

# Оптика.

Лекция 4.

**Геометрическая оптика**

# Приближение коротких длин волн. Уравнение эйконала

**Геометрическая оптика** – это раздел оптики, в котором считается, что длина волны

пренебрежимо мала. Основа геометрической оптики – это уравнение [эйконала](#).

Его можно получить из волнового уравнения для комплексной амплитуды ([уравнения Гельмгольца](#))

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} = U \frac{\partial \beta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = U \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + U \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} = U \left[ \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \right]$$

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = U [(\nabla \beta)^2 + \nabla^2 \beta]$$

$U = e^{\beta(\mathbf{r})} = e^{[\alpha(\mathbf{r}) + ik_0 E(\mathbf{r})]}$  - комплексная амплитуда

$$U \{ \nabla [\alpha(\mathbf{r}) + ik_0 E(\mathbf{r})]^2 + \nabla^2 [\alpha(\mathbf{r}) + ik_0 E(\mathbf{r})] \} + k_0^2 n^2 U = 0$$

$$\nabla [\alpha(\mathbf{r}) + ik_0 E(\mathbf{r})]^2 + \nabla^2 [\alpha(\mathbf{r}) + ik_0 E(\mathbf{r})] + k_0^2 n^2 = 0$$

$$[\nabla \alpha(\mathbf{r}) + ik_0 \nabla E(\mathbf{r})]^2 + \nabla^2 \alpha(\mathbf{r}) + ik_0 \nabla^2 E(\mathbf{r}) + k_0^2 n^2 = 0$$

$$(\nabla \alpha)^2 + 2ik_0 \nabla E \nabla \alpha - k_0^2 (\nabla E)^2 + \nabla^2 \alpha + ik_0 \nabla^2 E + k_0^2 n^2 = 0$$

$$\left[ (\nabla \alpha)^2 - k_0^2 (\nabla E)^2 + \nabla^2 \alpha + k_0^2 n^2 \right] + i \left[ k_0 \nabla^2 E + 2k_0 \nabla E \nabla \alpha \right] = 0$$

Поскольку в левой части уравнения комплексное число, то равенство нулю правой

части предполагает равенство нулю как вещественной, так и мнимой частей ЭТОГО

комплексного числа. Рассмотрим вещественную часть:

$$(\nabla E)^2 - n^2 = \frac{1}{k_0^2} \left[ (\nabla \alpha)^2 + \nabla^2 \alpha \right] \xrightarrow{\lambda_0} (\nabla E)^2 - n^2 = \frac{\lambda_0^2}{4\pi^2} \left[ (\nabla \alpha)^2 + \nabla^2 \alpha \right]$$

$$\lambda_0 \rightarrow 0$$

$(\nabla E)^2 = n^2$  - уравнение

эйконала

$$(\nabla E)^2 = \left( \frac{\partial E}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial E}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial E}{\partial z} \right)^2 = n^2(x, y, z)$$

# Основные понятия геометрической оптики

**Луч** – это прямая или кривая линия, вдоль которой распространяется энергия светового поля.

**Волновой фронт** – это поверхность равной фазы или равного эйконала:  
 $E(\mathbf{r}) = \text{const}$

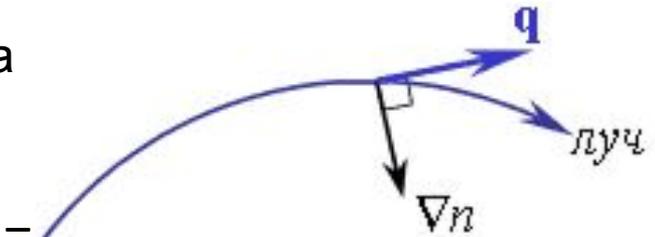
- волновые фронты в рамках геометрической оптики не пересекаются между собой;

- через каждую точку пространства проходит волновой фронт, и причем только один.

