

$\Gamma=50,\ 100,\ 1000$ Гц $\quad x=1-0;2-0{,}025;3-0{,}05;$ $4-0{,}1;\ 5-0{,}15;6-0{,}25$ см

Подобные источники тепла часто встречаются при обработке поверхностей внешними источниками энергии, соответствующим потоком ионов, электронов и т.п.



III. Задача с граничными условиями третьего рода

Задача с граничными условиями третьего рода соответствует нагреву или охлаждению полупространства или теплоизолированного с боковой поверхности стержня (слоя) бесконечной длины в потоке газа или жидкости. На границе задается теплообмен с потоком по закону Ньютона.

$$\begin{cases} c\rho\dfrac{\partial T}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\dfrac{\partial T}{\partial x}\right) \\ x=0: \quad -\lambda\dfrac{\partial T}{\partial x}=\alpha\left(T_e-T\right) \\ x\to\infty: \quad T=T_0 \\ t=0: \quad T=T_0 \end{cases}$$

$$\theta=\frac{T-T_0}{T_e-T_0}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial\tau}=\dfrac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}; \\ \xi=0: \quad -\dfrac{\partial\theta}{\partial\xi}=Bi\left(1-\theta\right) \\ \xi\to\infty: \quad \theta=0; \\ \tau=0: \quad \theta=0. \end{cases}$$

Решение задачи в пространстве изображений

$$\overline{\theta}=\frac{Bi}{p\left(Bi+\sqrt{p}\right)}\boldsymbol{exp}\left(-\xi\sqrt{p}\right)$$

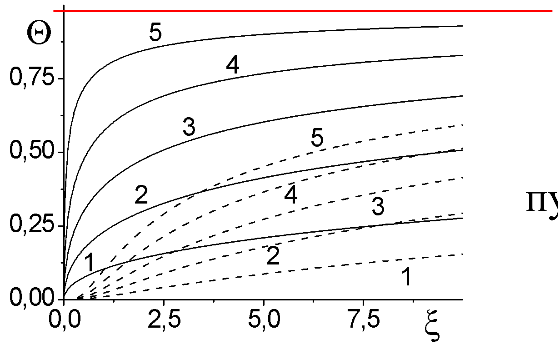
$$\theta=erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right)-$$

$$-\boldsymbol{exp}\left(Bi\xi+Bi^2\tau\right)erfc\left(Bi\sqrt{\tau}+\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right).$$

$\xi=0$

$$\theta=1-\boldsymbol{exp}\left(Bi^2\tau\right)erfc\left(Bi\sqrt{\tau}\right)$$

На поверхности



пунктир

$\xi=2$

В размерных переменных:

$$T = T_0 + (T_e - T_0)\left[erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) - \boldsymbol{exp}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{c\rho\lambda}}\frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{\alpha^2}{c\rho\lambda}t\right)\cdot\right.$$

$$\left. \cdot erfc\left(\frac{\alpha}{\sqrt{c\rho\lambda}}\sqrt{t} + \frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\right]$$

$$T(0,t) = T_0 + (T_e - T_0)\left[1 - \boldsymbol{exp}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{c\rho\lambda}}\frac{x}{\sqrt{a}}\right) erfc\left(\frac{\alpha}{\sqrt{c\rho\lambda}}\sqrt{t}\right)\right]$$

Асимптотические свойства:

При больших значениях коэффициента теплообмена

$$erfc\left(\frac{\alpha}{\sqrt{c\rho\lambda}}\sqrt{t}\right) \approx \frac{\boldsymbol{exp}\left(-\frac{\alpha^2}{c\rho\lambda}t\right)}{\alpha^3\sqrt{\pi t}}\sqrt{c\rho\lambda} \qquad \text{и} \qquad T \approx T_0 + (T_e - T_0)\left[1 - O\left(\alpha^{-3}\right)\right]$$

