ЛЕКЦИЯ 8

ПЛАН ЛЕКЦИИ

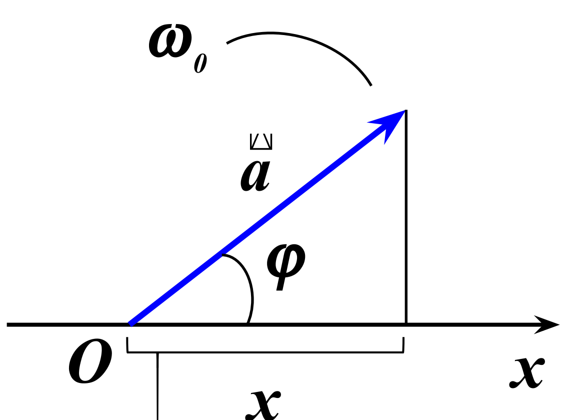
1. Метод векторной диаграммы. Сложение гармонических колебаний. Биения.
2. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу.
3. Свободные затухающие колебания.

Метод векторной диаграммы

Графическое изображение колебаний в виде векторов на плоскости - *векторная диаграмма.*

Рассмотрим произвольный вектор $\vec{a}$, образующий с осью x угол φ.

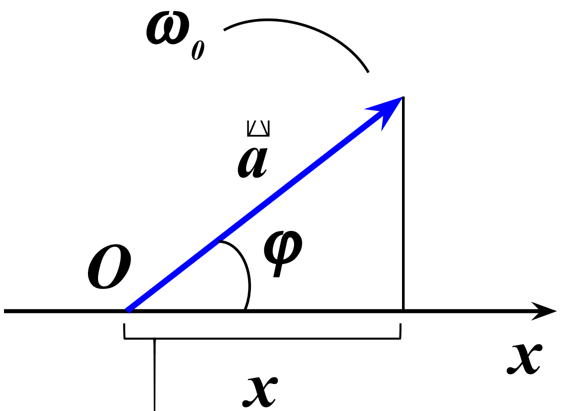
Пусть вектор вращается относительно точки O с угловой скоростью ω_0 Проекция конца вектора будет перемещаться по оси в пределах от $+A$ до $-A$.



Закон изменения координаты проекции со временем:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Метод векторной диаграммы



$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Проекция конца вектора $\vec{a}$ будет совершать гармоническое колебание с амплитудой, равной длине вектора, с круговой частотой, равной угловой скорости ω_0 вращения вектора, и с начальной фазой, равной φ.

Гармоническое колебание может быть задано с помощью вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а направление вектора образует с осью x *угол, равный начальной фазе колебания.*

Сложение гармонических колебаний.

Сложим два гармонических колебания одинакового направления и одинаковой частоты:

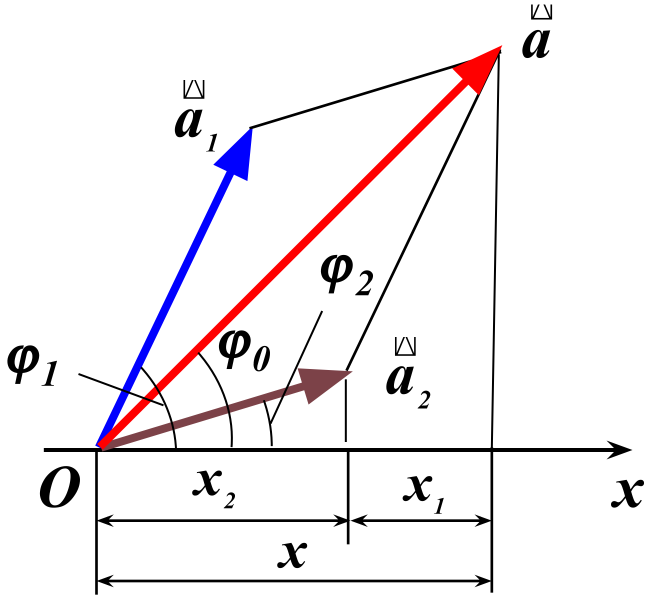
$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

В любой момент времени смещение x колеблющейся точки будет суммой смещений x_1 и x_2.