Если среда, в которой распространяется свет **однородна**, то есть ее показатель преломления не зависит от пространственных координат, то из уравнения эйконала следует, что направление луча остается постоянным:

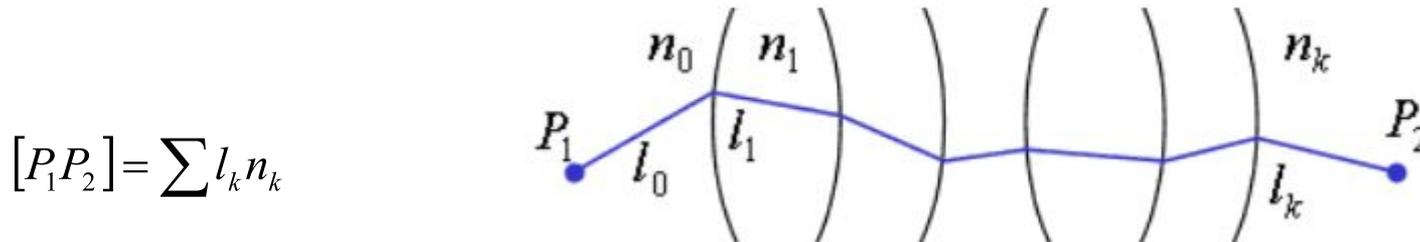
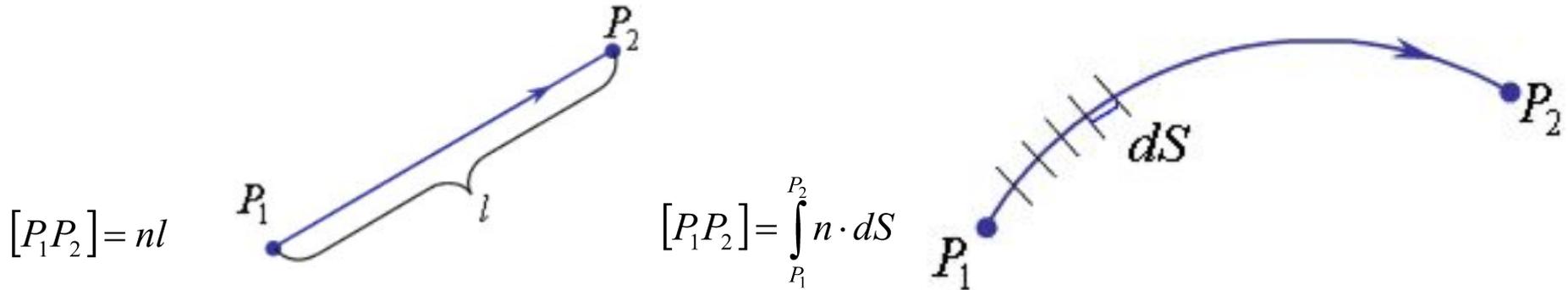
В неоднородной среде, где показатель преломления непостоянен, лучи искривляются в сторону градиента показателя преломления, то есть с увеличением показателя преломления возрастает кривизна луча.

При этом кривизна луча пропорциональна. Если луч – это кривая, то вектор направлен по касательной к лучу в каждой точке



# Оптическая длина луча

Оптическая длина луча в однородной среде – это произведение геометрической длины пути луча на показатель преломления среды, в которой распространяется свет



# Конгруэнция лучей

Пучок лучей – это множество линий, пронизывающих пространство. Но не каждое множество кривых или прямых линий, пронизывающих пространство, можно назвать пучком лучей. Для того чтобы множество линий образовывало пучок лучей, нужно чтобы это множество составило **конгруэнцию**.

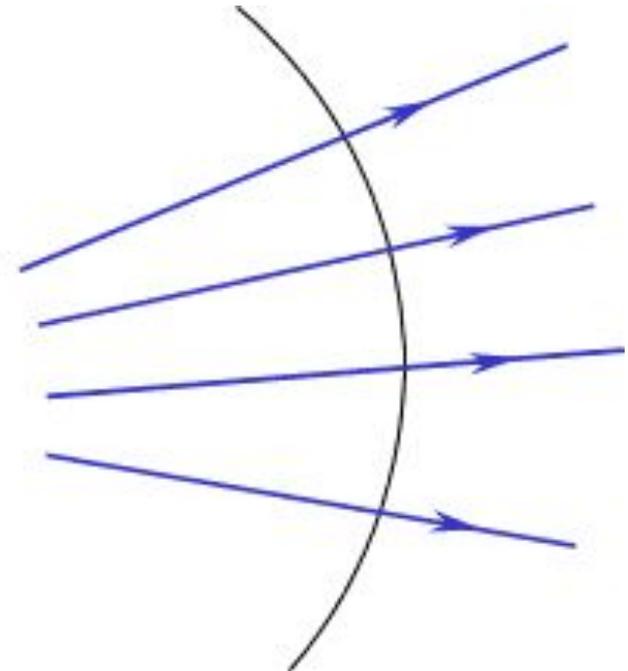
**Конгруэнция** – это такая совокупность линий в пространстве, для которой выполняется условие, что через любую точку пространства можно провести только одну линию из этой системы