Почти постоянная температура поверхности

В противоположном случае

$$T = T_0 + (T_e - T_0)\left[1 - \left(1 + \frac{\alpha^2}{c\rho\lambda}t + \ldots\right)\cdot\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\alpha}{\sqrt{c\rho\lambda}}\sqrt{t}\ldots\right)\right] \approx$$

$$\approx T_0 + 2(T_e - T_0)\frac{\alpha}{\sqrt{c\rho\lambda}}\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

Нагрев потоком величины

$$\boxed{q_0 \approx \alpha(T_e - T_0)}$$

1.Задача на дом:

Найти решение задачи, используя операционный метод

$$
\begin{cases}
c\rho\dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + A\,exp(-\sigma x) \\
x = 0: \quad -\lambda\dfrac{\partial T}{\partial x} = 0 \\
x \to \infty: \quad T = T_0 \\
t = 0: \quad T = T_0
\end{cases}
$$

Для целого ряда нестационарных задач весьма удобным оказывается **метод Дюамеля**

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

$$t=0:\quad T=T_0\quad x\ge 0 \qquad (32)$$

$$\begin{cases} x=0: & T=f(t); \\ x\to\infty: & T=T_0 \end{cases}\quad t>0$$

Полагаем $T=u+\mathrm{v}$ Введенные функции должны удовлетворять дифференциальному уравнению той же формы, но более простым краевым условиям

$$\begin{matrix} u=T_0, & t=0, x\ge 0; \\ u=0, & x=0, t>0 \end{matrix}\qquad (33)\qquad \text{и}\qquad \begin{matrix} \mathrm{v}=0, & t=0, x\ge 0; \\ \mathrm{v}=f(t), & x=0, t>0 \end{matrix}\qquad (34)$$

Решение задачи для ***u*** с граничными условиями (33) нам известно, вернее, легко может быть получено из решения задачи (10) с г.у. I рода , записанного в размерных переменных:

$$T=T_0+(T_s-T_0)erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right),\quad \kappa=\frac{\lambda}{c\rho} \qquad (35)$$

Следовательно,

$$u=T_0\left[1-erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right)\right]=T_0 erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \qquad erf(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-y^2}dy \qquad (36)$$

Для нахождения функции v нам потребуется теорема Дюамеля

Теорема Дюамеля гласит

Если $\varphi(x,t)$ есть решение для изменения температуры в твердом теле, начальная температура которого равна нулю, а поверхность поддерживается при температуре, равной единице, то решение $\mathrm{v}(x,t)$ для случая, когда температура поверхности тела меняется со временем, т.е., $v = f(t),\ x = 0$, дается формулой

$$\mathrm{v}(x,t) = \int_0^t f(y)\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,t-y)dy \qquad (37)$$

Теорема Дюамеля может быть применена и к случаям конвективного теплообмена на поверхности, когда твердое тело, имеющее однородную начальную температуру, внезапно подвергается воздействию окружающей жидкости (газа), температура которой меняется со временем по заданному закону.

Чтобы применить теорему Дюамеля, найдем решение $\varphi(x,t)$, которое также содержится в (35)

$$T = T_0 + (T_s - T_0)erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right), \quad \kappa = \frac{\lambda}{c\rho} \qquad (35)$$

$$\varphi = \left[1 - erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right)\right] = erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right)$$

$$T_0 = 0; T_s = 1:$$

Следовательно,

$$\varphi(x,t-y) = erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa(t-y)}}\right)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,t-y) = \frac{x}{2\sqrt{\pi\kappa}}\frac{\mathbf{exp}\left(-x^2/(4\kappa(t-y))\right)}{(t-y)^{3/2}}$$

В результате решение для функции v принимает вид:

$$\mathrm{v}(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi\kappa}} \int_0^t f(y) \frac{\mathbf{exp}\left(-x^2 / \left(4\kappa(t-y)\right)\right)}{(t-y)^{3/2}} dy \tag{38}$$