Определим вид и параметры результирующего колебания. Воспользуемся методом векторной диаграммы.

Каждое из колебаний в отдельности представляет собой вектор ($\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$), длина которого равна амплитуде колебания, а направление вектора образует с осью x угол, равный начальной фазе колебания.

Сложение гармонических колебаний.



По правилам сложения векторов построим результирующий вектор $\vec{a}$.

Проекция этого вектора на ось x равна сумме проекций слагаемых векторов:

$$x = x_1 + x_2$$

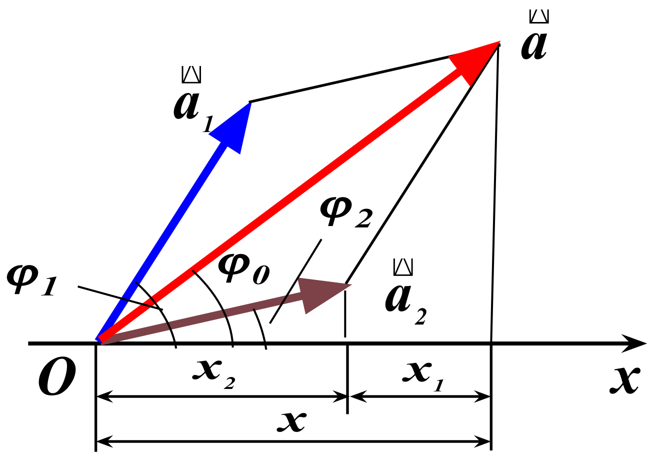
Результирующий вектор вращается с той же угловой скоростью ω_0, что и векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.

Следовательно, результирующее колебание будет гармоническим колебанием с частотой ω_0, амплитудой A и начальной фазой φ_0:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Сложение гармонических колебаний.

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$



В этом уравнении

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$tg\varphi_0 = \frac{A_1\sin(\varphi_1) + A_2\sin(\varphi_2)}{A_1\cos(\varphi_1) + A_2\cos(\varphi_2)}$$

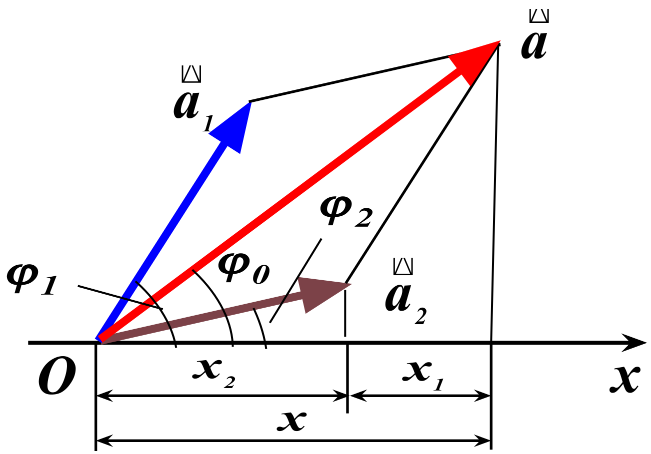
<u>Вывод</u>: метод векторной диаграммы позволяет свести сложение нескольких гармонических колебаний одной частоты к операции сложения векторов.

Из анализа выражения для амплитуды:

а) Если разность фаз колебаний $(\varphi_2 - \varphi_1)$ равна или кратна нечетному числу π, (колебания находятся в противофазе), то амплитуда результирующего колебания равна по модулю разности амплитуд $|A_2 - A_1|$. Колебания максимально *ослабляют* друг друга.

Сложение гармонических колебаний.

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$



б) Если частоты колебаний различны, то векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ будут вращаться с разными угловыми скоростями на векторной диаграмме.