$$\operatorname{rot}[\mathbf{q}(\mathbf{r})] = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{q}(\mathbf{r}) = 0$$

**Нормальная конгруэнция** – это конгруэнция, все линии которой пересекаются некоторой поверхностью под прямым углом.

Пучок лучей – это множество лучей, которое представляет собой **нормальную конгруэнцию**.



# Закон независимого распространения лучей

Если через точку пространства проходит несколько лучей, то каждый луч ведет себя так, как если бы других лучей не было.

Это справедливо для линейной оптики, где [показатель преломления](#) не зависит от амплитуды и интенсивности проходящего света.

Траектория и длина хода лучей не зависят от направления

распространения,  
Закон прямолинейного

распространения,  
Закон преломления и

отражения

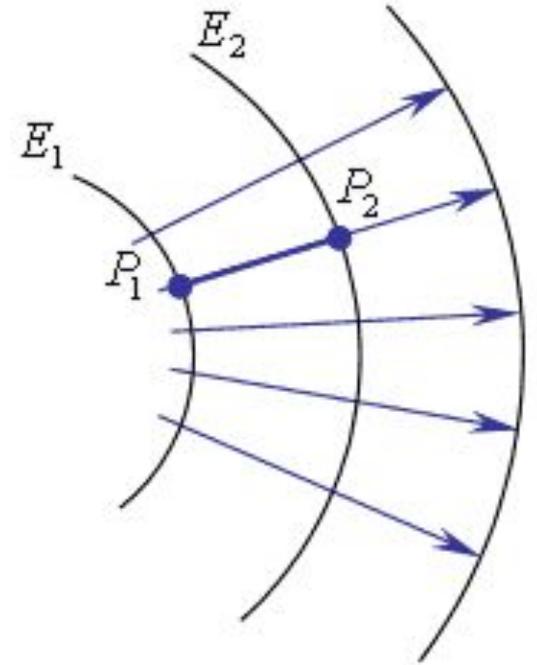
# Принцип таутохронизма

Рассмотрим распространение света, как распространение волновых фронтов

Оптическая длина любого луча между двумя волновыми фронтами одна и та же:

$$[P_1P_2] = E_2 - E_1 = \text{const}$$

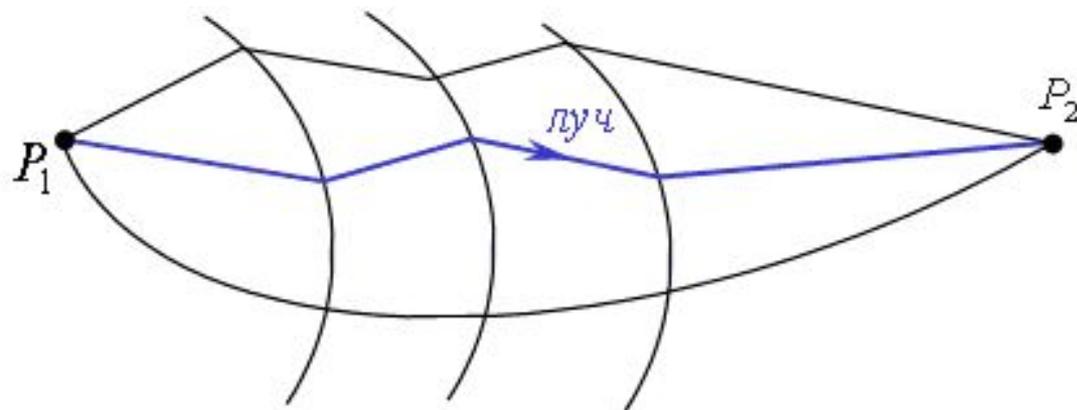
Волновые фронты – поверхности, которые оптически параллельны друг другу. Это справедливо и для распространения волновых фронтов в неоднородных средах