Если мы введем новую переменную $z^2 = x^2 / 4\kappa(t-y)$, то найдем $\dfrac{dy}{(t-y)^{3/2}} = \dfrac{4\sqrt{\kappa}}{x} dz$ и

$$\mathrm{v}(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\left(2\sqrt{\kappa t}\right)}^{\infty} f\left(t - \frac{x^2}{4\kappa z^2}\right) e^{-z^2} dz \tag{39}$$

Полное решение дается суммой величин $u + \mathrm{v}$

Пример

Найдем решение для линейного изменения температуры поверхности $f(t) = T_0 + Ct$ (40)

Мы должны проинтегрировать уравнение (39)

$$\mathrm{v}(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\left(2\sqrt{\kappa t}\right)}^{\infty} \left(T_0 + C\left(t - \frac{x^2}{4\kappa z^2}\right)\right) e^{-z^2} dz =$$

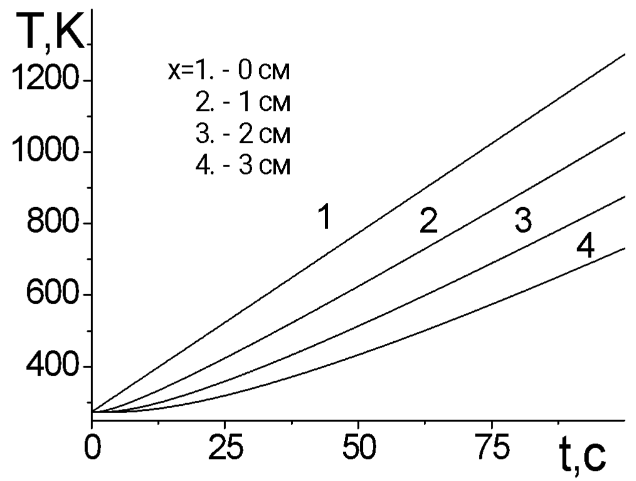
$$= \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \int_X^{\infty} e^{-z^2} dz + \frac{2Ct}{\sqrt{\pi}} \int_X^{\infty} e^{-z^2} dz - \frac{Cx^2}{2\sqrt{\kappa\pi}} \int_X^{\infty} \frac{e^{-z^2}}{z^2} dz, \qquad X = \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}$$

В третьем слагаемом проинтегрируем по частям $p = e^{-z^2}; dq = \frac{dz}{z^2} \Longrightarrow dp = -2ze^{-z^2}dz; q = -\frac{1}{z}$

$$\Longrightarrow \int_X^\infty \frac{e^{-z^2}}{z^2}dz = pq\Big|_x^\infty - \int_X^\infty q\,dp = -\frac{e^{-z^2}}{z^2}\Bigg|_x^\infty - 2\int_X^\infty e^{-z^2}dz = \frac{e^{-X^2}}{X^2} - \sqrt{\pi}\,erfc(X)$$

Объединяем все результаты $T = T_0 + Ct\left[\left(1 + 2X^2\right)erfc(X) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}Xe^{-X^2}\right],\ X = \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}$ (41)

Распределение температуры вблизи нагреваемой поверхности в различные моменты времени показано на рисунке. В расчетах использованы свойства, близкие к свойствам железа



Даже при линейном изменении температуры поверхности в точках, отличных от $x = 0$, температура меняется со временем нелинейно, что, естественно, связано с процессом теплопроводности

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

$$T(0,t)-T_0=(T_s-T_0)cos(\omega t) \qquad (42)$$

$$x\to\infty: \quad T=T_0$$

$$t=0: \quad T=T_0$$

$$\xi=0: \quad \theta=cos[\overline{\omega}\tau]; \Rightarrow$$

$$\bar{\theta}=\frac{p}{p^2+\overline{\omega}^2};$$

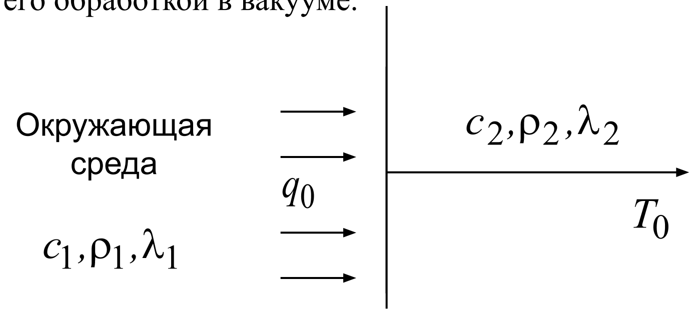
$$\theta=\int_0^\tau\frac{\xi cos(\overline{\omega}y)}{2\sqrt{\pi(\tau-y)^3}}exp\left(-\frac{\xi^2}{4(\tau-y)}\right)dy$$

