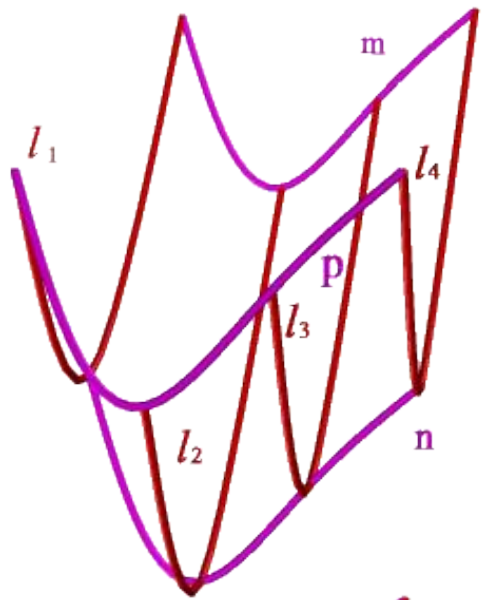
Лекция № 3

Поверхности.
Пересечение поверхностей.

План лекции

1. Виды поверхностей
2. Пересечение многогранных поверхностей с плоскостью
3. Пересечение многогранных поверхностей с прямой
4. Пересечение поверхностей вращения с плоскостью
5. Пересечение поверхностей вращения с прямой
6. Метод посредников
7. Пересечение поверхностей двух видов

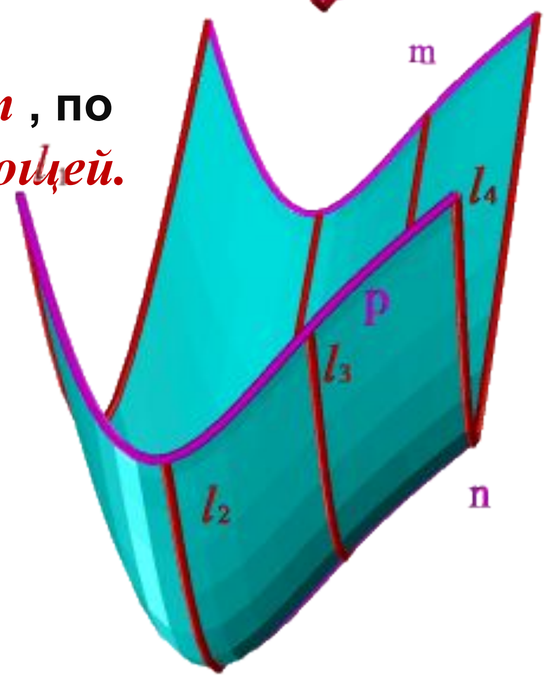
1. ВИДЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ



1. Кривые поверхности

Кривой поверхностью называется геометрическое место (множество) последовательных положений линии, движущейся в пространстве

Всякую поверхность можно рассматривать как образованную **движением линии *l*.** При перемещении линии *l* каждая ее точка ***A, B, C, …*** опишет в пространстве некоторую линию m , m_1 , m_{2} , **... Линия *l* , образующая поверхность, называется *образующей,* а линия *m* , по которой передвигается образующая, - *направляющей.***



Совокупность элементов поверхности, выделяющих данную поверхность из всего класса поверхностей, к которому она принадлежит, называется определителем поверхности.

Например, для конуса вращения с осью i и образующей прямой l определитель записывается так: Ф (i × l)

Классификация кривых поверхностей.

Основой деления кривых поверхностей на классы являются общие для них признаки и свойства.

По виду образующей:

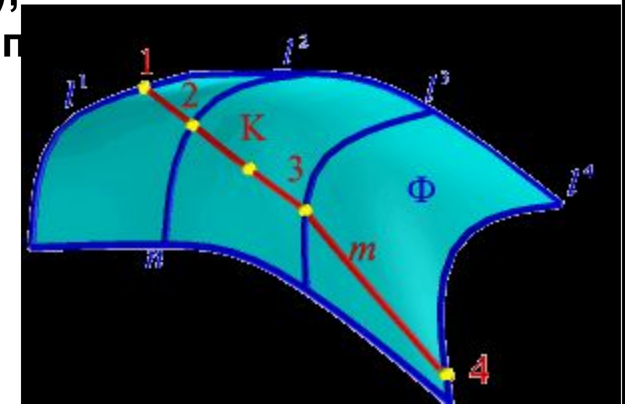
1. **Прямолинейчатые – образующая – прямая линия. Цилиндрические и конические поверхности, винтовые и др.**
2. **Криволинейчатые – образующая – кривая линия. Сфера, кольца и пр.**

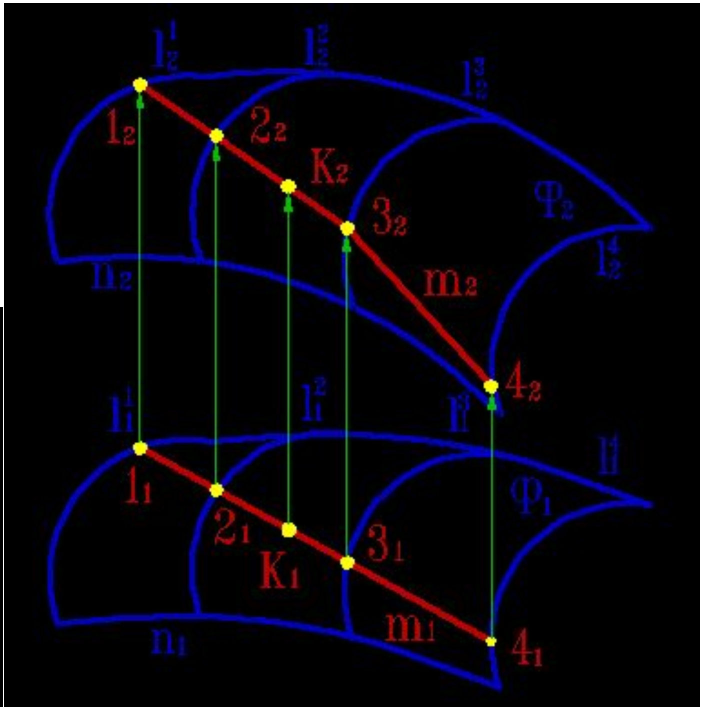
По развертыванию:

1. **Развертываемые – поверхности, которые могут быть точно развернуты в плоскость (конические, цилиндрические поверхности и поверхности с ребром возврата).**
2. **Неразвертываемые – поверхности, которые приближенно можно развернуть в плоскость (сферические поверхности, косые плоскости) и др.**

Существуют три способа задания кривых поверхностей:

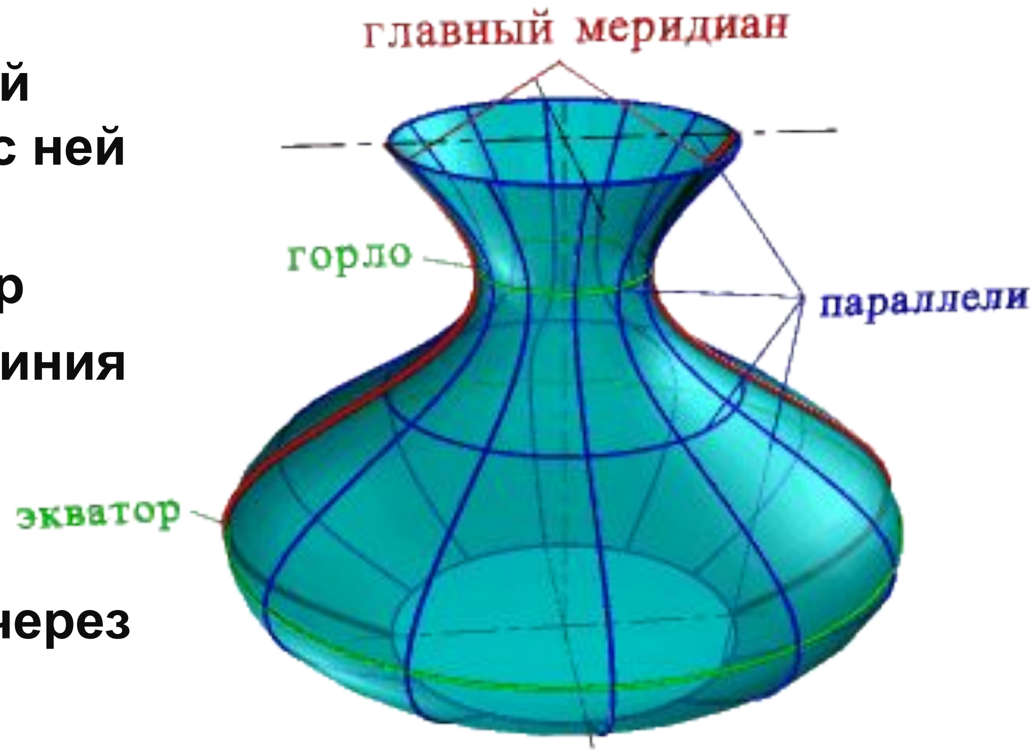
1. **Аналитический – при помощи уравнений;**
2. **Каркасный – поверхность задается сетью линий (линейчатый каркас) или множеством точек (точечный каркас);**
3. **Кинематический, т. е. п**
линий в пространстве.





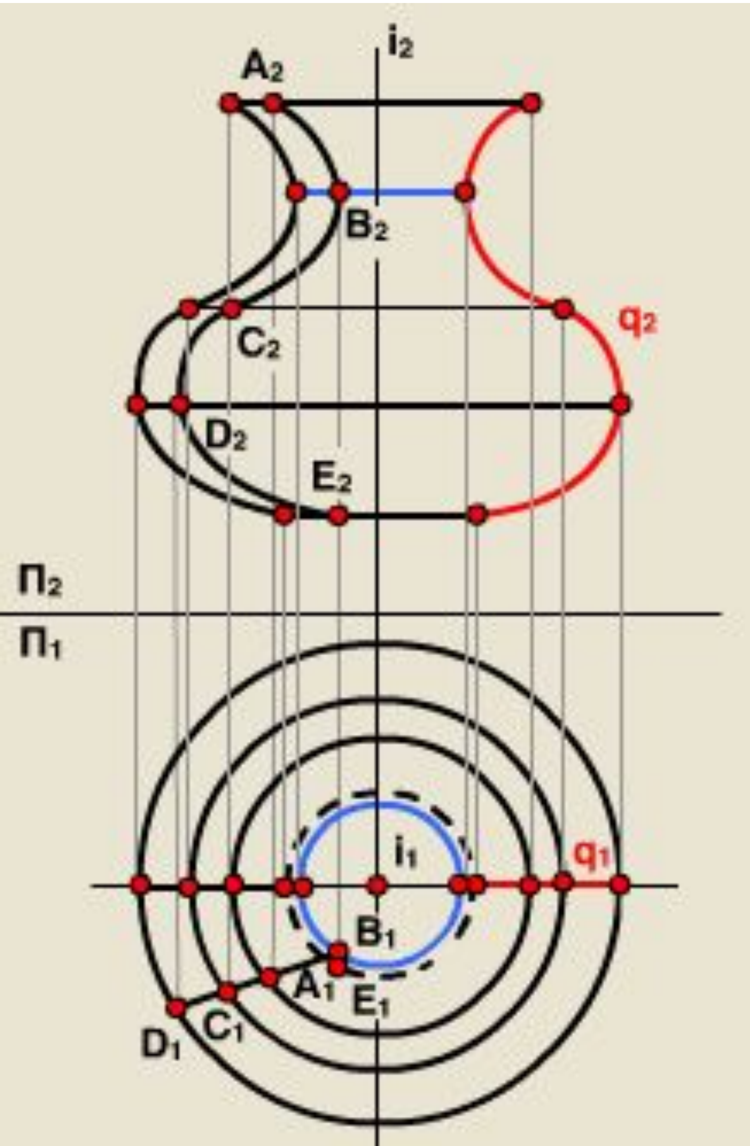
Поверхности вращения

При вращении образующей *l* каждая точка *(A, B, …)* описывает окружность *(m_A, m_B, …)* с центром *(O_A, O_B, …)* на оси вращения *i*. плоскости этих окружностей перпендикулярны к *i* и, следовательно, взаимно параллельны и называются ***параллелями поверхности***.