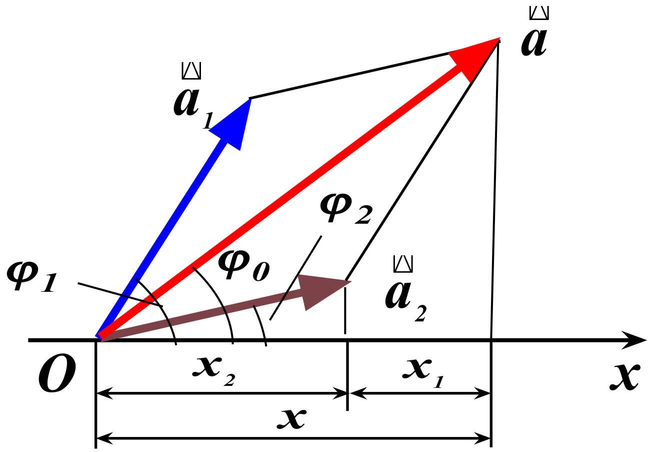
Результирующий вектор в этом случае уже не будет определять гармоническое колебание. Его величина и скорость вращения будут меняться со временем.

Квадрат результирующей амплитуды такого колебания будет выражаться уравнением вида

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_2 - \omega_1)t$$

Сумма гармонических колебаний одного направления с разными частотами не является гармоническим колебанием.

Сложение гармонических колебаний.



Пусть два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало различаются по частоте. Результирующее движение - гармоническое колебание с пульсирующей амплитудой - ***биения***.

Биения

Имеются два колебания, различающиеся только частотами:

$$x_1 = A\cos(\omega t), \qquad x_2 = A\cos[(\omega + \Delta\omega)t], \qquad \Delta\omega << \omega$$

Результат сложения колебаний: $$x \approx 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos(\omega t)$$

Итог: получили выражение для почти гармонического колебания с частотой ω. *Амплитуда* изменяется по периодическому закону.

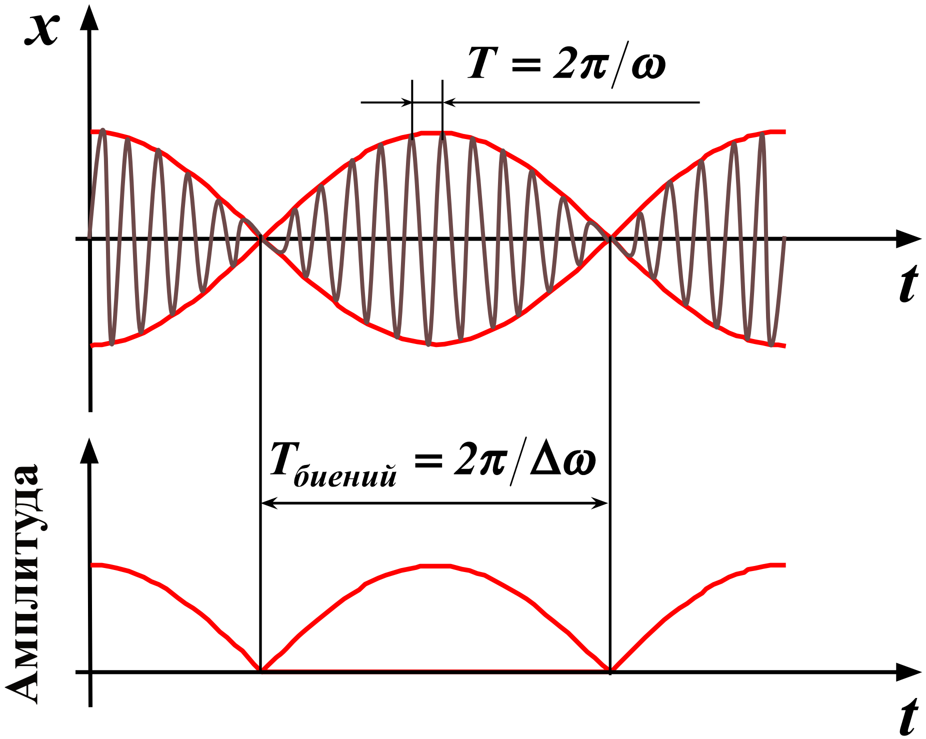
$$A_{биений} = \left|2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right|$$

$\Delta\omega$ - *циклическая частота биений*

$T_{биений} = 2\pi/\Delta\omega$ - *период биений.*

Сложение гармонических колебаний.