Граничные условия такого вида встречаются в поршневых двигателях внутреннего сгорания, циклических регенераторах и наблюдаются в верхнем слое земной поверхности в результате ежедневно и ежегодно повторяющихся вариаций температуры

<u>2. Задание на дом (или лаб.):</u> Используя теорему Дюамеля, найти решение задачи (42) в физических переменных и построить зависимость температуры от времени в разных точках и для разных теплофизических свойств в различные моменты времени

Примеры сопряженных задач

Предположим, что термическая обработка материала тепловым потоком постоянной величины осуществляется в среде, свойства которой отличны от свойств обрабатываемого материала. Требуется оценить влияние среды на величину температуры материала по сравнению с его обработкой в вакууме.



$$c_1\rho_1\frac{\partial T_1}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial x}\right),\qquad x<0 \tag{50}$$

$$c_2\rho_2\frac{\partial T_2}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial x}\right),\qquad x>0 \tag{51}$$

$$x=0:\ \lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial x}-\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial x}=q_0,\qquad T_1=T_2 \tag{52}$$

$$x\to\pm\infty:\ T_i=T_0, i=1,2 \tag{53}$$

$$t=0:\ T_i=T_0, i=1,2 \tag{54}$$

Решаем задачу операционным методом

$$p\bar{T}_1-T_0=\kappa_1\frac{d^2\bar{T}_1}{dx^2}; \tag{55}$$

$$p\bar{T}_2-T_0=\kappa_2\frac{d^2\bar{T}_2}{dx^2}; \tag{56}$$

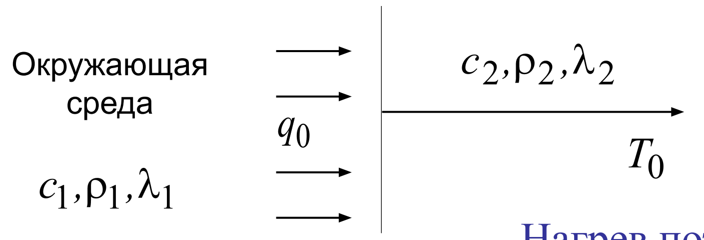
$$x=0:\ \lambda_1\frac{d\bar{T}_1}{dx}-\lambda_2\frac{d\bar{T}_2}{dx}=\frac{q_0}{p},$$

$$\bar{T}_1=\bar{T}_2$$

Для сопряженных задач операционный метод практически незаменим

$$\bar{T}_1-\frac{T_0}{p}=A_1\,exp\left(\sqrt{\frac{p}{\kappa_1}}x\right);\qquad \bar{T}_2-\frac{T_0}{p}=A_2\,\mathbf{exp}\left(-\sqrt{\frac{p}{\kappa_2}}x\right) \tag{57}$$

$$A_1=A_2=A=\frac{q_0}{p\sqrt{p}}\frac{1}{\sqrt{c_1\rho_1\lambda_1}+\sqrt{c_2\rho_2\lambda_2}}=\frac{q_e}{p\sqrt{p}\sqrt{c_2\rho_2\lambda_2}},\qquad q_e=\frac{q_0}{1+K_\varepsilon}$$