Параллель, диаметр которой больше диаметра смежных с ней параллелей, называется ***экватором,*** а линия диаметр которой меньше – ***горлом.*** Линия пересечения поверхности вращения плоскостью параллельной плоскости проекций П и проходящей через ось вращения называется ***главным меридианом*** поверхности.

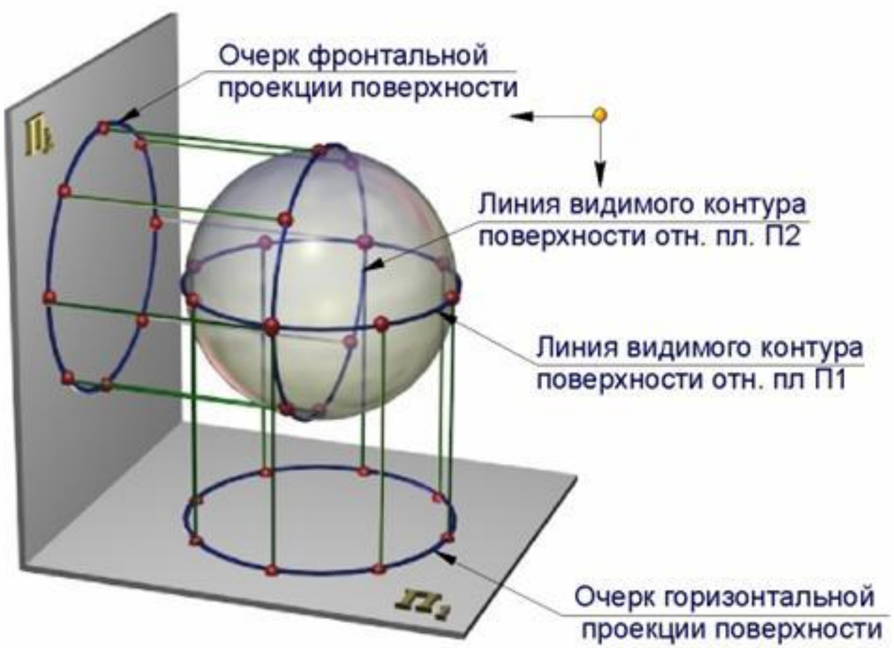
Главный меридиан **q** делит поверхность на две части: видимую и невидимую относительно той плоскости, которой параллельна плоскость главного меридиана.



При задании поверхности на ортогональном чертеже ось вращения обычно располагают перпендикулярно **ОДНОЙ** из плоскостей проекций. На рисунке ось **i** $\perp$ **П**$_1$.

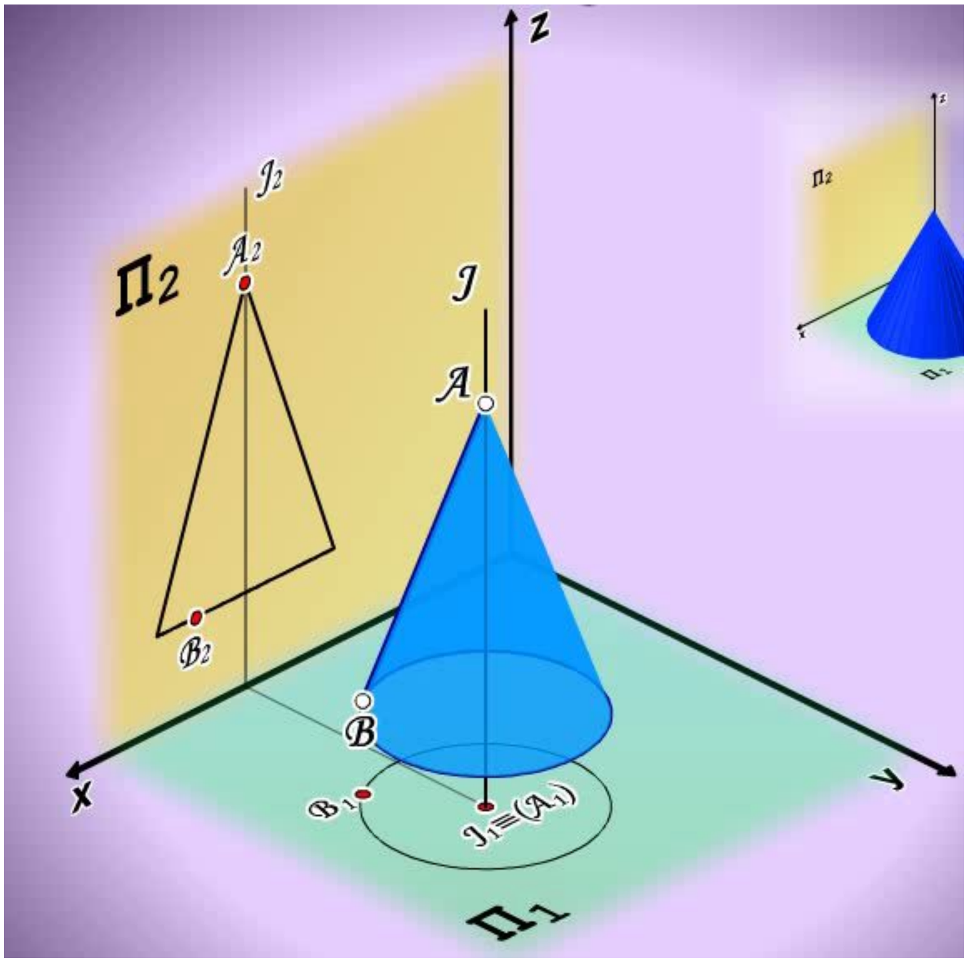
В этом случае все параллели поверхности, горло и экватор проецируются на П$_1$ в истинную величину, а на **П**$_2$ в отрезки прямых, перпендикулярные **i**$_2$ – проекции оси **i**. Задание поверхности осью **i** и образующим полумеридианом **l** ненаглядно. Поэтому на чертеже строят проекции *главного меридиана* **q**$_1$ и **q**$_2$, проводят проекции ***горла***, ***экватора*** и двух параллелей, образованных вращением верхней точки **А** и нижней – **Е**.

Линия пересечения проецирующей поверхности с плоскостью проекций П называется очерком проекции и является проекцией поверхности.



Построение конуса

Образующая – прямая АВ, пересекающая ось вращения I. Поверхность – круговой конус. Определитель: Ф (АВ $\times$ I)

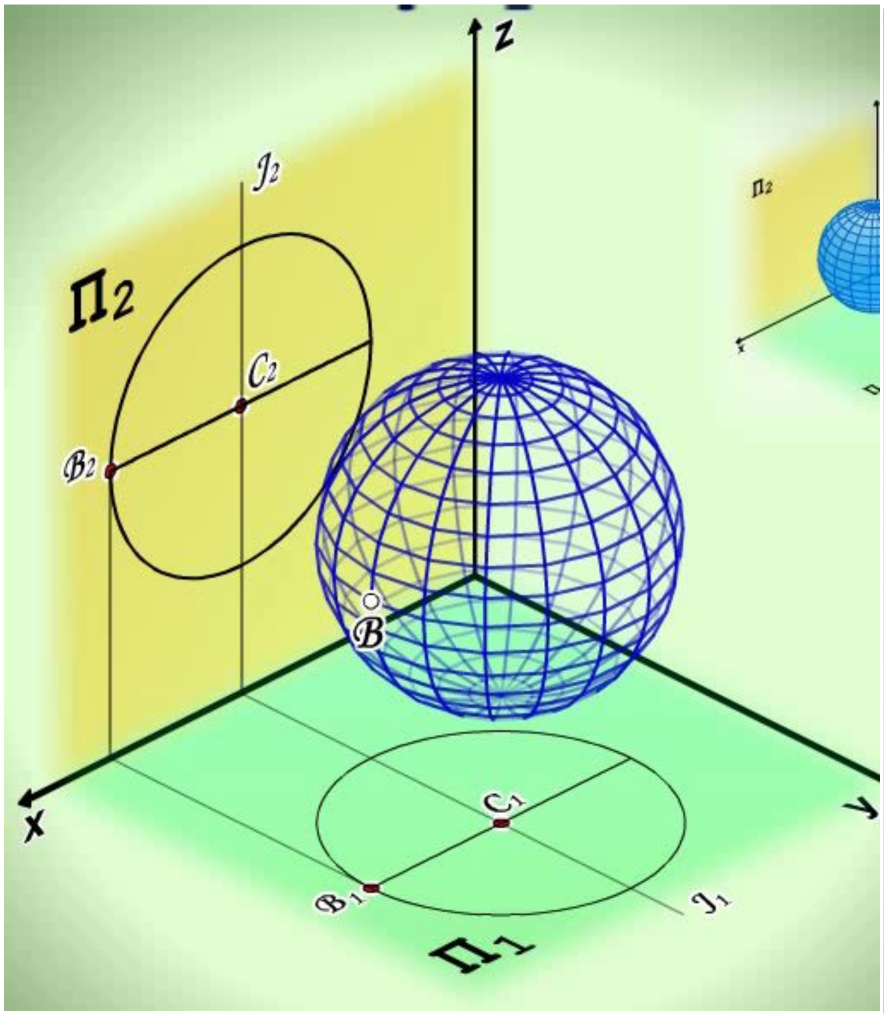


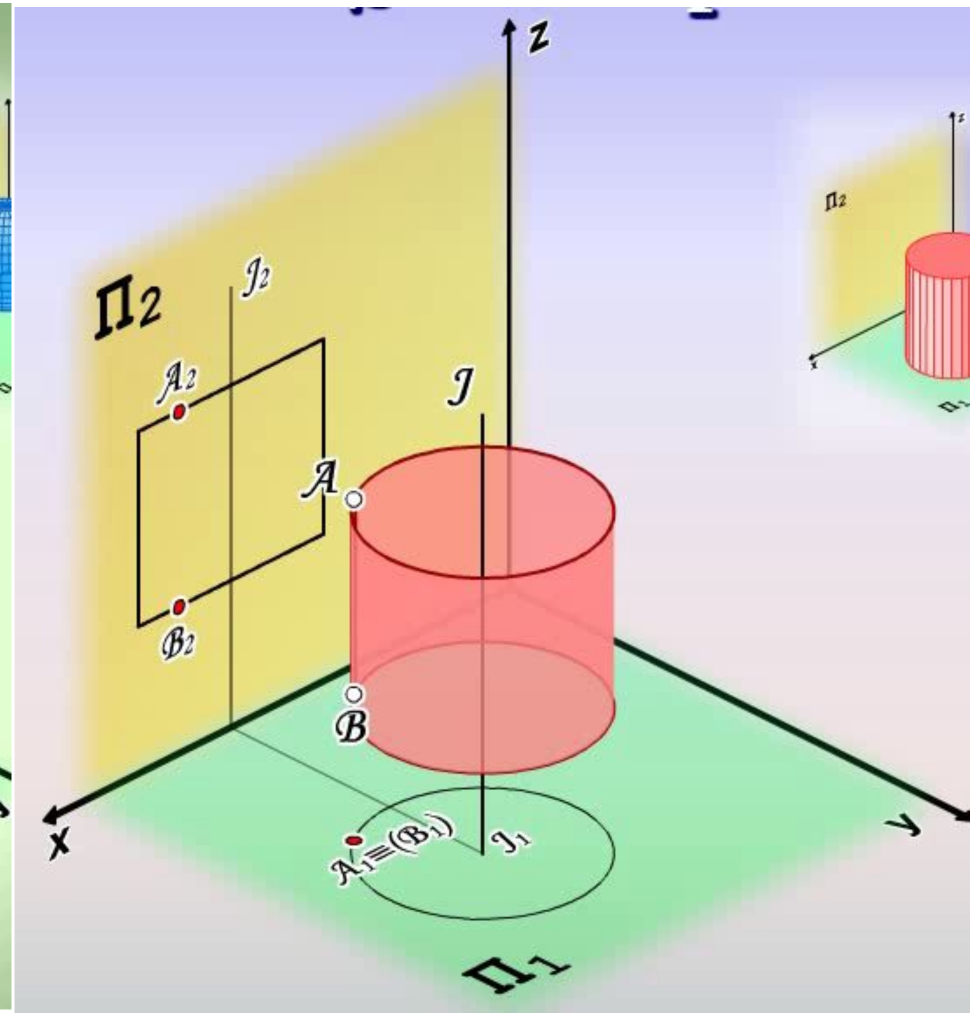
Построение сферы

Образующая – окружность, ось вращения l совпадает с ее диаметром.
Поверхность – сфера.
Определитель: Ф (ℓ × (l ∋ O)),
где O – центр окружности