# Принцип Ферма

Пусть имеются две точки  $P_1$  и  $P_2$ , расположенные, возможно, в различных средах. Эти точки можно соединить между собой различными линиями. Среди этих линий будет только одна, которая будет являться оптическим лучом, который распространяется в соответствии с законами [геометрической оптики](#)

Оптическая длина луча между двумя точками минимальна по сравнению со всеми другими линиями, соединяющими эти две точки



$$\frac{[P_1 P_2]}{c} = \Delta t \Rightarrow [P_1 P_2] = c \Delta t$$

Луч, соединяющий две точки, идет по такому пути, который требует наименьшего времени (по самому быстрому пути).

# Закон Малюса-Дюпена

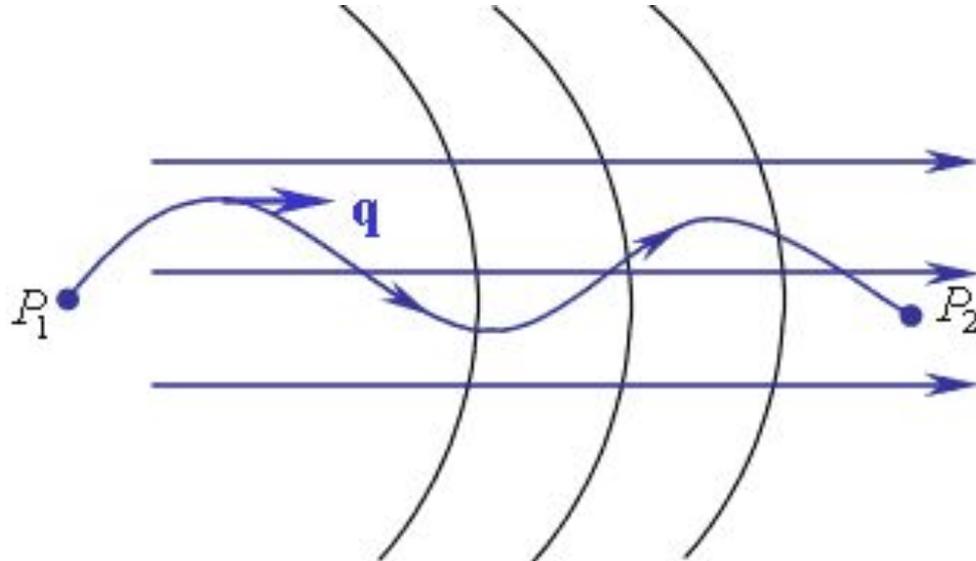
Нормальная конгруэнция сохраняет свойства нормальной конгруэнции в процессе прохождения через различные среды.

# Инварианты

**Инварианты** (от слова неизменный) – это соотношения, выражения, которые сохраняют свой вид при изменении каких-либо условий, например, при прохождении света через различные среды или системы

$$\int_{P_1}^{P_2} (\mathbf{q} d\mathbf{r}) \quad \text{- интегральный инвариант Лагранжа}$$

Криволинейный интеграл, взятый между двумя любыми точками  $P_1$  и  $P_2$ , не зависит от пути интегрирования.



Луч в пространстве полностью описывается радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , который содержит три линейные координаты  $(x, y, z)$ , и оптическим вектором, который содержит три угловые координаты  $(X, Y, Z)$ . Всего, таким образом, имеется 6 параметров для определения некоторого луча в пространстве. Однако из этих 6 параметров только 4 являются независимыми, так как можно получить два уравнения, которые связывают параметры луча друг с другом.