Нагрев потоком, уменьшенным в $1+K_\varepsilon$ раз:

$$T_2 = T_0 + \frac{q_e}{\sqrt{c_2\rho_2\lambda_2}}\left\{2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,\mathbf{exp}\left(-\frac{x^2}{4\kappa_2 t}\right) - \frac{x}{\sqrt{\kappa_2}}\,erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_2 t}}\right)\right\} \quad (58)$$

$$\boxed{q_e = \frac{q_0}{1+K_\varepsilon} \qquad K_\varepsilon = \sqrt{\frac{c_1\rho_1\lambda_1}{c_2\rho_2\lambda_2}}} \quad (59)$$

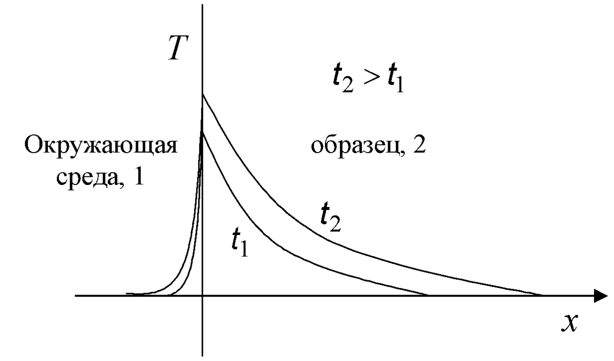
$K_{\varepsilon,1} \approx 0{,}093$ вода-железо

$K_{\varepsilon,2} \approx 3{,}19\cdot 10^{-4}$ воздух-железо

	c	ρ	λ
железо	452 Дж/(кг К)	7870 Кг/м^3	81,1
вода	4182	998,2	0,597
воздух	1012	1,163	0,025 Вт/(м К)

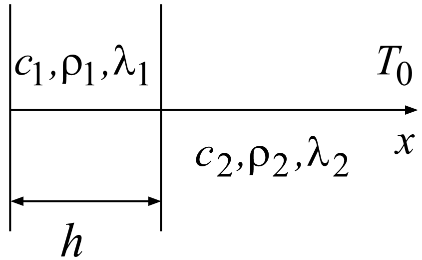
$T = 293K$

Качественное распределение температуры



Термическая обработка материала с покрытием

Теплообмен между нагреваемой средой $T = T_s$ и поверхностью - идеальный



$$c_1\rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}\right), \qquad 0 < x < h$$

$$c_2\rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}\right), \qquad x > h$$

$$x = h: \ \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}; \qquad T_1 = T_2 \tag{60}$$

$$x = 0: \ T_1 = T_s$$

$$x \to \infty: \ T_2 = T_0;$$

$$t = 0: \ T_i = T_0, i = 1{,}2$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$\theta = \left(\frac{T - T_0}{T_s - T_0}\right); \ \tau = \frac{t}{t_*} = Fo; \ \ \xi = \frac{x}{x_*}$$

$$K_c \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} = K_\lambda \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2}; \qquad 0 < \xi < \delta$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi^2}; \qquad \xi > \delta$$

$$\xi = 0: \ \theta_1 = 1; \tag{61}$$

$$\xi = \delta: \ K_\lambda \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} = \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi}; \ \ \theta_1 = \theta_2$$

$$\xi \to \infty: \ \theta_2 = 0;$$

$$\tau = 0: \ \theta_i = 0; \ i = 1{,}2$$

$$K_c = \frac{c_1\rho_1}{c_2\rho_2}; \quad K_\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad \delta = \frac{h}{x_*} \tag{62}$$

Ход решения

1.Задача в пространстве изображений

$$K_c p\bar{\theta}_1 = K_\lambda d\frac{d^2\bar{\theta}_1}{\partial\xi^2};\quad 0<\xi<\delta; \qquad p\bar{\theta}_2 = \frac{d^2\bar{\theta}_2}{d\xi^2};\quad \xi>\delta \tag{63}$$

$$\xi = 0:\quad \bar{\theta}_1 = 1/p;$$

$$\xi = \delta:\quad K_\lambda\frac{d\bar{\theta}_1}{d\xi} = \frac{d\bar{\theta}_2}{d\xi};\quad \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 \tag{64}$$

$$\xi\to\infty:\quad \bar{\theta}_2 = 0;$$

2.Общее решение имеет вид

$$\bar{\theta}_1 = A_1\,exp(-k_1\xi) + B_1\,exp(k_1\xi)$$
$$\bar{\theta}_2 = A_2\,exp(-k_2\xi) + B_2\,exp(k_2\xi) \tag{65}$$

$$B_2 \equiv 0$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}p}$$
$$k_2 = \sqrt{p}$$