Построение цилиндра

Образующая – прямая AB, параллельная оси вращения l.
Поверхность – круговой цилиндр.
Определитель: Ф (AB || l)

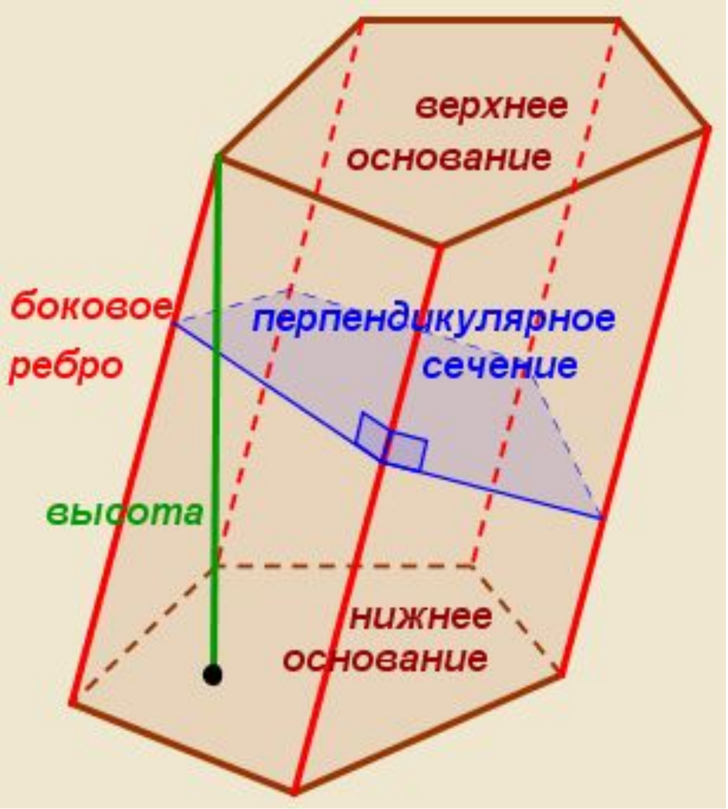




2. Многогранные поверхности

Многогранной называется поверхность, образованная частями пересекающихся плоскостей (гранями).

Многогранником называется геометрическое тело ограниченное многогранной поверхностью и состоящих из плоских многоугольников.

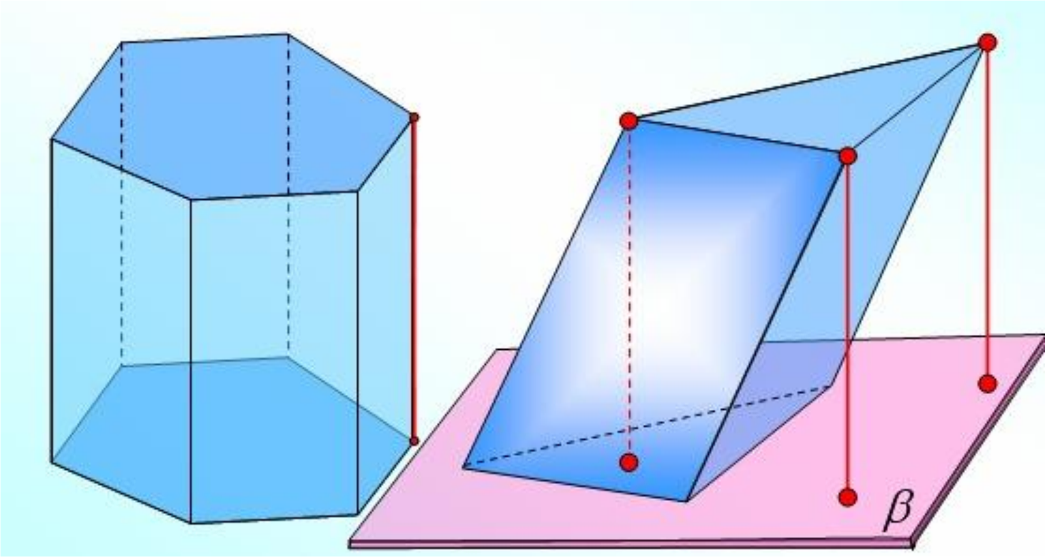


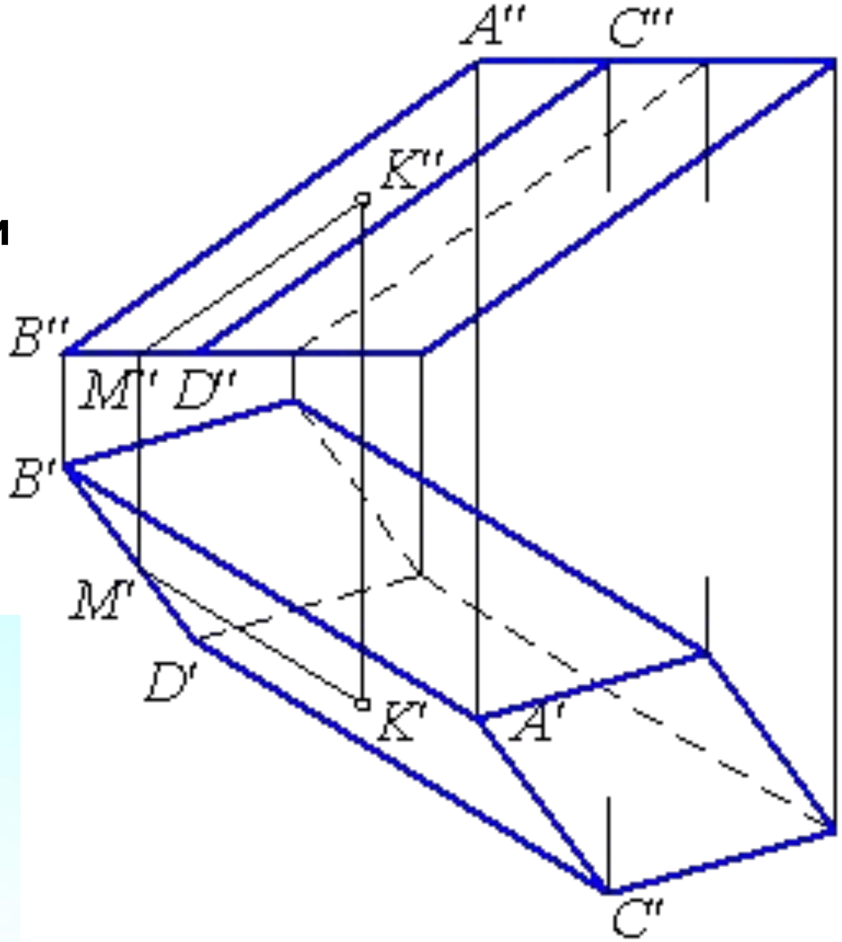
Эти многоугольники называются **гранями,** их стороны **ребрами,** а их вершины - **вершинами** многогранника.
По количеству граней, образующих боковую поверхность многогранник называют четырех, пяти, шестигранником и т. д.

Из многообразия существующих многогранников мы рассмотрим только основные:

1. ПРИЗМА

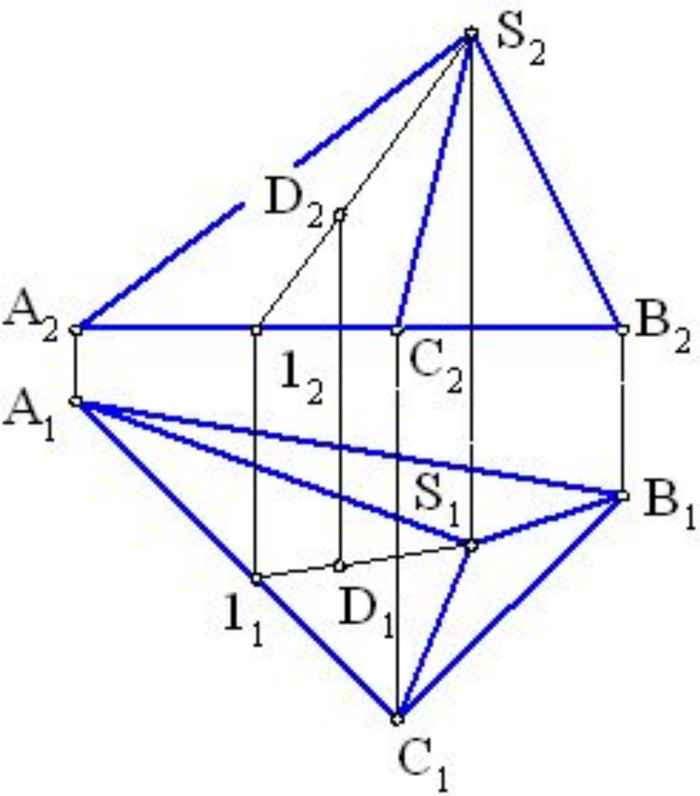
Призма — это многогранник, две грани которого являются равными многоугольниками, находящимися в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммами.
Все ребра такой поверхности взаимнопараллельны.



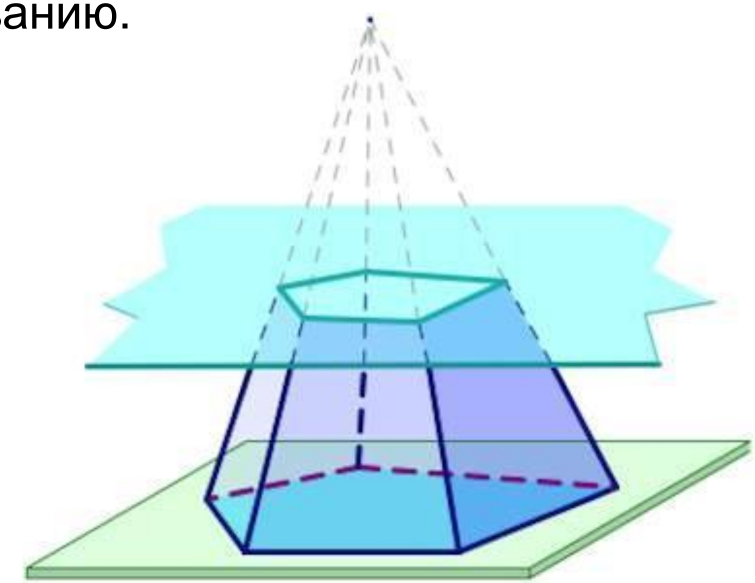


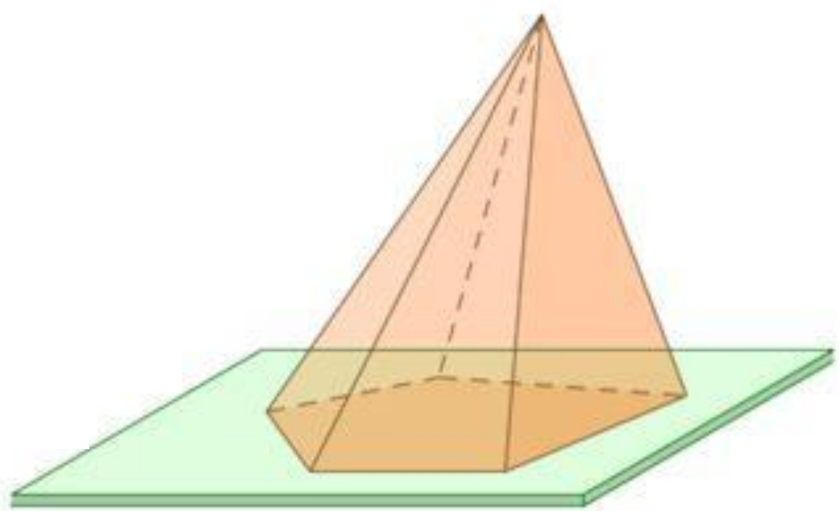
2. ПИРАМИДА

Пирамида — это многогранник, основание которого — многоугольник, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину.



Усечённой пирамидой называется многогранник, заключённый между основанием пирамиды и секущей плоскостью, параллельной её основанию.