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = n^2$$

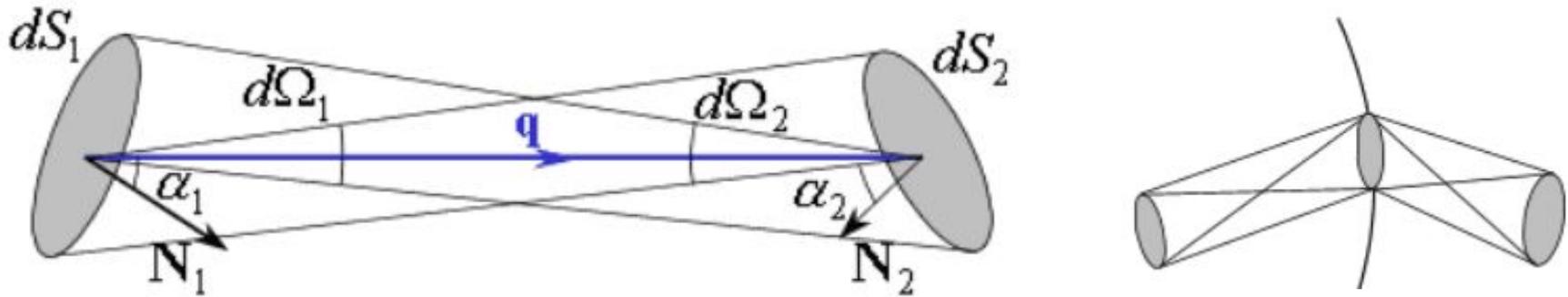
$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}) = 0 \quad \longrightarrow \quad xX + yY + zZ = 0$$

$$I_e = \frac{\partial r}{\partial U} \cdot \frac{\partial q}{\partial V} - \frac{\partial r}{\partial V} \cdot \frac{\partial q}{\partial U} \quad \text{- дифференциальный инвариант Лагранжа}$$

U и V – это пара любых из 6-ти параметров луча

Величина  $I_e$  сохраняет свое значение для данного луча при распространении пучка лучей через любую совокупность оптических сред.

# Инвариант Штраубеля



Если мы соединим все возможные точки краев площадки друг с другом, то получим так называемую **лучевую (световую) трубку**.

**Геометрический фактор** лучевой трубки записывается так:

$$G = n^2 \cdot dS_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot d\Omega_1 = n^2 \cdot dS_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot d\Omega_2 = \frac{n^2 \cdot dS_1 \cdot dS_2 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2}{c^2}$$

**Инвариант Штраубеля:**

Геометрический фактор остается инвариантным при распространении лучевой трубки через любую последовательность различных сред.

Инвариант Штраубеля выражает закон сохранения энергии, так как он показывает неизменность лучистого потока.