Биения



$$x = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos(\omega t)$$

$$A_{биений} = \left|2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right|$$

$$T_{биений} = 2\pi/\Delta\omega$$

Сложение гармонических колебаний.

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

Рассмотрены варианты сложения однонаправленных колебаний.

Сложение разнонаправленных колебаний - более сложный случай.

Рассмотрим результат сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей x и y.

Пример: на управляющие вертикальные и горизонтальные пластины осциллографа поданы периодические гармонические сигналы.

Пусть начальная фаза первого колебания равна нулю. Уравнения колебаний:

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t \\ y = B\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Сложение гармонических колебаний.

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t \\ y = B\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Для нахождения уравнения траектории результирующего колебания из уравнений исключается t.

После преобразований: $$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\varphi = \sin^2\varphi$$

Анализ:

а) Пусть разность фаз $\varphi = \pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Из уравнения следует

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - (-1)^n \frac{2xy}{AB} = 0$$

При четных n получается $$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} = \left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0,$$

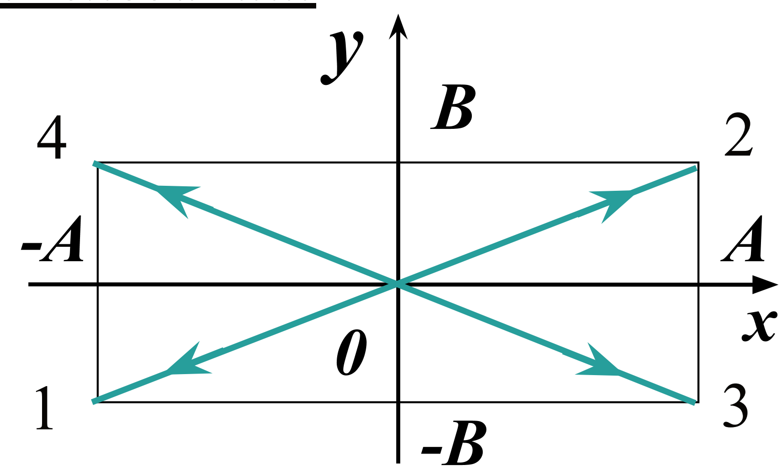
или $\frac{x}{A} - \frac{y}{B} = 0$, $\boxed{y = \frac{B}{A}x}$

При нечетных n получается $\boxed{y = -\frac{B}{A}x}$

Сложение гармонических колебаний.

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

$$y = \frac{B}{A}x \qquad y = -\frac{B}{A}x$$



Нарисуем графики зависимостей.

Первое уравнение - прямая 1 – 2. второе уравнение – прямая 3 – 4.

б) Пусть разность фаз будет произвольной.

Уравнение траектории:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\varphi = \sin^2\varphi$$

Это уравнение *эллипса*.

<u>Вывод</u>: точка, участвующая в двух взаимно перпендикулярных колебаниях с одинаковой частотой, движется по *эллиптической* траектории.

Сложение гармонических колебаний.

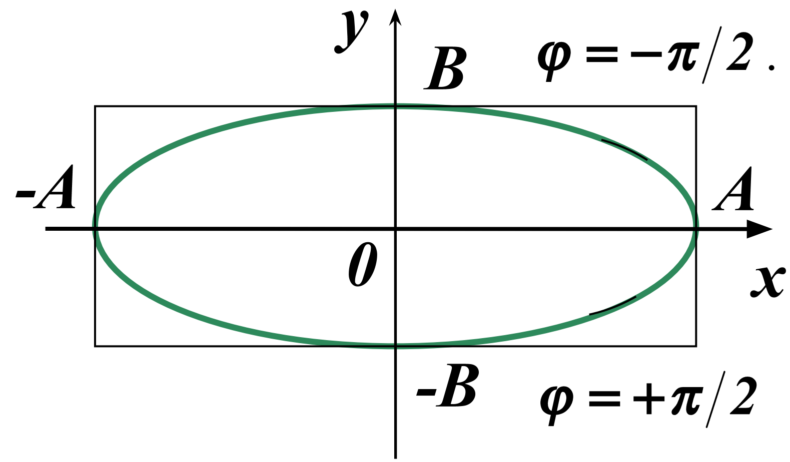
Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

Параметры траектории определяются соотношением амплитуд и разностью фаз исходных колебаний.

