

**Матрицы. Операции над матрицами.
Элементарные преобразования.
Приведение к ступенчатому виду. Ранг
матрицы. Решение систем линейных
алгебраических уравнений методом
Гаусса**

Калабухова Галина Валентиновна,
к.социол.н., доцент

Вопросы темы:

- Матрицы: терминология и обозначения.
- Операции над матрицами: сложение, умножение матрицы на число. Умножение матриц. Транспонирование матрицы.
- Элементарные преобразования матрицы. Приведение к ступенчатому виду.
- Ранг матрицы.
- Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.



**Матрицы:
терминология и обозначения**

Определение

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица, состоящая из m строк и n столбцов, заполненная некоторыми элементами

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Обозначения:

$A_{m \times n}$ – матрица

a_{ij} – элемент матрицы, расположенный на пересечении i -той строки и j -ого столбца

$m \times n$ – размер матрицы

Применение матриц

Матрицы широко применяются в математике для компактной записи систем линейных алгебраических уравнений или систем дифференциальных уравнений. Тогда количество строк матрицы соответствует количеству уравнений системы, а количество столбцов равно количеству неизвестных

Другие определения

Если $n = m$, то матрица называется **квадратной**, а n – **порядком матрицы**.

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

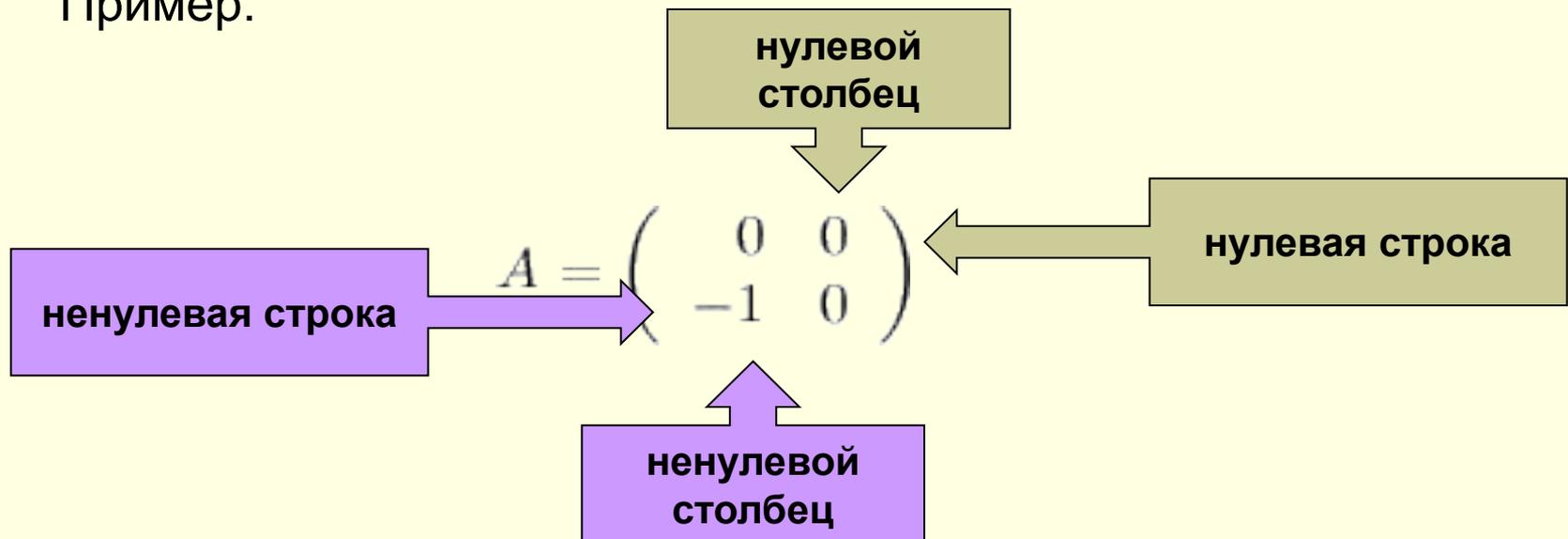
Если все элементы матрицы равны нулю, то матрица называется **нулевой**. Обозначается: Θ

Другие определения

Строка (столбец) матрицы называется **нулевой**, если все ее (его)элементы равны нулю.