Тетраэдр (четырехгранник) - ограничен четырьмя равносторонними и равными треугольниками.

Гексаэдр (шестигранник, или куб) - ограничен шестью равными квадратами.

Октаэдр (восьмигранник) - ограничен восемью равносторонними и равными треугольниками.

Додекаэдр (двенадцатигранник) - ограничен двенадцатью равносторонними и равными пятиугольниками.

Икосаэдр (двадцатигранник) - ограничен двадцатью равносторонними и равными треугольниками.

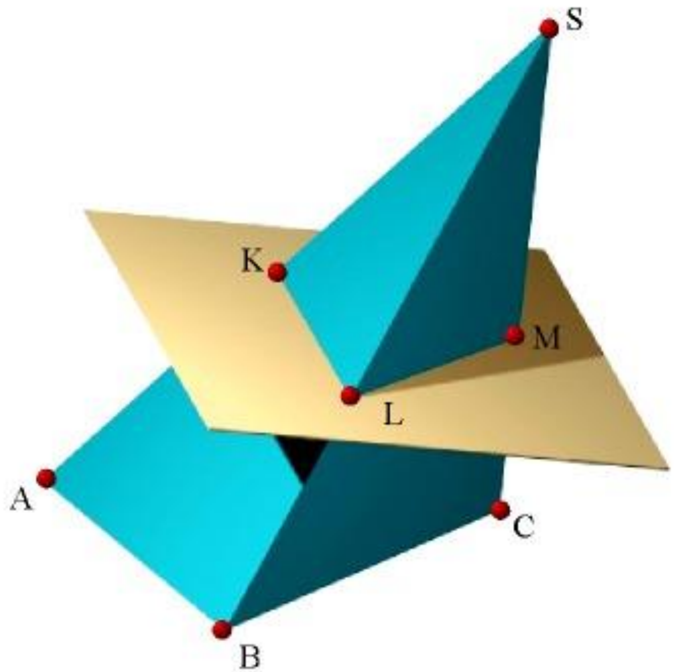
2. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПЛОСКОСТЬЮ (I ПОЗИЦИОННАЯ ЗАДАЧА)

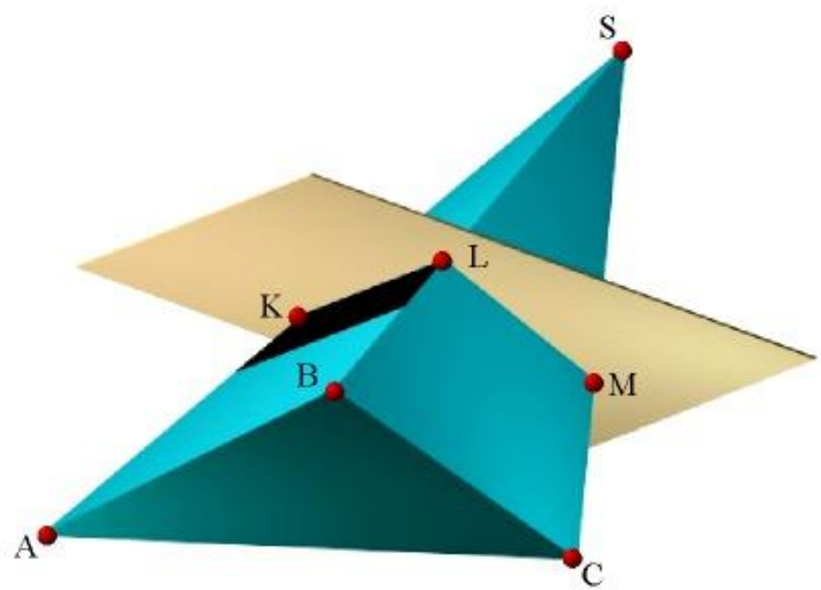
Линия пересечения многогранника с плоскостью может быть определена двумя способами:

1)построением линий пересечения граней многогранника с плоскостью (I позиционная задача);

2)построением точек пересечения ребер многогранника с плоскостью (II позиционная задача).

Второй способ построения линии пересечения многогранника с плоскостью является предпочтительным.



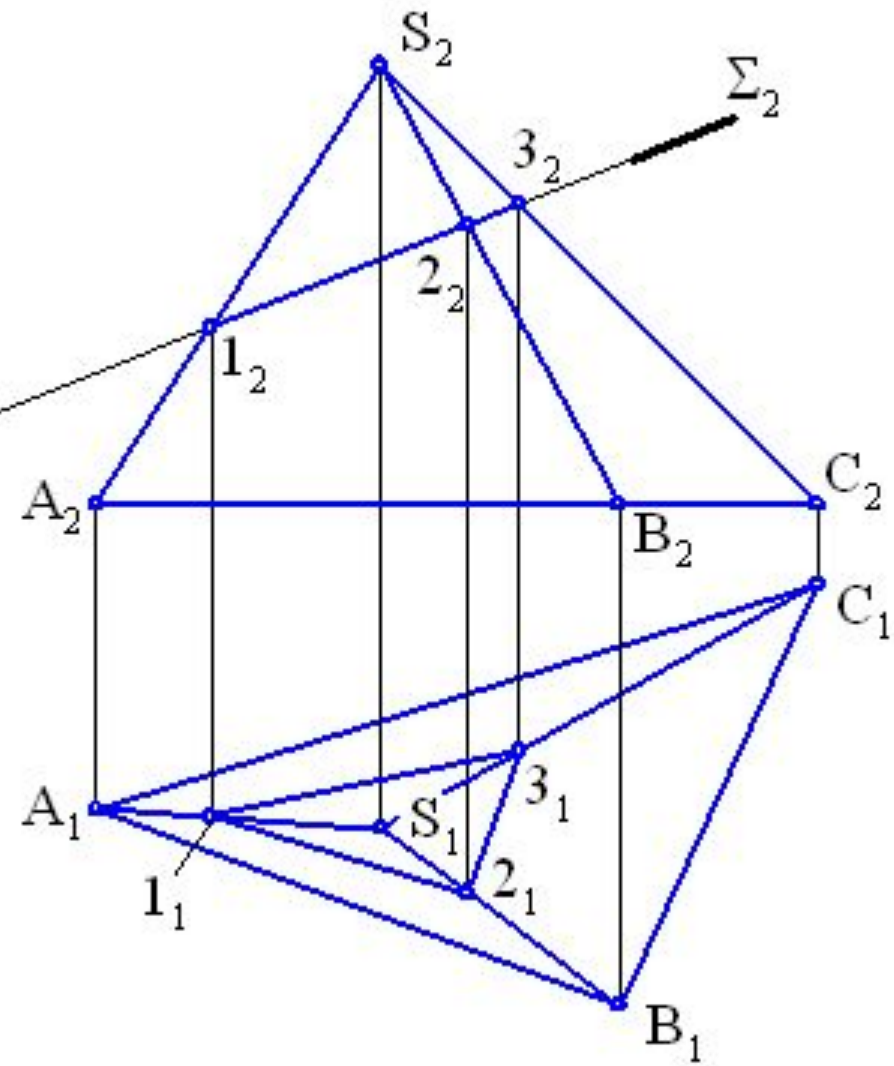


Построение сечения пирамиды плоскостью ∑

Секущая плоскость является фронтально - проецирующей, следовательно, все линии, лежащие в этой плоскости, совпадут с фронтальным следом $\sum_2$ плоскости ∑:

1. Фронтальная проекция 1_2, 2_2, 3_2 сечения определится при пересечении фронтальных проекций ребер пирамиды со следом ∑ ($\sum_2$).

2. Горизонтальные проекции точек 1(1_1), 2(2_1) и 3(3_1) находим из условия принадлежности точек ребрам пирамиды.

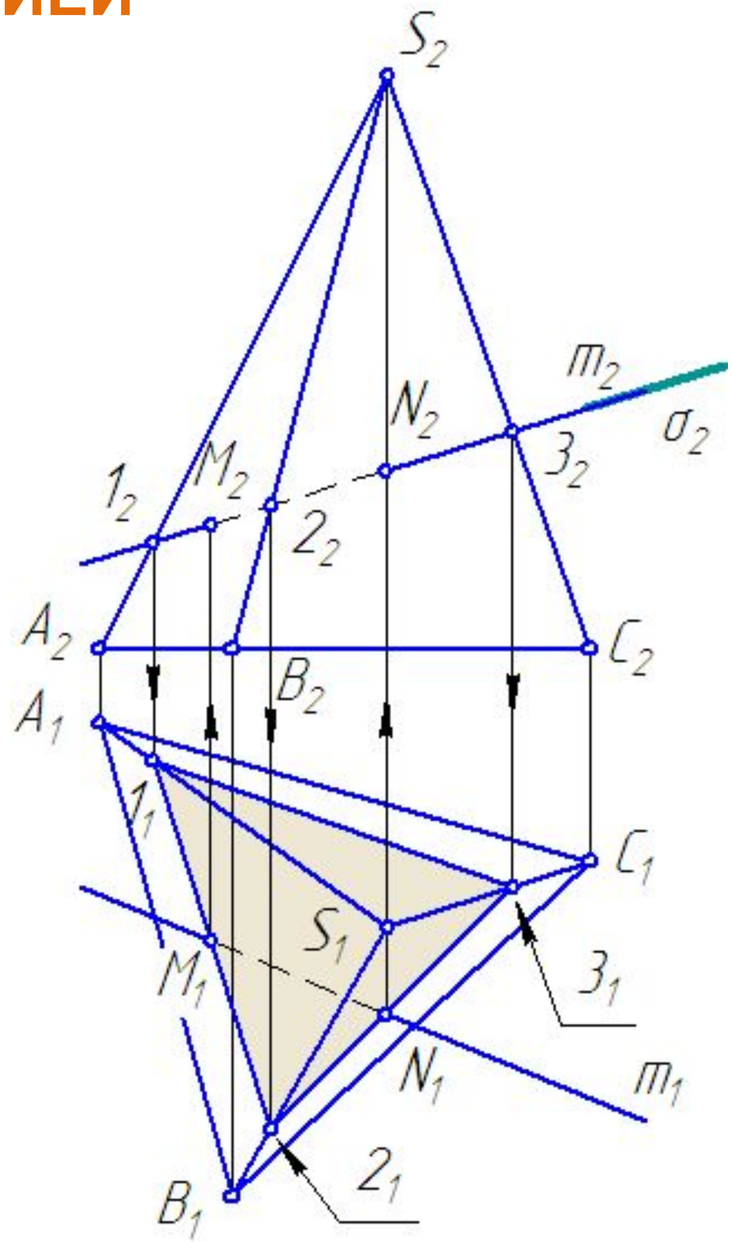


3. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПРЯМОЙ ЛИНИЕЙ

Построение точек пересечения прямой m с поверхностью пирамиды SABC:

1. Вводим через прямую вспомогательную секущую плоскость $\sigma \in m$ и $\sigma \perp \pi_2$.
2. Строим сечение Δ (123) поверхности пирамиды с плоскостью σ.
3. Решение задачи сводится к нахождению линии пересечения плоскостей общего положения (боковые грани пирамиды) и плоскости частного положения (плоскость σ).

- В сечении находим точки *M* и *N* принадлежащие прямой *m*.
- Определяем видимость прямой *m*.