Пример: если $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}(1+2n)$, $n = 1, 2, \ldots$, то получим уравнение вида

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

Это каноническое уравнение эллипса



Стрелки показывают направление движения точки вдоль траектории при $\varphi = +\pi/2$ и $\varphi = -\pi/2$.

Полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний.

При $A = B$ эллипс вырождается в окружность.

Сложение гармонических колебаний.

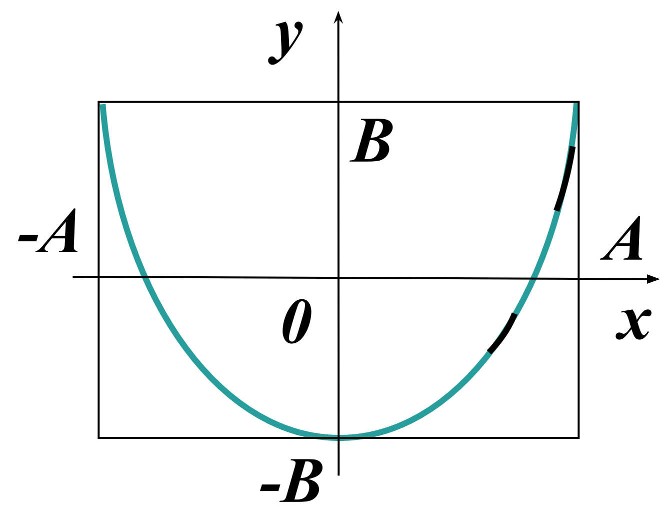
Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний неодинаковы, то траектория результирующего движения может иметь вид сложных кривых, называемых *фигурами Лиссажу*.

Пример: Пусть отношение частот взаимно перпендикулярных колебаний равно 1:2 и разность фаз $\varphi = \pi/2$.

Уравнения колебаний имеют вид:

$$x = A\cos\omega t, \quad y = B\cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$



Результирующее колебание показано на рисунке.

Траектория вырождается в незамкнутую кривую, по которой точка движется туда и обратно. Это одна из простейших фигур Лиссажу.

Свободные затухающие колебания.

В реальных системах всегда присутствуют процессы, приводящие к *диссипации энергии*. Это, например, силы трения. Происходит затухание (изменение амплитуды) колебаний.

Рассмотрим законы изменения параметров *свободных затухающих колебаний*.

Свободные затухающие колебания – это такие свободные колебания, амплитуда которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшается.

Закон затухания колебаний определяется свойствами колебательных систем.

Свободные затухающие колебания.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$\beta = const$ - *коэффициент затухания*

ω_0 - *собственная частота* колебательной системы (частота *свободных* незатухающих колебаний в отсутствие потерь энергии).

В случае малых затуханий ($\beta \ll \omega_0$) решение уравнения затухающих колебаний имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