Если хотя бы один из элементов строки (столбца) не равен нулю, то строка (столбец) называется **ненулевой**

Пример:



Другие определения

Главной диагональю матрицы называется диагональ, проведённая из левого верхнего угла матрицы в правый нижний.

Побочной диагональю матрицы называется диагональ, проведённая из левого нижнего угла матрицы в правый верхний.

Пример:

Diagram illustrating the main and secondary diagonals of a 3x3 matrix A .

The matrix is shown in three states:

- Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ with the main diagonal (1, 6, 1) highlighted by a green arrow and labeled "главная диагональ".
- Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ with the secondary diagonal (3, 2, 1) highlighted by a purple arrow and labeled "побочная диагональ".
- Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ with both diagonals highlighted.

Другие определения

Матрица, состоящая из одной строки, называется **вектор-строкой**, а матрица, состоящая из одного столбца, - **вектор-столбцом**.

Примеры:

$$B = (1 \quad 3 \quad 7)$$



вектор-строка

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$



вектор-столбец

Другие определения

Квадратная матрица называется **диагональной**, если все ее элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \text{diag}(1; 0; 3)$$

Скалярной называется диагональная матрица S , у которой все диагональные элементы равны между собой.

Единичной матрицей E_n называется скалярная матрица порядка n , диагональные элементы которой равны 1.

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Другие определения

Матрица называется **верхней треугольной матрицей**, если все элементы ниже главной диагонали равны нулю.

Матрица называется **нижней треугольной матрицей**, если все элементы выше главной диагонали равны нулю.

Примеры:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

← верхнетреугольная
матрица

Другие определения

Ступенчатой

называется матрица, которая содержит m строк и n у которой первые $r \leq m$ диагональных элементов ненулевые, а элементы, лежащие ниже главной диагонали и элементы последних $(m - r)$ строк равны нулю, то есть это матрица вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3r} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Главным элементом некоторой строки матрицы A называется ее первый ненулевой элемент

Другие определения

Матрица A называется **ступенчатой**, если:

- все ее нулевые строки стоят после ненулевых;
- в каждой ненулевой строке, начиная со второй, ее главный элемент стоит правее (в столбце с большим номером) главного элемента предыдущей строки.

Примеры ступенчатых матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**НЕ ЯВЛЯЕТСЯ
СТУПЕНЧАТОЙ:**

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Другие определения

Две матрицы называются **равными**, если они имеют одинаковые размеры и их соответствующие элементы равны:

$$A_{n \times m} = B_{n \times m} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$$



Операции над матрицами

Произведением матрицы на число

называется матрица, полученная из исходной умножением каждого ее элемента на заданное число

$$B = \lambda A, b_{ij} = \lambda a_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$$

Суммой матриц

А и В одного размера называется матрица $C = A + B$, такого же размера, получаемая из исходных путем сложения соответствующих элементов

$$C = A + B, c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$$

Свойства линейных операций

Умножение матрицы на число }
Сумма матриц } - *линейные операции*

1. Ассоциативность: $(A + B) + C = A + (B + C)$
2. $A + \Theta = \Theta + A$, где Θ – нулевая матрица
3. $A - A = \Theta$
4. Коммутативность: $A + B = B + A$
5. Дистрибутивность: $\lambda * (A + B) = \lambda * A + \lambda * B$
6. $(\lambda + \mu) * A = \lambda * A + \mu * A$
7. $(\lambda * \mu) * A = \lambda * (\mu * A)$