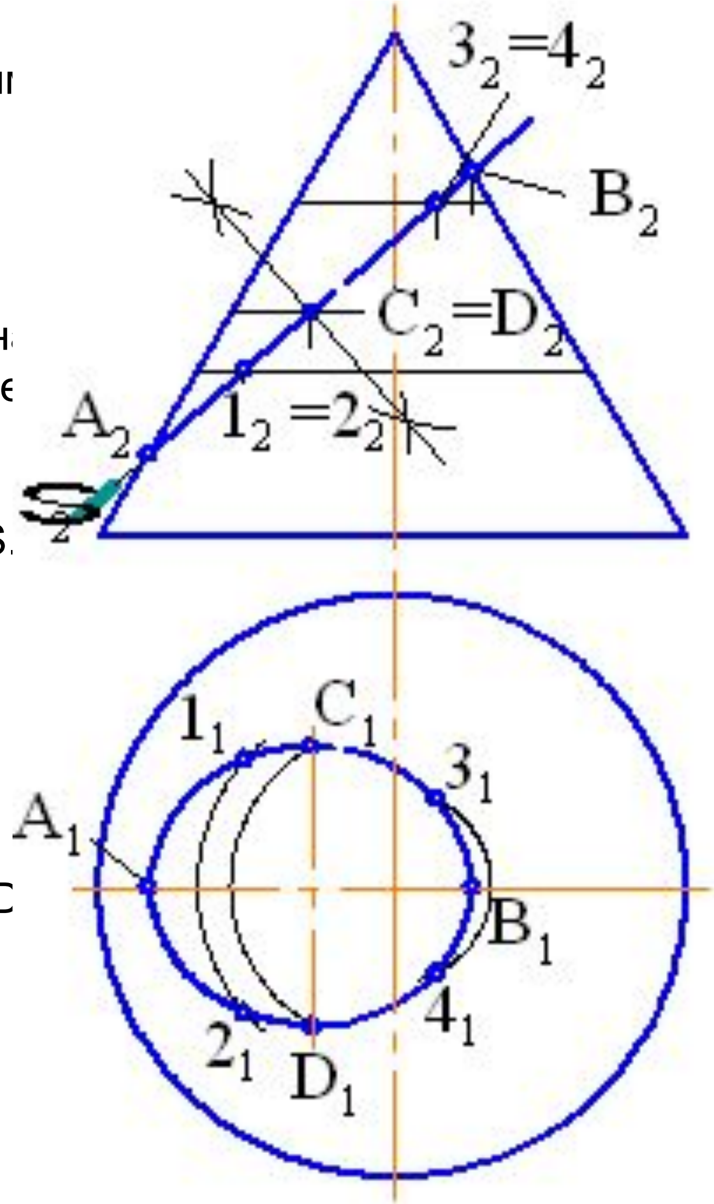
4. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ С ПЛОСКОСТЬЮ

Определение проекций линий сечения:

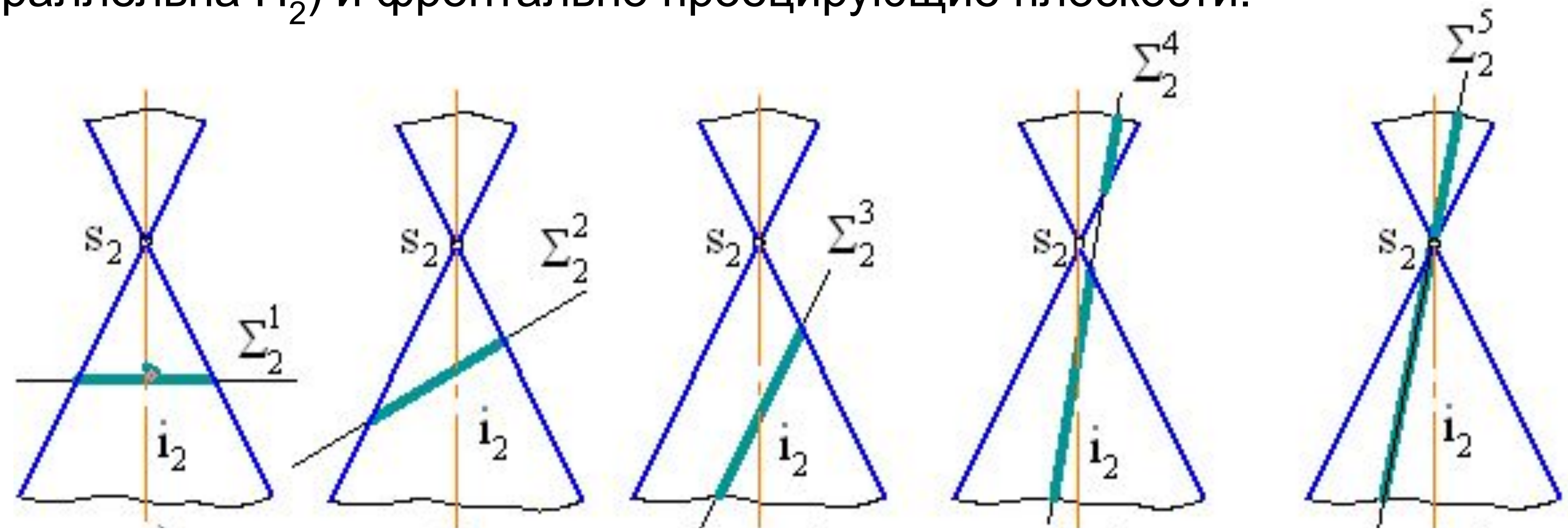
1. Построить опорные (характерных) точки сечения. К ни[м] относятся точки, расположенные на очерковых образующих поверхности и точки, удаленные на экстремальные расстояния от плоскостей проекций.
2. Определяем промежуточные точки сечения. Если плоскость занимает проецирующее положение, то одн[а] из проекций сечения находится на следе плоскости, т.е. известна.

- Построить проекции сечения конической поверхности вращения с фронтально-проецирующей плоскостью S.

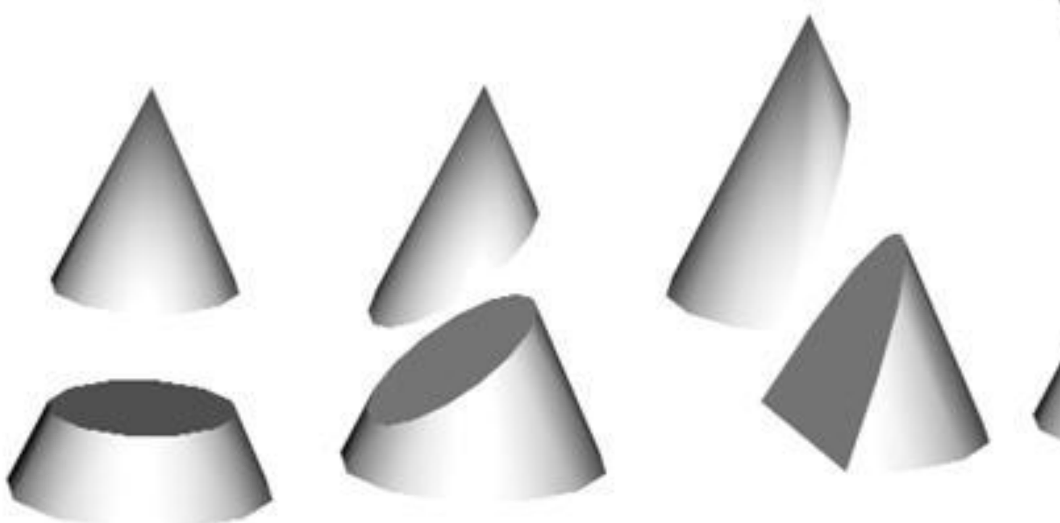
1. Заданная плоскость S пересекает исходную поверхность по эллипсу, фронтальная проекция которого расположена на следе этой плоскости. Горизонтальную проекцию сечения строим по точкам.
2. Проекцию эллипса на плоскости $П_1$ можно построить также по его большой A_1B_1 и малой C_1D_1 осям. Фронтальная проекция малой оси эллипса (точки C_2=D[$_2$]) находится на середине отрезка A_2B_2.

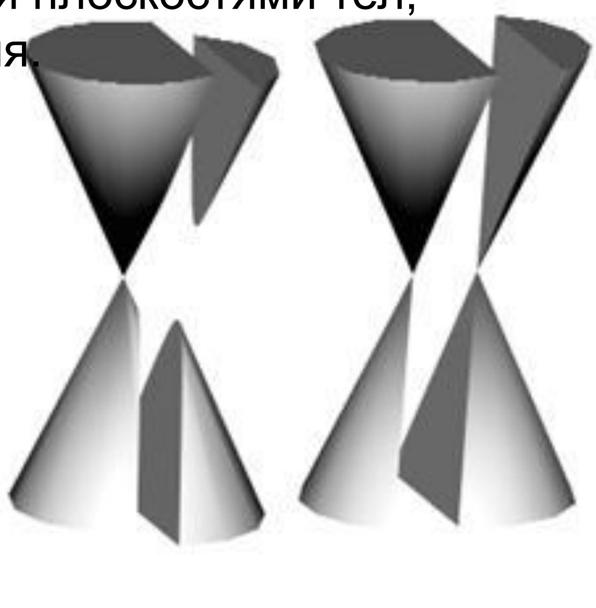


В зависимости от направления секущей плоскости в сечении конической поверхности вращения могут получиться различные линии - конические сечения. На фронтальной проекции конической поверхности вращения (ось i параллельна $П_2$) и фронтально проецирующие плоскости.



Наглядные изображения результатов пересечения плоскостями тел, ограниченных конической поверхностью вращения.

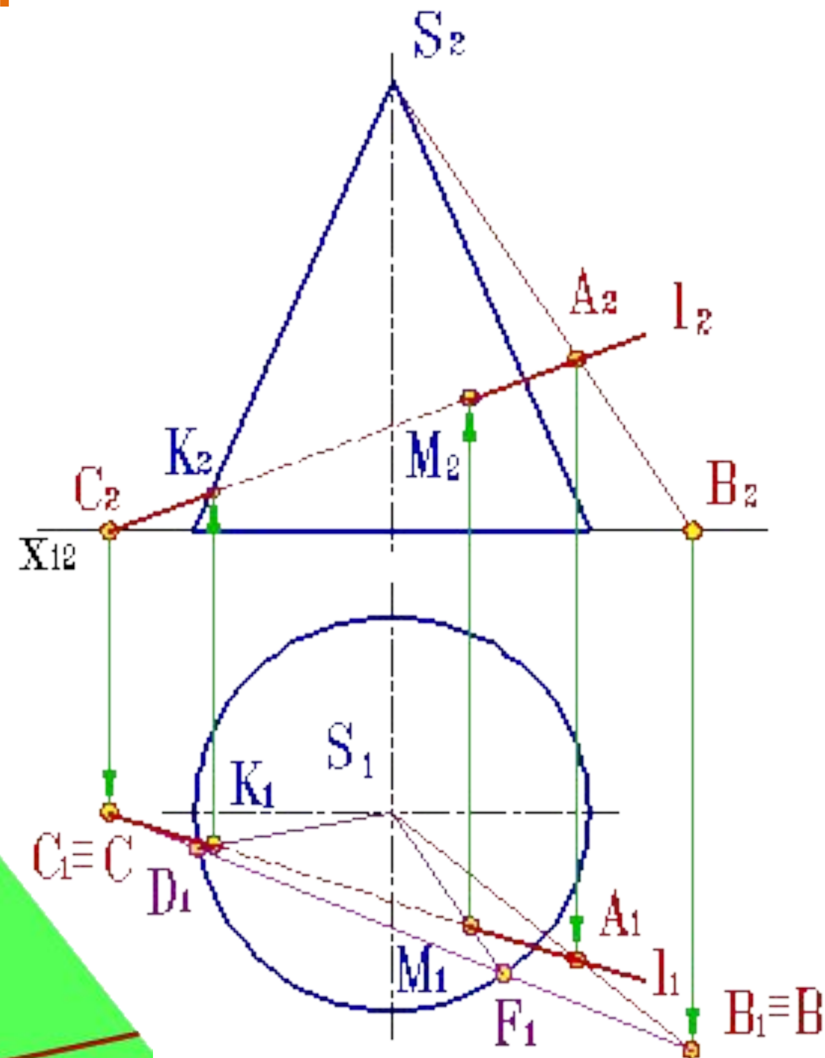


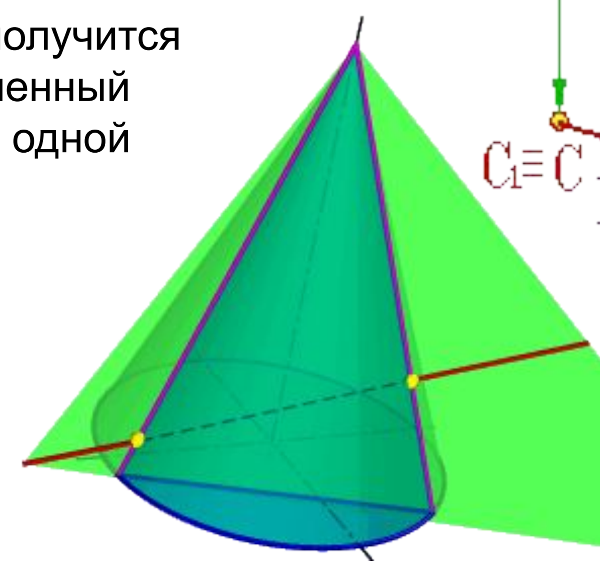


5. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ С ПРЯМОЙ

Необходимо определить точки пересечения прямой линии с поверхностью конуса вращения и видимость прямой по отношению к конусу методом вспомогательных секущих плоскостей:

1. В качестве вспомогательной секущей плоскости целесообразно выбрать такую плоскость, которая бы включала прямую ***l*** и пересекала конус по образующим
2. Такая плоскость определяется прямой ***l*** и точкой ***S***- вершиной конуса. Линия пересечения вспомогательной секущей плоскости и горизонтальной плоскости проекций ***BC*** пересекает основание конуса в точках ***D*** и ***F***.
3. В сечении конуса плоскостью получится треугольник ***DFS***. Так как полученный треугольник и прямая ***l*** лежат в одной плоскости, точки их пересечения ***K*** и ***M*** точки пересечения прямой с конусом.