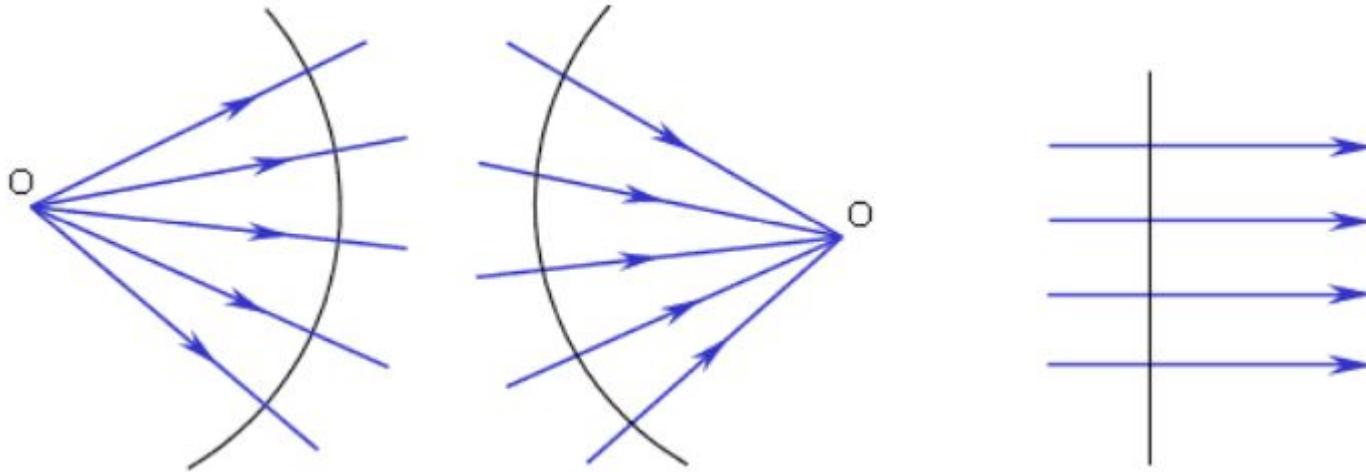
$$d^2\Phi = L_R \cdot G,$$

$$L_R = \frac{L}{n^2} \quad \text{- приведенная яркость}$$

# Гомоцентрические пучки лучей

## лучей

Гомоцентрические пучки лучей имеют общий центр, то есть все лучи выходят или сходятся в одной точке

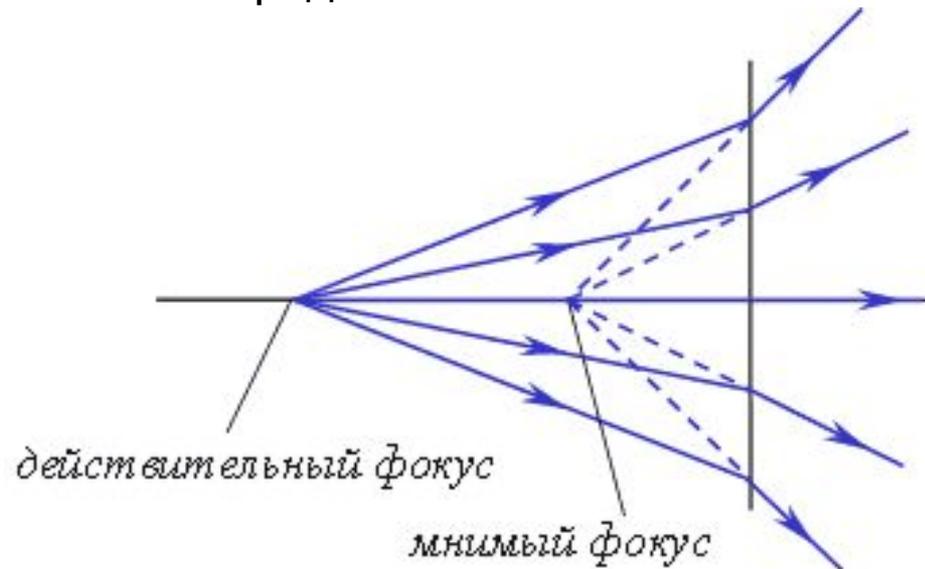


**Фокус пучка** – это точка, в которой все лучи сходятся или из которой они все выходят. Волновой фронт такого пучка представляет собой сферическую поверхность. В частном случае фокус пучка находится на бесконечности, тогда волновой фронт плоский, а все лучи параллельны.

# Гомоцентрические пучки лучей

Фокус может быть мнимым или действительным. Действительный фокус образован самими лучами, а мнимый – их продолжениями

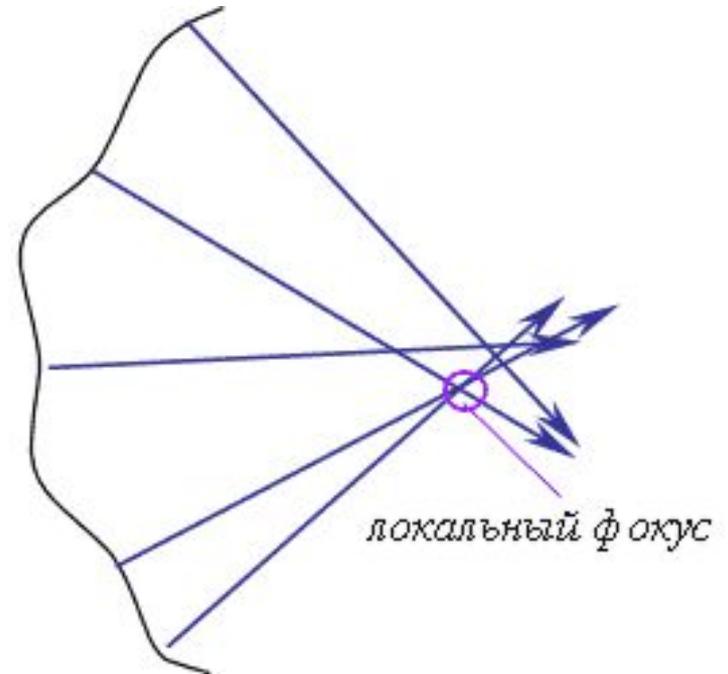
Все рассмотренные здесь пучки являются двухпараметрическими (показатель преломления фиксирован, положение фокуса зависит от [оптического вектора](#), а он имеет два параметра). Кроме таких пучков, существуют пучки, обладающие более сложными свойствами (например, лазерные пучки). Их структура определяется не двумя, а четырьмя параметрами.