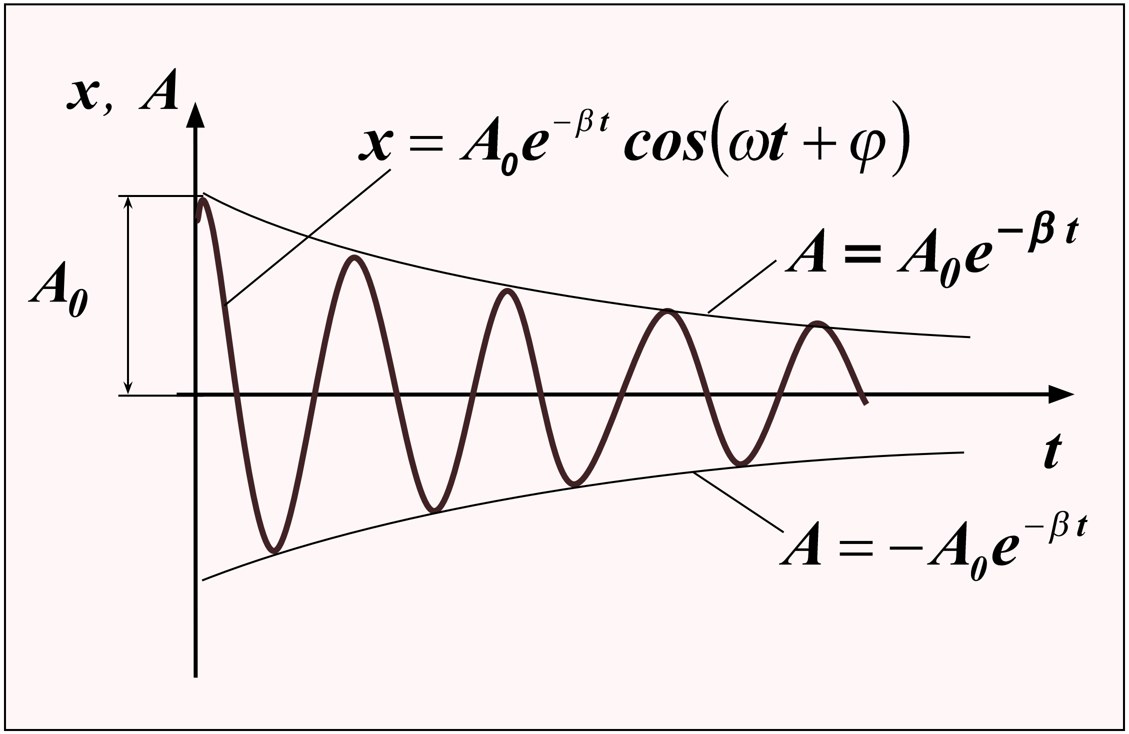
Свободные затухающие колебания.

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

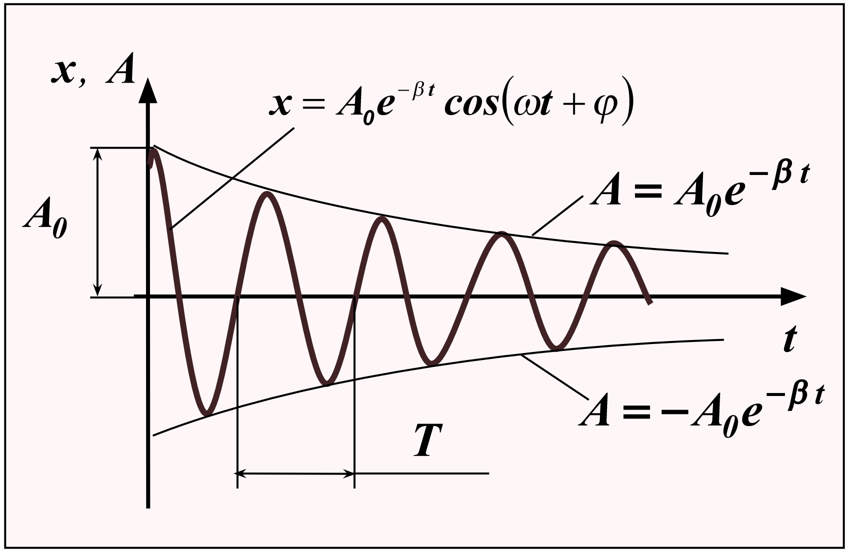
$A = A_0 e^{-\beta t}$ - амплитуда затухающих колебаний.

A_0 - начальная амплитуда.

Время $\tau = 1/\beta$, за которое амплитуда колебаний уменьшится в e раз - *время релаксации*.



Свободные затухающие колебания.



Колебание $x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$ не периодическое и не гармоническое.

Периодичность колебания нарушается затуханием.

Следовательно, к затухающим колебаниям <u>неприменимо</u> понятие периода или частоты.

Но: при малом затухании можно пользоваться понятием периода как промежутка времени между двумя последующими максимумами или минимумами колеблющейся физической величины.