6. МЕТОД ПОСРЕДНИКОВ

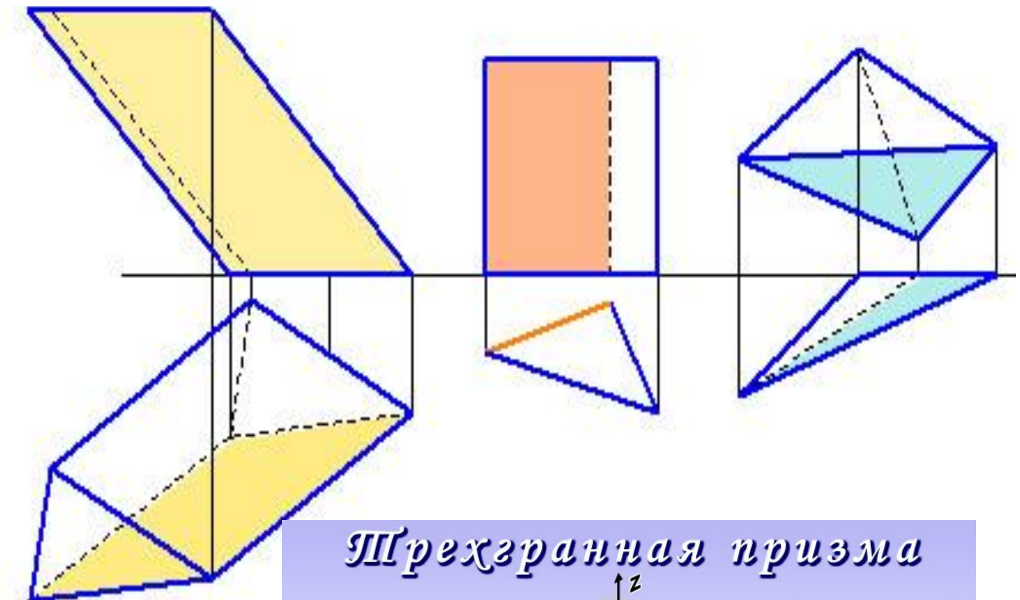
Прежде чем выбрать вспомогательную поверхность, надо рассмотреть заданные поверхности и выявить на каждой из них каркасы графически простых линий (прямых, окружностей) и их положение относительно плоскостей проекций. Вспомогательные поверхности выбирают так, чтобы они пересекали заданные поверхности по ***простым линиям (ломанным или окружностям)***, проекции которых нетрудно построить. В качестве вспомогательных могут быть взяты плоскости частного и общего положения, сферы, реже применяются цилиндрические и конические поверхности.

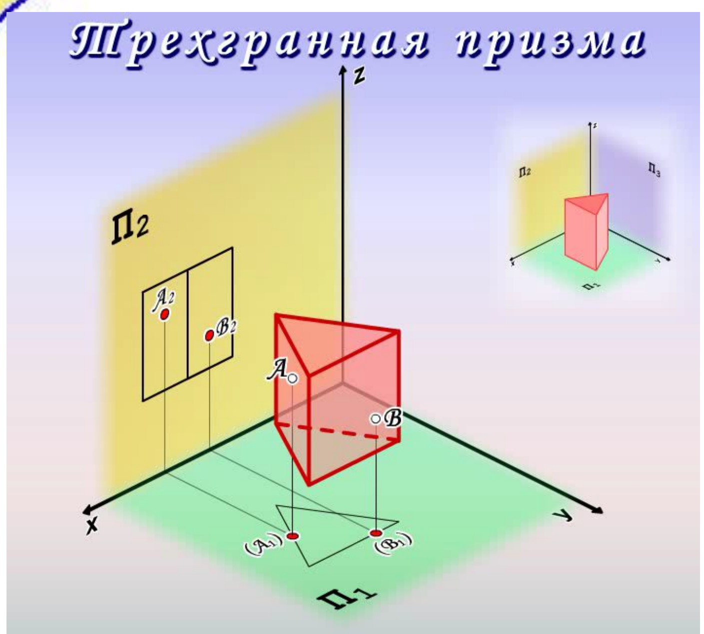
В зависимости от вида вспомогательных поверхностей существует несколько методов, из которых наибольшее применение получили метод ***секущих плоскостей*** и ***метод сфер***.

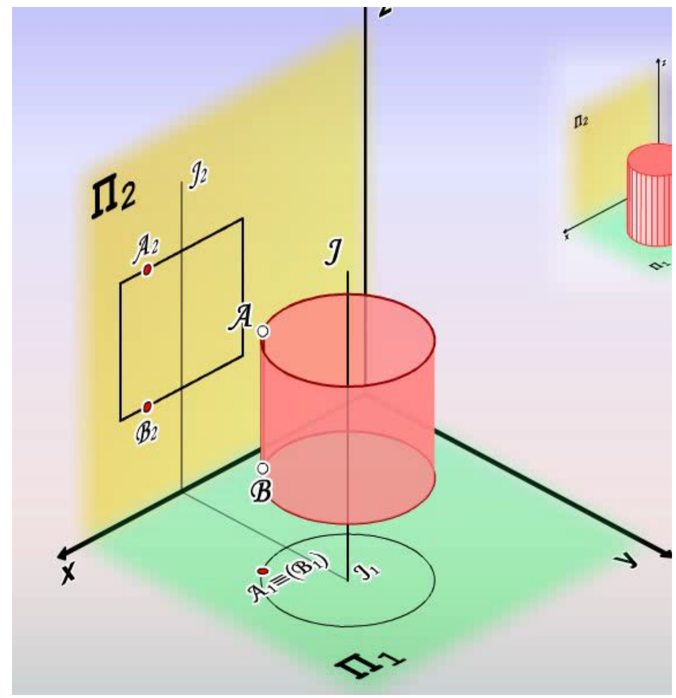
При построении линии пересечения особое внимание следует уделять опорным (характерным) точкам, расположенным на главных меридианах, экваторе, горле, ребрах, линиях обрыва исходных поверхностей, а также в секущей плоскости симметрии.

Построение линии пересечения поверхностей

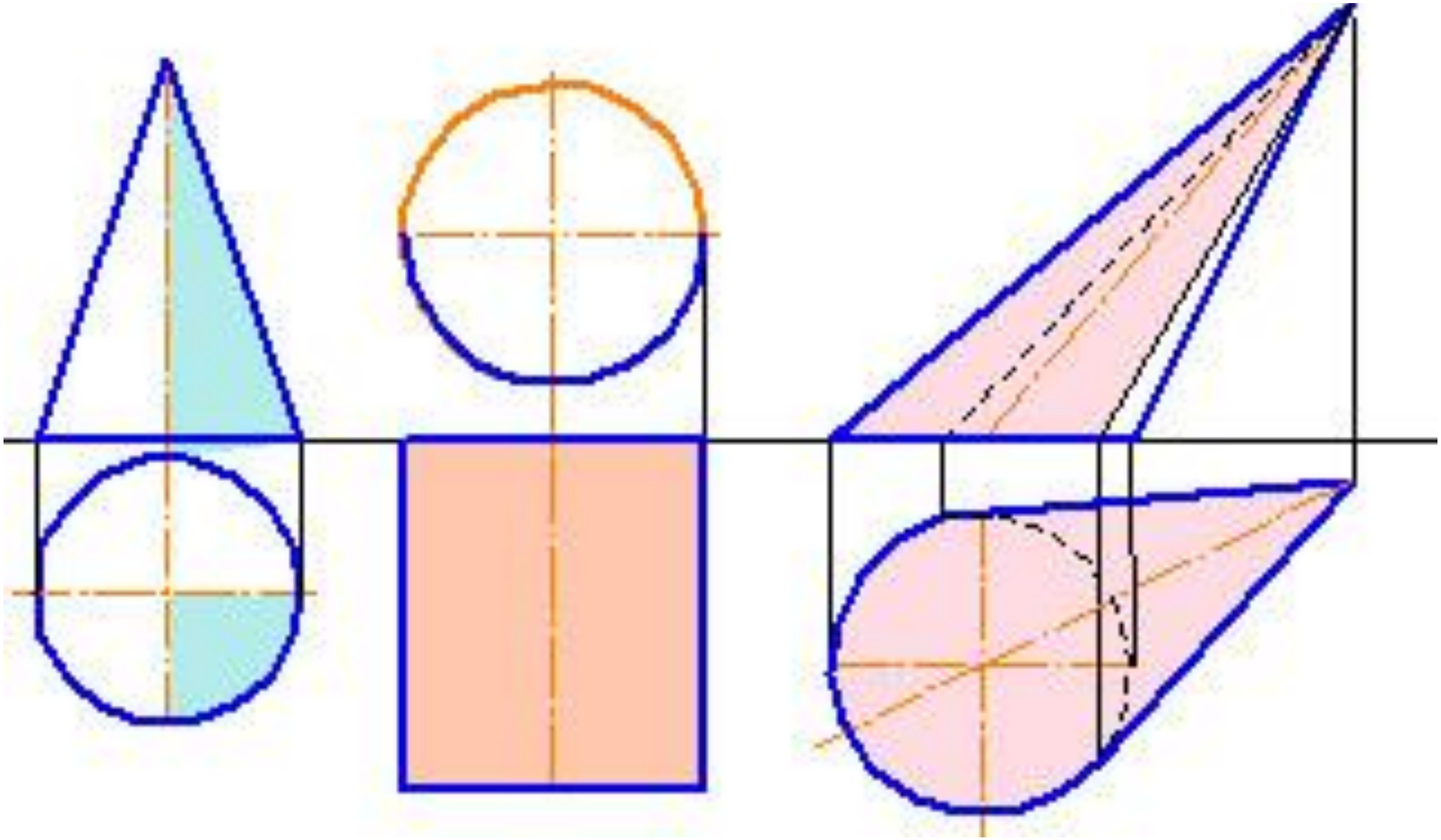
Поверхности призмы и цилиндра могут занимать проецирующее положение. Определить это можно проанализировав проекции на чертеже.