# Негомоцентрические пучки

**Негомоцентрический пучок** – это пучок, не имеющий общего фокуса (лучи не пересекаются в одной точке). Волновой фронт такого пучка – не сферической и не плоской формы

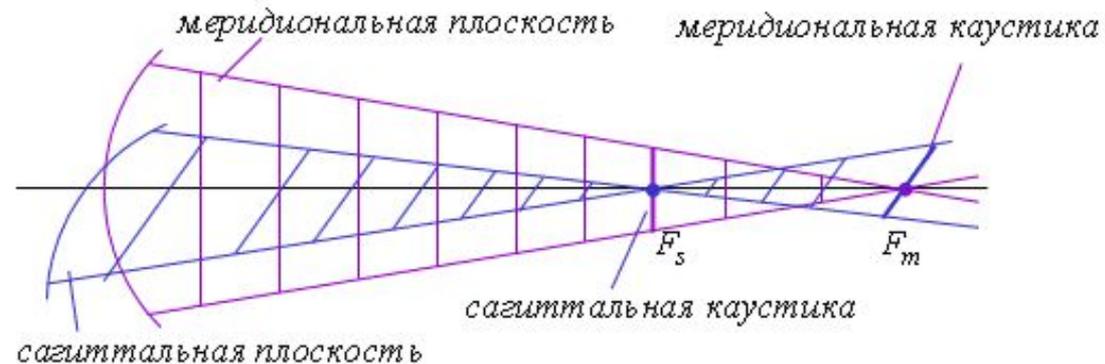
У негомоцентрических пучков нет общего фокуса, но есть локальные фокусы. **Локальный фокус** – это точка, в которой пересекается часть лучей пучка. У бесконечно узкого пучка всегда есть локальный фокус. Если рассматривать широкий пучок как совокупность бесконечно узких пучков, то совокупность локальных фокусов образует поверхность сложной формы, которая называется **каустикой**.



# Астигматический пучок

Частным случаем негомоцентрического пучка является астигматический пучок. Бесконечно узкий астигматический пучок имеет два локальных (местных) фокуса – **сагиттальный фокус** и **меридиональный фокус**. Широкий астигматический пучок имеет две плоскости симметрии, которые взаимно перпендикулярны – меридиональную и сагиттальную. Каустика представляет собой две полосы (вертикальная и горизонтальная). У широкого астигматического пучка поверхность волнового фронта – поверхность двоякой кривизны, то есть волновой фронт имеет торическую форму.

Расстояние между точками  $F_m$  и  $F_s$  – это мера астигматизма. Это расстояние называют продольным астигматизмом  $\delta(F_s, F_m)$ . Если  $\delta(F_s, F_m) = 0$ , то пучок будет гомоцентрическим. Совокупность лучей астигматического пучка называют конусом Штурма.



# Перенос поля в приближении геометрической оптики.

## Пределы применимости геометрической оптики

В приближении геометрической оптики поле распространяется вдоль лучей.