Выражение для периода: $$T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Свободные затухающие колебания.

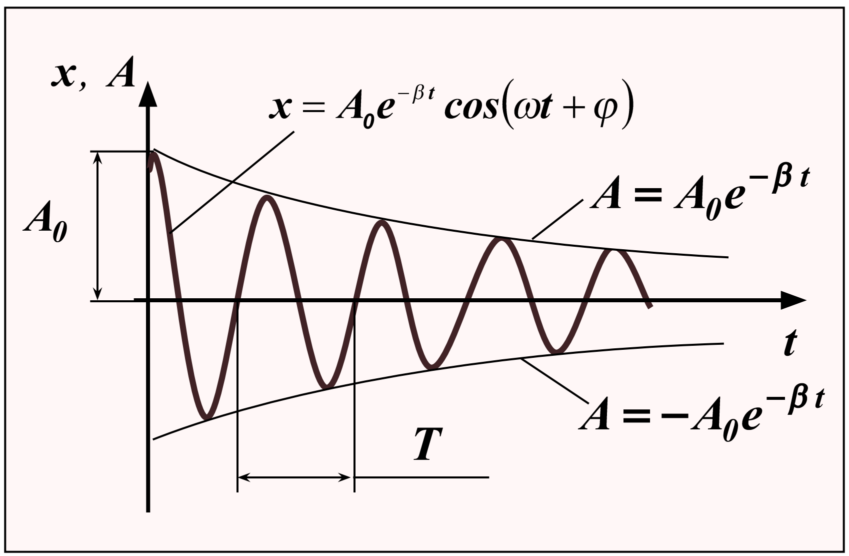
Для характеристики колебаний используют следующие параметры:

1. *Логарифмический декремент затухания.*

Если $A(t)$ и $A(t+T)$- амплитуды двух последовательных колебаний, которые соответствуют моментам времени, отличающимся на период, то отношение

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$$

называется *декремент затухания.*



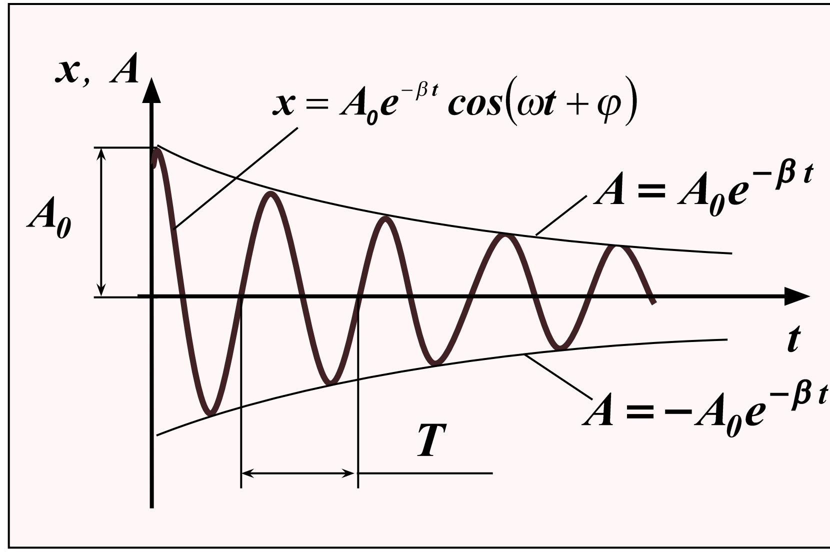
Логарифм декремента затухания называется *логарифмическим декрементом затухания*

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e},$$

N_e - число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз.

Свободные затухающие колебания.

Таким образом, ***логарифмический декремент затухания*** – это величина, обратная числу колебаний, совершаемых за время, в течение которого амплитуда затухающего колебания уменьшится в e раз .



2. *Добротность* колебательной системы.

Добротность – это величина, обратно пропорциональная логарифмическому декременту затухания.

При малых затуханиях $T \approx T_0$, следовательно, можно записать:

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N_e = \frac{\pi}{\beta T_0} = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

Добротность колебательной системы пропорциональна числу колебаний N_e, совершаемых за время релаксации.