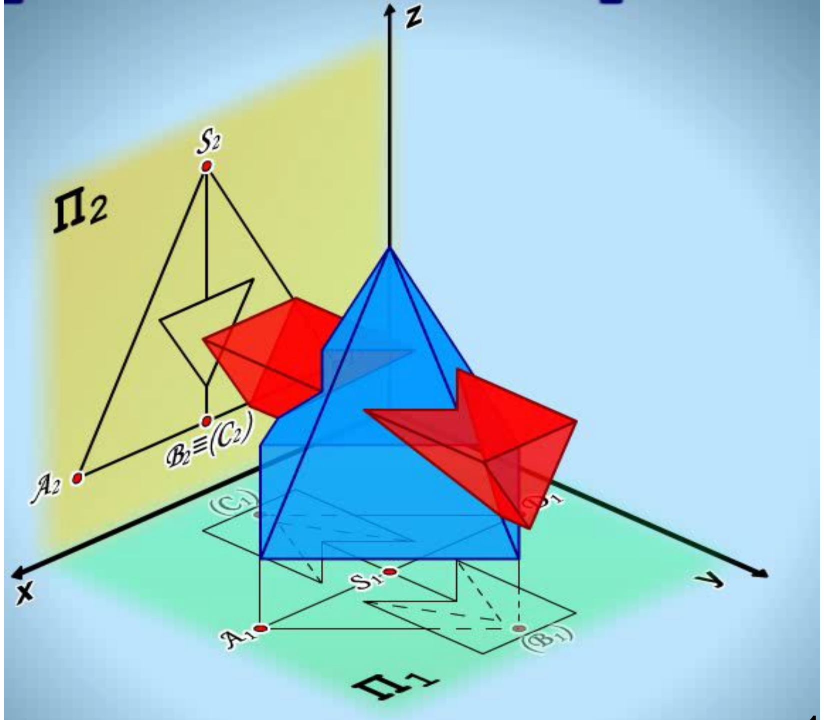


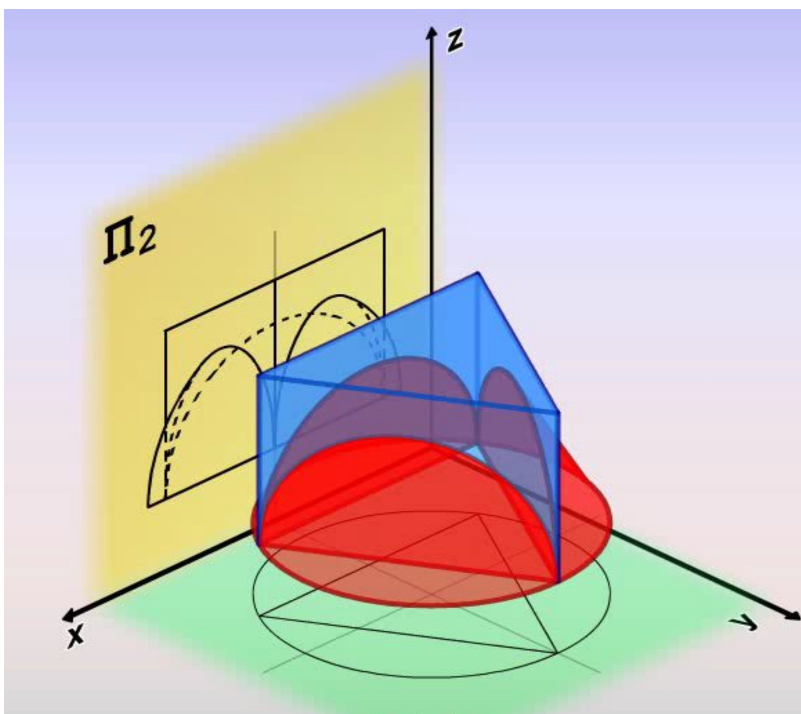




Поверхность пирамиды не может быть проецирующей.





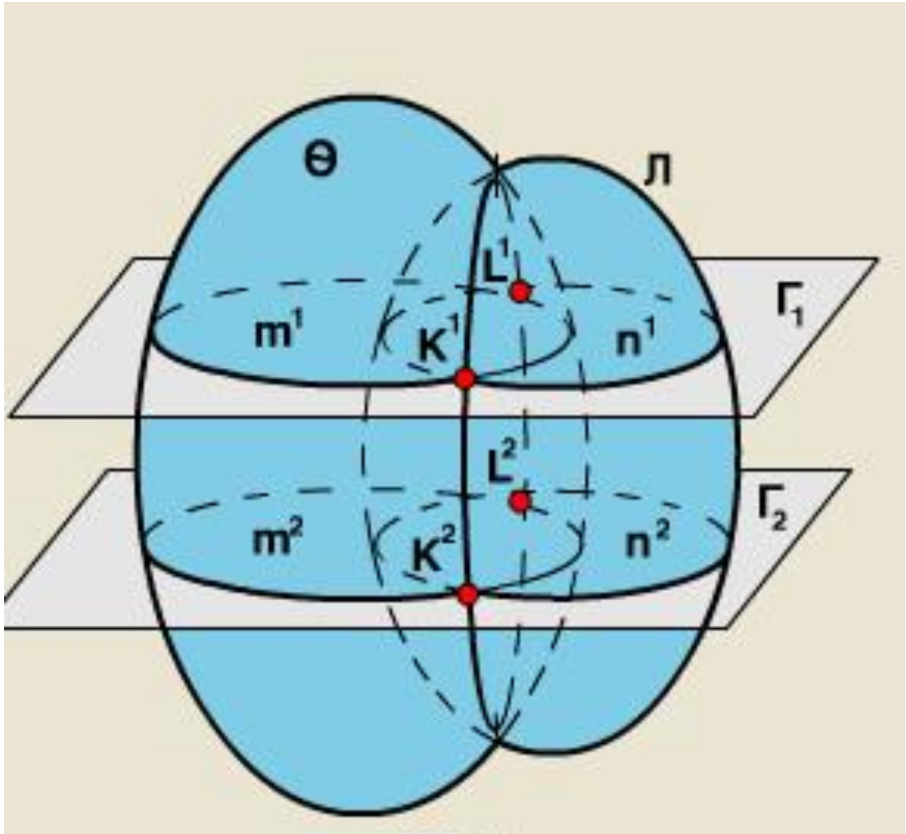


Линия пересечения - это линия, которая принадлежит каждой из поверхностей.
Проекции линии пересечения всегда располагаются в области, где накладывается проекция одной поверхности на проекцию другой поверхности.

Это всегда замкнутая линия, она может распадаться на две замкнутые линии.
Порядок построения линии пересечения:
1. Назвать поверхности участвующие в пересечении;
2. Анализируем ,если одна из поверхностей призма или цилиндр, не занимают ли они проецирующее положение.
3. Определяем на чертеже область, где будут находиться проекции линии пересечения поверхностей;
4. Выбираем метод построения линии пересечения поверхностей.

Метод вспомогательных секущих плоскостей

Задачу построения линии пересечения поверхностей решают путем введения вспомогательных поверхностей посредников.

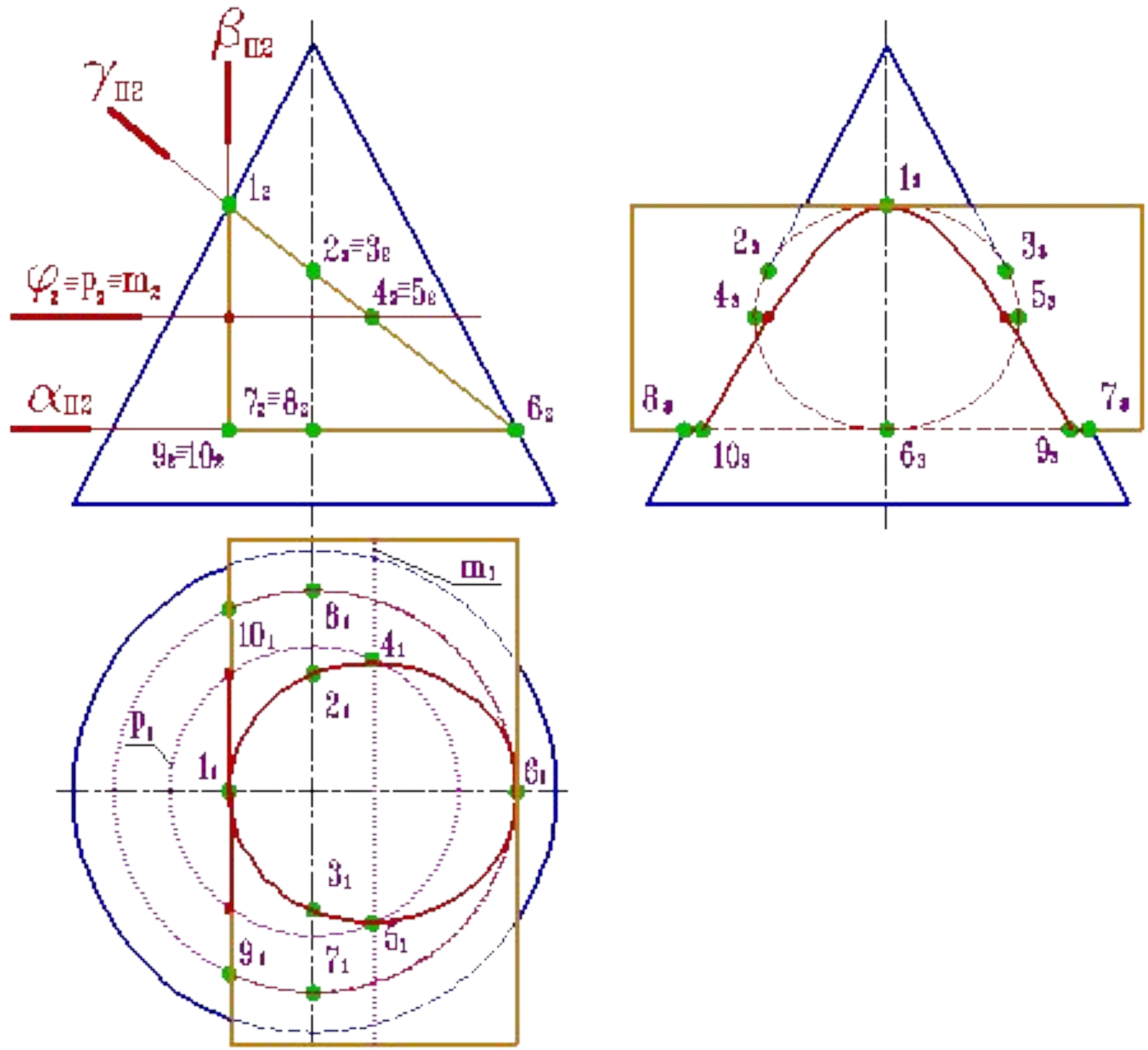


Алгоритм:

1. Выбрать вспомогательную плоскость **Г** таким образом, чтобы она пересекала заданные поверхности **Θ** и **Л** по линиям простым для построения (ломанным или окружнастям);
2. Найти линии пересечения вспомогательной плоскости **Г^1** с заданными **Θ** и **Л**, **Г ∩ Θ = m^1**, **Г^1∩ Л = n^1**;
3. Определить точки пересечения полученных линий, **m^1 и n^1 = K^1, L^1**;
4. Выбрать вторую вспомогательную плоскость **Г^2**;
5. Найти линии пересечения **Г^2** с **Θ** и **Л; Г^2∩Θ=m$_2$; Г^2∩ Л=n$_2$**
6. Отметить точки пересечения **m^2** и **n^2, m^2 n^2 = K^2, L^2**.

7. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДВУХ ВИДОВ

Линия пересечения многогранной и кривой поверхностей является совокупностью нескольких плоских кривых, каждая из которых - результат пересечения кривой поверхности с одной из граней многогранника.