Корни характеристического уравнения

3.Используя условия в нуле и на границе раздела, находим систему уравнений для определения постоянных интегрирования

$$(66)\quad \begin{cases} A_1 + B_1 = \dfrac{1}{p} \\ A_1 e^{-k_1\delta} + B_1 e^{k_1\delta} = A_2 e^{-k_2\delta} \\ K_\lambda\left(-A_1 k_1 e^{-k_1\delta} + B_1 k_1 e^{k_1\delta}\right) = -A_2 k_2 e^{-k_2\delta} \end{cases}$$

$$A_1 = \frac{1}{p}\frac{e^{k_1\delta}}{e^{k_1\delta} - \varepsilon e^{-k_1\delta}};\qquad B_1 = -\frac{\varepsilon}{p}\frac{e^{-k_1\delta}}{e^{k_1\delta} - \varepsilon e^{-k_1\delta}}$$

(67)

$$A_2 = \frac{1-\varepsilon}{p}\frac{1}{e^{k_1\delta} - \varepsilon e^{-k_1\delta}}$$

В результате ***решение задачи в пространстве изображений*** примет вид

$$\bar{\theta}_1 = \frac{1}{p}\cdot\frac{e^{-k_1(\xi-\delta)} - \varepsilon e^{k_1(\xi-\delta)}}{e^{k_1\delta} - \varepsilon e^{-k_1\delta}}; \qquad \bar{\theta}_1 = \frac{1}{p}\cdot\frac{(1-\varepsilon)e^{-k_2(\xi-\delta)}}{e^{k_1\delta} - \varepsilon e^{-k_1\delta}}; \tag{68}$$

$$\varepsilon = \frac{1-\sqrt{K_c K_\lambda}}{1+\sqrt{K_c K_\lambda}}; \qquad |\varepsilon| < 1 \tag{69}$$

4.Переходим к оригиналам

Используем

$$z^{-1} = \frac{1}{e^{k_1\delta} - \varepsilon e^{-k_1\delta}} = \frac{e^{-k_1\delta}}{1-\varepsilon e^{-2k_1\delta}} = e^{-k_1\delta}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n e^{-2k_1 n\delta}; \tag{70}$$

$$\begin{cases} \bar{\theta}_1 = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\varepsilon^n exp\left[-(\xi+2n\delta)\sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}p}\right] - \varepsilon^{n+1} exp\left[-(\delta-\xi+(2n+1)\delta)\sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}p}\right]\right\}; \\ \bar{\theta}_2 = \dfrac{1-\varepsilon}{p}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n exp\left\{-\left[(2n+1)\delta\sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}} + (\xi-\delta)\right]\sqrt{p}\right\}; \end{cases} \tag{71}$$

$$\boxed{\frac{1}{p}exp\left(-\alpha\sqrt{p}\right) \div erfc\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\tau}}\right)}$$

Это – точное решение задачи

$$\begin{cases} \theta_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\varepsilon^n erfc\left[-\frac{(\xi+2n\delta)\sqrt{K_c/K_\lambda}}{2\sqrt{\tau}}\right] - \varepsilon^{n+1} erfc\left[-\frac{(\delta-\xi+(2n+1)\delta)\sqrt{K_c/K_\lambda}}{2\sqrt{\tau}}\right]\right\}; \\ \theta_2 = (1-\varepsilon)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n exp\left\{-\frac{(2n+1)\delta\sqrt{K_c/K_\lambda} + (\xi-\delta)}{2\sqrt{\tau}}\right\}; \end{cases} \tag{72}$$