При таком подходе перенос поля – это перенос комплексной амплитуды из

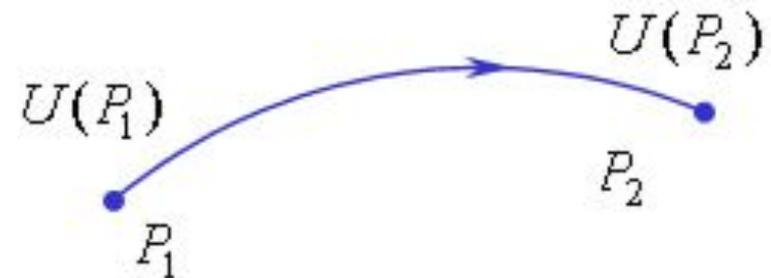
точки  $U(P_1)$  в точку  $U(P_2)$

$$U(P_1) = a(P_1)e^{ik_0E(P_1)}$$

$$U(P_2) = a(P_2)e^{ik_0E(P_2)}$$

где  $a$  – вещественная амплитуда.

$E_2 = E_1 + [P_1P_2]$  - уравнение переноса эйконала



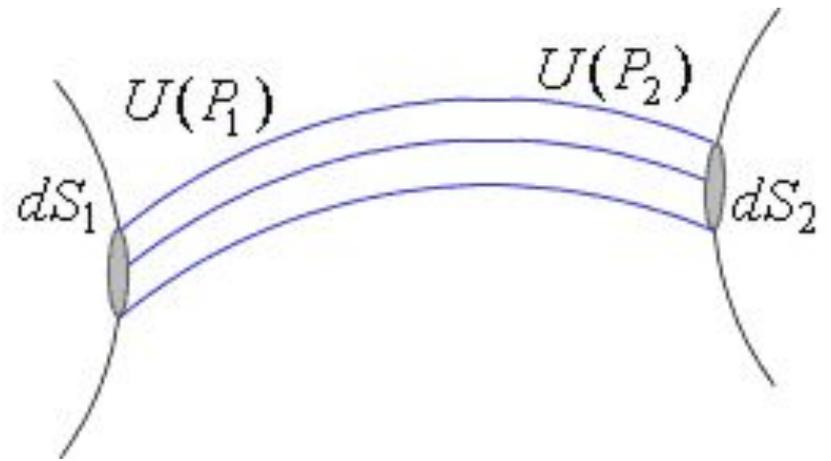
Энергия распространяется вдоль лучей, и если нет потерь, то поток энергии через площадку равен потоку энергии через площадку

$$a^2(P_1) \cdot dS_1 = a^2(P_2) \cdot dS_2$$

$$\tau(P_1P_2) a^2(P_1) \cdot dS_1 \cdot n_1 = a^2(P_2) \cdot dS_2 \cdot n_2$$

$$a^2(P_2) = a^2(P_1) \cdot \sqrt{\frac{n_1 dS_1}{n_2 dS_2}} \cdot \sqrt{\tau(P_1P_2)}$$

$$U(P_2) = U(P_1) \cdot \sqrt{\frac{n_1 dS_1}{n_2 dS_2}} \cdot \sqrt{\tau(P_1P_2)} e^{ik_0[P_1P_2]}$$



Введем функцию **комплексного пропускания среды вдоль луча**  $f(P_1P_2)$

$$f(P_1P_2) = \sqrt{\frac{n_1 dS_1}{n_2 dS_2}} \cdot \sqrt{\tau(P_1P_2)} e^{ik_0[P_1P_2]}$$

В рамках [геометрической оптики](#) происходит поточечный перенос поля, то есть каждый луч переносит энергию независимо от других лучей. Поле в точке  $P_2$  определяется только точкой  $P_1$ .

# Пределы применимости геометрической оптики

- Основное приближение геометрической оптики – это приближение коротких длин волн. Это означает, что длины волн считаются пренебрежимо малыми по сравнению с размерами неоднородностей электромагнитного поля и среды. Поэтому геометрическая оптика не применима там, где необходимо исследовать тонкую структуру неоднородностей, сравнимых с длиной волны.
- Итак, геометрическая оптика не описывает распределение светового поля в следующих ситуациях:
- вблизи предмета и изображения в оптических системах, то есть там, где возможна тонкая структура неоднородностей,
- вблизи фокусов пучков.
- В этих случаях требуются другие подходы к описанию светового поля, основанные на теории [дифракции](#).