Произведением матриц

$A_{m \times n}$ на матрицу $B_{n \times k}$ называется матрица $C_{m \times k}$ такая, что элемент матрицы C , стоящий в i -той строке и j -том столбце (т.е. элемент c_{ij}) равен сумме произведений элементов i -той строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B

$$C = A * B, c_{ij} = \sum a_{il} * b_{lj}, l = \overline{1, n}$$

Свойства произведения матриц

1. Ассоциативность: $(A * B) * C = A * (B * C)$
2. Ассоциативность по умножению: $(\mu * A) * B = \mu * (A * B)$
3. Дистрибутивность: $A * (B + C) = A * B + A * C$;
 $(A + B) * C = A * C + B * C$
4. Умножение на единичную матрицу: $E * A = A * E = A$
5. **Некоммуникативно**: $A * B \neq B * A$

Транспонирование матрицы

это операция над матрицей, когда ее строки становятся столбцами с теми же номерами.

Обозначается A^T

Свойства операции транспонирования матриц

1. $(A^T)^T = A$
2. $(\lambda * A)^T = \lambda * A^T$
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$
4. $(A * B)^T = B^T * A^T$



Элементарные преобразования матрицы

Эквивалентные преобразования над строками матрицы

называют следующие преобразования строк:

- умножение строки на ненулевое число;
- перестановка двух строк;
- прибавление к одной строке матрицы другой ее строки, умноженной на некоторое ненулевое число.

Если от матрицы к матрице перешли с помощью эквивалентных преобразований над строками, то такие матрицы называются **эквивалентными** и обозначают $A \sim B$.



Ранг матрицы

Определения

Линейной комбинацией (ЛК) строк s_1, s_2, \dots, s_m матрицы A называется выражение $\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \dots + \lambda_m s_m$.

ЛК называется **тривиальной**, если все коэффициенты λ_i равны нулю одновременно.

ЛК называется **нетривиальной**, если хотя бы один из коэффициентов λ_i отличен от нуля.

Система строк называется **линейно зависимой (ЛЗ)**, если существует их нетривиальная ЛК, равная нулевой строке

Система строк называется **линейно независимой (ЛНЗ)**, если только тривиальная ЛК равна нулевой строке

Рангом системы строк

называется максимальное количество линейно независимых строк этой системы

В каждой матрице может быть два ранга: строчный ранг (ранг системы строк) и столбцовый ранг (ранг системы столбцов).

Теорема: Строчный ранг матрицы равен её столбцовому рангу

Рангом матрицы

называется ранг её системы строк или столбцов

Обозначается: $\text{rang } A$.

- Элементарные преобразования над строками (столбцами) матрицы не меняют её ранга.
- Ранг ступенчатой матрицы равен количеству её ненулевых строк.
- На практике для нахождения ранга матрицы используют следующее утверждение: ранг матрицы равен количеству ненулевых строк после приведения матрицы к ступенчатому виду.

Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Определения

СЛАУ называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение.

В противном случае система называется **несовместной**.

Система называется **определённой**, если она совместна и имеет единственное решение.

В противном случае (т.е. если система совместна и имеет более одного решения) система называется **неопределённой**.

Система называется **однородной**, если все правые части уравнений, входящих в нее, равны нулю одновременно.

Система называется **квадратной**, если количество уравнений равно количеству неизвестных.

Определения

Расширенной матрицей системы $A = (A|B)$ называется матрица, полученная из матрицы системы A , дописыванием справа после вертикальной черты столбца свободных членов B .

Принцип метода Гаусса

- Метод Гаусса включает в себя прямой (приведение расширенной матрицы к ступенчатому виду) и обратный (получение нулей над главной диагональю расширенной матрицы) ходы. Прямой ход и называется **методом Гаусса**, обратный - **методом Гаусса-Жордана**, который отличается от первого только последовательностью исключения переменных.

Метод Гаусса идеально подходит для решения систем содержащих больше трех линейных уравнений, для решения систем уравнений, которые не являются квадратными, т.о. метод Гаусса - наиболее универсальный метод для нахождения решения любой системы линейных уравнений, он работает в случае, когда система имеет бесконечно много решений или несовместна