Часто требуется знать решение в отдельных точках для ограниченных значений времени. В этом случае можно получить приближенное решение в простой форме, что удобно для использования

$$\xi=\delta: \qquad \bar\theta_1=\bar\theta_2=\frac{1-\varepsilon}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\varepsilon^n\, exp\left[-(2n+1)\delta\sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}p}\right]\right\}; \quad |\varepsilon|<1$$

$$\theta_1=\theta_2=(1-\varepsilon)\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\varepsilon^n erfc\left[-\frac{(2n+1)\delta\sqrt{K_c/K_\lambda}}{2\sqrt{\tau}}\right]\right\} \qquad (73)$$

<u>Ряд быстро сходится</u>

большие значения комплексной переменной p соответствуют малым значениям времени τ

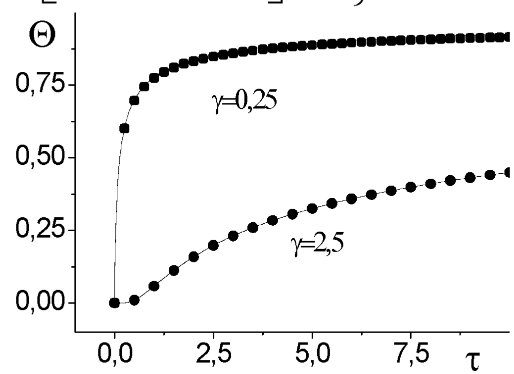
Следовательно,

$$\bar\theta_1=\bar\theta_2=\frac{1-\varepsilon}{p}\left\{exp\left[-\delta\sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}p}\right]+\varepsilon\, exp\left[-3\delta\sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}p}\right]+\ldots\right\}; \qquad (74)$$

$$\theta_1=\theta_2=(1-\varepsilon)\left\{erfc\left[\frac{\delta\sqrt{K_c/K_\lambda}}{2\sqrt{\tau}}\right]+\varepsilon erfc\left[\frac{3\delta\sqrt{K_c/K_\lambda}}{2\sqrt{\tau}}\right]+\ldots\right\}; \qquad (75)$$

Быструю сходимость ряда в решении иллюстрирует рисунок

$$\gamma=\delta\sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}}=\frac{h}{\sqrt{\kappa_1 t_*}}$$



Сплошные линии соответствуют расчету по формуле (73) с удержанием 25 членов ряда, а символы – расчету по формуле (75). Видно, что результаты практически совпадают.

Параметр γ , входящий в решение, можно трактовать как термическую толщину покрытия. Это отношение реальной толщины покрытия к толщине теплового пограничного слоя, формирующегося в материале покрытия за некоторое характерное время.

$$\gamma = \delta\sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}} = \frac{h}{\sqrt{\kappa_1 t_*}}$$

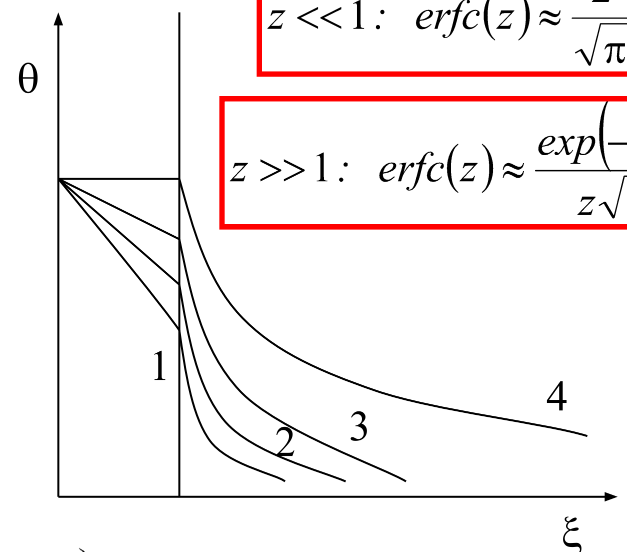
Если покрытие является термически тонким, мы можем воспользоваться асимптотическим представлением известной нам функции .