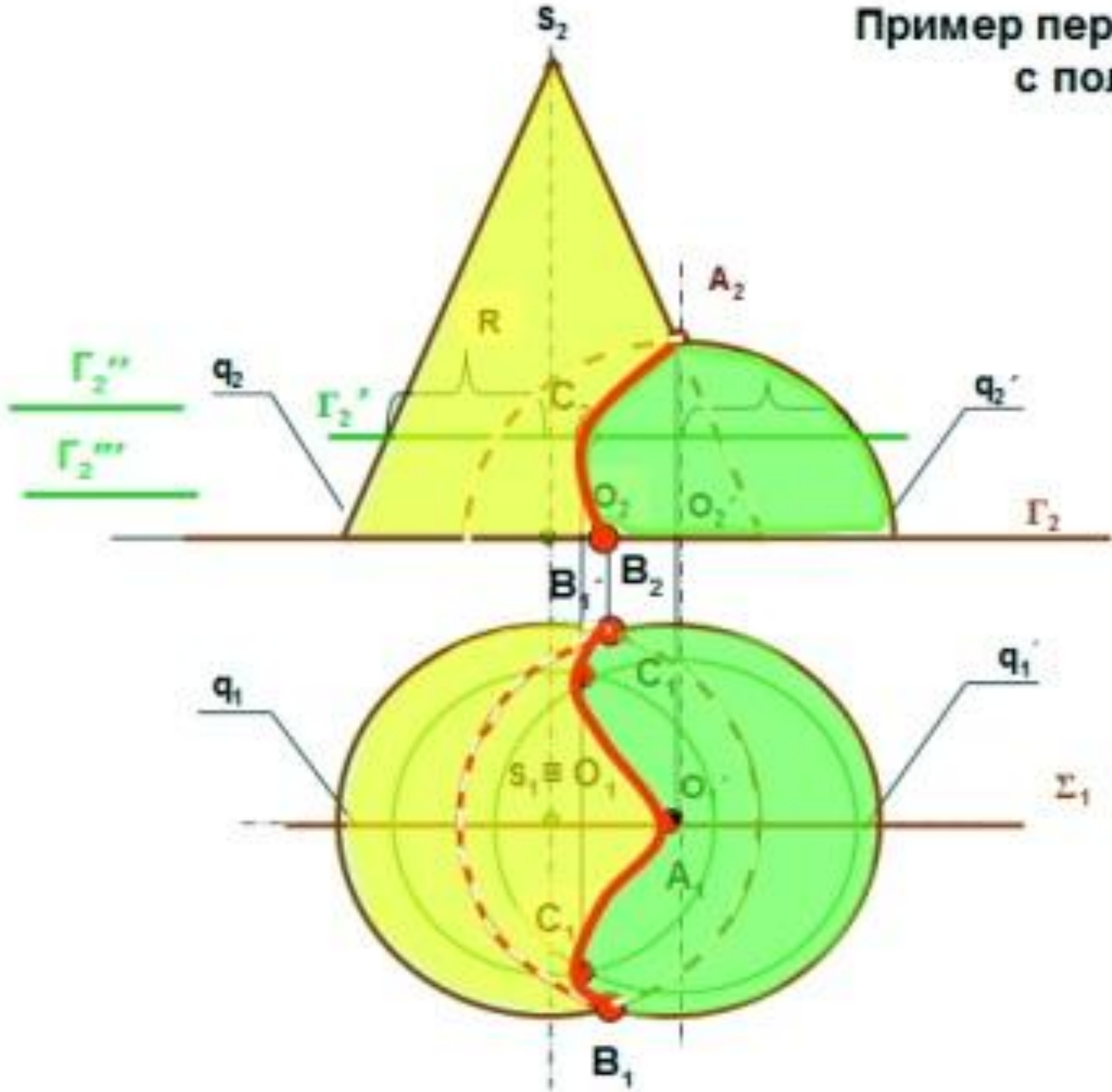


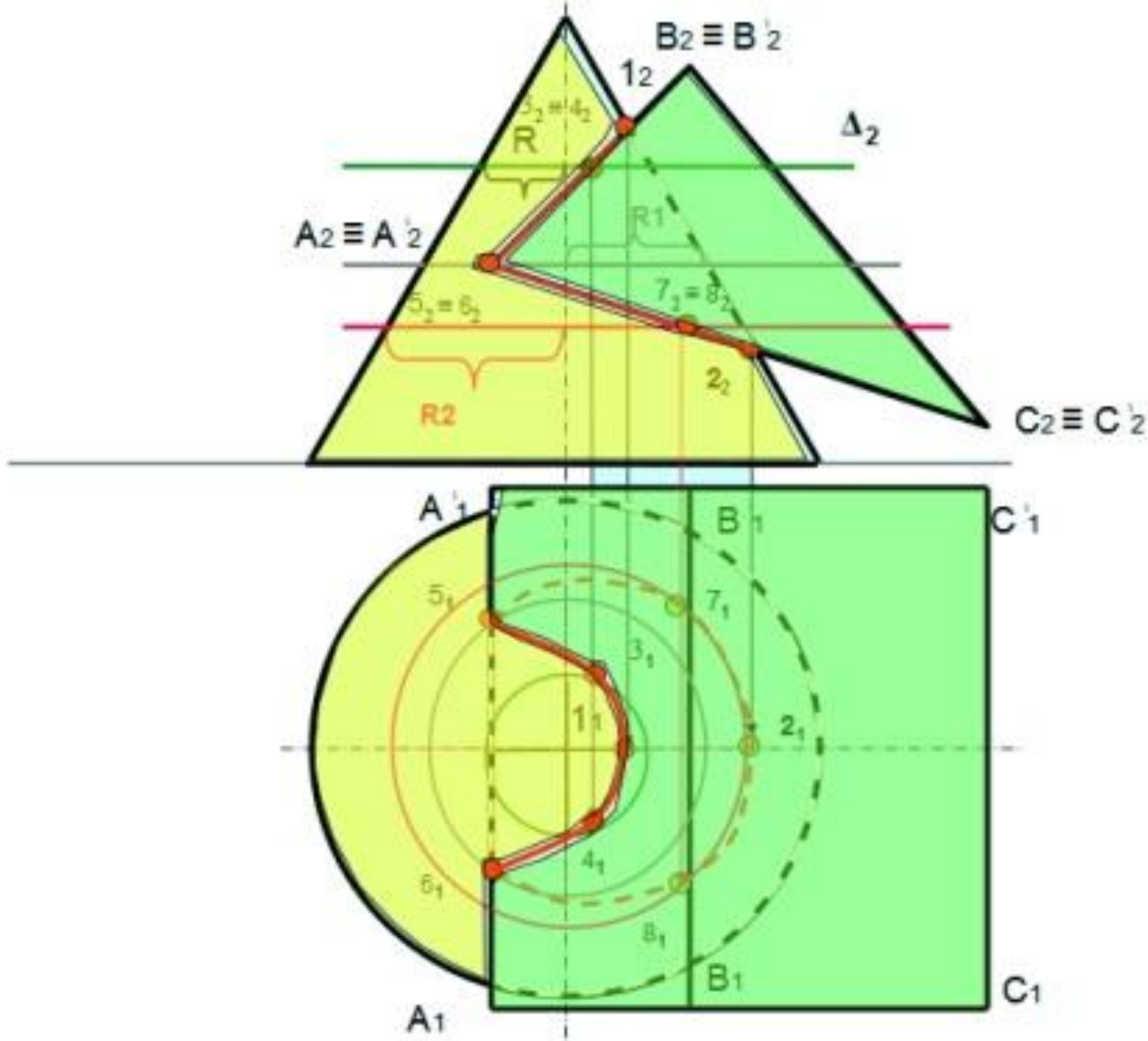
В этом случае призму можно рассматривать, как три плоскости ***α, β, γ,*** проходящие через ее грани, а задача сводится к нахождению линий пересечения этих плоскостей с конусом. При этом в соответствии с характерными сечениями конуса известно, что плоскость ***α*** пересекает конус по окружности параллельной Π_1, ***β -*** по гиперболе параллельной Π_3, а ***γ*** - по эллипсу.

На плоскость Π_2 линии пересечения от всех плоскостей проецируются в прямые, совпадающие со следами плоскостей ***α, β,*** и ***γ***.

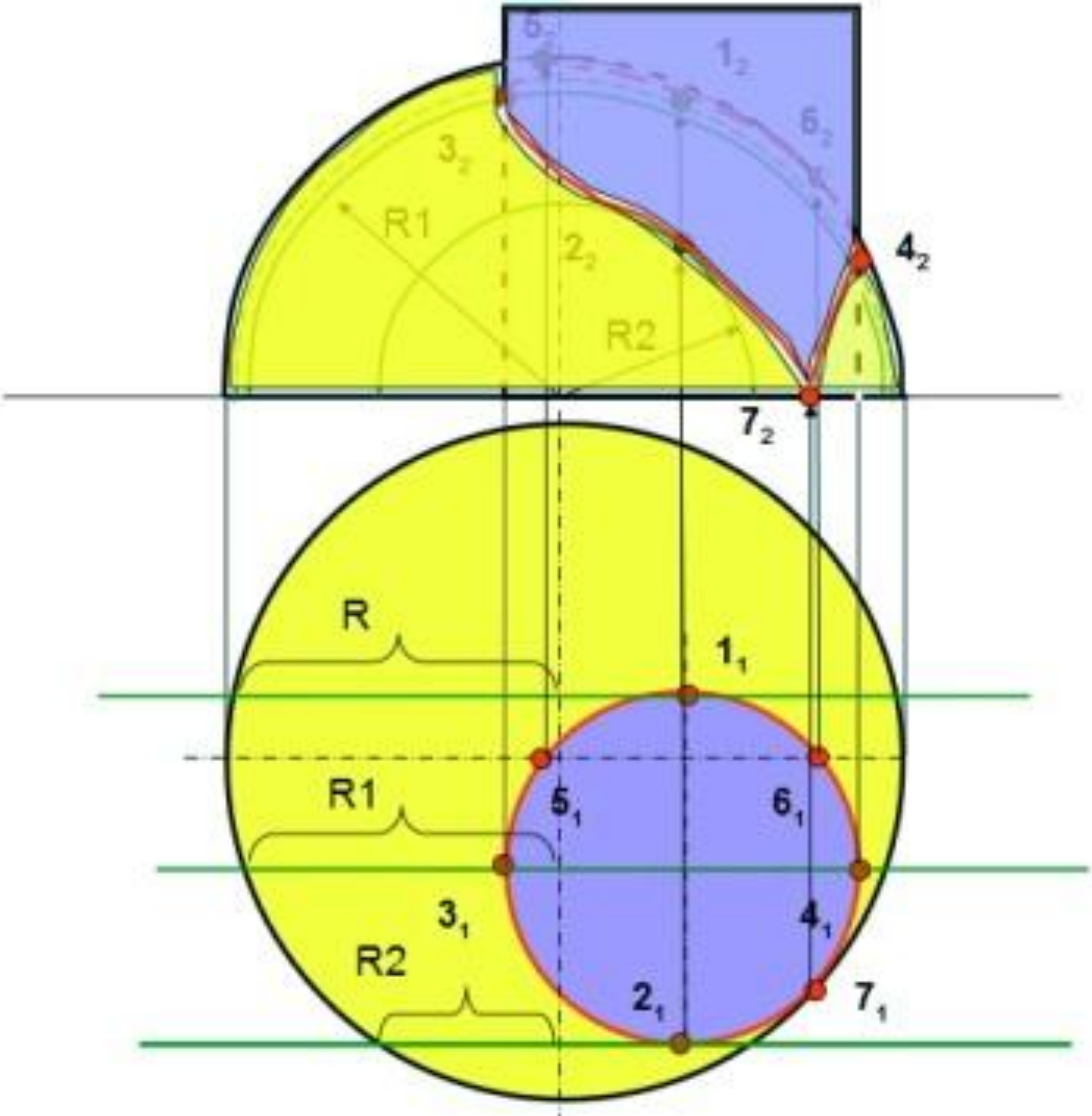
1. Для построения проекций этих линий на плоскости Π_1 **и** Π_3 отметим характерные точки, на уже имеющейся фронтальной проекции линий пересечения: точки **1** и **6** – пересечения плоскости ***γ*** с очерком проекции конуса на плоскость Π_2 (главным меридианом), эти точки определяют положение большой оси эллипса, кроме того точка 1_2 – проекция точки вершины гиперболы и одновременно принадлежит конусу (лежит на очерке фронтальной проекции конуса) и ребру призмы (линии пересечения плоскостей ***α*** и ***β***), а точка 6_2- проекция точки, одновременно принадлежащей конусу и ребру призмы (линии пересечения плоскостей ***α*** и ***γ***); точки **2**, **3, 7** и **8** – характерны тем, что их профильные проекции лежат на очерке проекции конуса; **4, 5**- точки, лежащие на середине отрезка **[1,6]** (большой оси эллипса) и определяют положение малой оси эллипса; точки **9, 10** – одновременно принадлежащие конусу и ребру призмы (образованному пересечением плоскостей ***α*** и ***β***).
2. Через фронтальные проекции точек **4** и **5** проведем вспомогательную секущую плоскость **φ.** Эта плоскость пересекает конус по параллели ***p***, а грань призмы по прямой линии ***m***, параллельной ребру. На горизонтальной плоскости проекций пересечение p_1 и m_1 определяют положение точек 4_1 и 5_1. Для точного построения кривых линий пересечения поверхностей обозначенных точек не достаточно. После нахождения проекций всех точек их необходимо соединить с учетом видимости.

Пример пересечения конуса с полусферой





B2 ≡ B'2
12
Δ2
R
R1
A2 ≡ A'2
72 ≡ 82
52 ≡ 62
22
R2
C2 ≡ C'2
A'1
B1
C'1
51
71
31
11
21
41
61
81
B1
C1
A1



5₂
1₂
6₂
3₂
R1
2₂
R2
4₂
7₂
R
1₁
R1
5₁
6₁
3₁
4₁
R2
2₁
7₁