$$\boxed{z \ll 1: \quad erfc(z) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} z}$$

$$\boxed{z \gg 1: \quad erfc(z) \approx \frac{exp\left(-z^2\right)}{z\sqrt{\pi}}}$$

А $\delta\sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}} = \frac{h}{\sqrt{\kappa_1 t_*}} \ll 1$ - «термически тонкое» покрытие

$$\theta_1 = \theta_2 \approx (1-\varepsilon)\left[\left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{\tau}}\sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}}\right) + \varepsilon\left(1 - \frac{3\delta}{\sqrt{\tau}}\sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}}\right) + \ldots\right] \qquad (76)$$



Б Малость параметра можно использовать непосредственно в пространстве изображений

$$\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 \approx \frac{1-\varepsilon}{p}\left[(1+\varepsilon) - \delta(1-3\varepsilon)\sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda} p} + \ldots\right];$$

$$\theta_1 = \theta_2 = (1-\varepsilon)\left[(1+\varepsilon) - \frac{\delta(1-3\varepsilon)}{\sqrt{\pi\tau}}\sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}} + \ldots\right] \approx \left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{\pi\tau}}(1-4\varepsilon)\sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}}\right) \qquad (77)$$

$$1-\varepsilon \approx \frac{1}{1+\varepsilon}$$

Задача с неидеальным тепловым контактом

Неидеальный тепловой контакт может быть связан с шероховатостью поверхностей; процессами газификации…

Переход к безразмерным переменным и способ решения – аналогичны предыдущему.

Граничное условие для температур на контакте в безразмерных переменных принимает вид

$$\theta_1-\theta_2=-D\frac{\partial\theta_2}{\partial\xi},\xi=\delta;\quad D=\frac{h\lambda_2}{\lambda_3\sqrt{\kappa_2 t_*}}$$

$$c_1\rho_1\frac{\partial T_1}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial x}\right),\quad 0<x<h$$

$$c_2\rho_2\frac{\partial T_2}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial x}\right),\quad x>h$$

$$x=h:\ \lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial x}=\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial x};\qquad (78)$$

$$T_1-T_2=-\frac{\Delta}{\lambda_3}\lambda_2\left(\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)_{x=h}$$

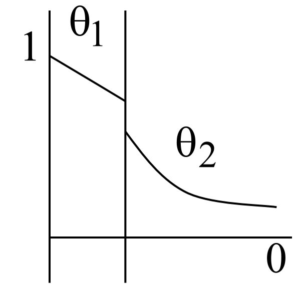
$$x=0:\ T_1=T_s$$

$$x\to\infty:\ T_2=T_0;$$

$$t=0:\ T_i=T_0, i=1,2$$

Решение в пространстве изображений по Лапласу, $\xi=\delta$

$$\bar\theta_2=\frac{2K_\varepsilon}{1+K_\varepsilon\left(1+D\sqrt{p}\right)}\frac{exp\left[-\delta\sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}p}\right]}{1-\beta exp\left[-2\sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}p}\right]};\qquad \beta=\frac{1-K_\varepsilon\left(1+D\sqrt{p}\right)}{1+K_\varepsilon\left(1+D\sqrt{p}\right)}\qquad (79)$$



$$D<<1:\ \beta\approx\varepsilon-\frac{2DK_\varepsilon\sqrt{p}}{(1+K_\varepsilon)^2};\quad \bar\theta_2=\bar\theta_2\Big|_{D=0}-\frac{D}{\sqrt{p}}\frac{K_\varepsilon^2}{\left(\delta\sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}p}+K_\varepsilon\right)^2};\cdots$$

$$1-\varepsilon\approx\frac{1}{1+\varepsilon}$$

$$1-\varepsilon\equiv\frac{2K_\varepsilon}{1+K_\varepsilon}$$

Различие между температурами с течением времени убывает

$$\Rightarrow\ \theta_2\approx\theta_2\Big|_{D=0}-\frac{D}{\sqrt{\pi\tau}}+\ldots\qquad (80)\qquad \gamma<<1$$