МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

1. Игошин, В. И. Математическая логика и теория алгоритмов. - Москва, 2008.
2. Молчанов, В. А. Логика высказываний: учебное пособие для студентов факультета компьютерных наук и информационных технологий. - Саратов, 2014.
3. Ершов, Ю. Л., Е. А. Палютин. Математическая логика. - Москва, 2011.
4. Игошин, В. И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: учеб. пособие. - Москва, 2007.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Предмет математической логики

ЛОГИКА — наука о правильном мышлении.

ЛОГИКА — междисциплинарная отрасль наук, изучающая

- законы причинно-следственной связи в окружающем мире;
- проявление законов причинно-следственной связи в рациональном мышлении человека (законы правильного мышления);
- отражение законов причинно-следственной связи в языках (естественных и искусственных).

Логика возникла в VI—IV вв. до н. э. как «анализ мышления», т.е. анализ принципов правильных рассуждений.

Основоположник логики – древнегреческий ученый Аристотель (384-322 гг. до н. э.), который в сочинениях «Аналитики» впервые изложил идею дедуктивного вывода.

ЛОГИКА (ФОРМАЛЬНАЯ)

изучает **формы** правильных рассуждений, в которых проявляются законы причинно-следственных связей вне зависимости от содержания (смысла) тех явлений (предметов), к которым эти законы относятся.

Математическая логика занимается задачами формализации правильных способов рассуждений с помощью **математического аппарата.**

Содержанием математической логики является изучение языка математики, математических рассуждений с целью точного определения понятия «математическое доказательство».

Этапы развития математической логики

Английский математик Дж.Буль (1815—1864) создал алгебру логики.

Немецкий математик Г.Фреге (1848—1925) разработал логико-математические языки и теорию их осмысления (так называемую семантику).

Итальянский математик Дж.Пеано (1858—1932) изложил арифметику на языке математической логики.

Этапы развития математической логики

Немецкий математик Д.Гильберт (1862—1943) создал программу обоснования математики на основе аксиоматического подхода.

Австрийский математик К.Гедель (1906-1978) показал ограниченность аксиоматического подхода к обоснованию математики, доказав неполноту арифметики.

Основная задача формальной логики.

База знаний: $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$.

Предложение: ψ.

Задача (формальная): проверить, что ψ выводится из Γ по законам формальной логики.

Задача (неформальная): выяснить, является ли предложение ψ следствием утверждений базы знаний Г.

Бурное развитие математической логики и теории алгоритмов в наше время обусловлено:

– распространением информационно-коммуникационных технологий на основе компьютерной техники,
– необходимостью создания теоретических основ обработки и передачи информации, математического моделирования самых разнообразных задач и процессов.

Логика высказываний

Высказывание - повествовательное предложение, о котором можно судить, истинное оно или ложное.

Обозначаются высказывания $A, B, C, \ldots$

Истинностное значение высказывания A обозначается символом $\lambda(A)$ и определяется по формуле:

$\lambda(A)=1$, если высказывание A истинно, и

$\lambda(A)=0$, если A ложно.

Логика высказываний - раздел математической логики, в котором изучаются формы правильных рассуждений с помощью высказываний.

Алгебра высказываний

Операции над высказываниями

Из высказываний с помощью логических связок «не», «и», «или», «следует», «равносильно» можно составлять новые, более сложные высказывания.

Формализацией этих логических связок являются пять основных логических операций над высказываниями: отрицание $\neg$ - «не», конъюнкция $\wedge$ - «и», дизъюнкция $\vee$ - «или», импликация $\Rightarrow$ - «влечет», эквивалентность $\Leftrightarrow$ - «равносильно».

При определении логических операций над высказываниями главное внимание уделяется истинностно-функциональным комбинациям, в которых истинность или ложность новых высказываний определяется истинностью или ложностью составляющих их высказываний.

Определение. *Алгеброй высказываний* называется множество всех высказываний ***P*** с логическими операциями $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Формулы алгебры высказываний

Логика высказываний изучает свойства алгебры высказываний $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{P}, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow)$.

Свойства такой алгебры описываются с помощью выражений, которые строятся из переменных символов с помощью знаков логических операций.

Переменные символы $X, Y, Z, \ldots,$ которые используются для обозначения высказываний, называются *пропозициональными переменными*, символы логических операций $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ называются *пропозициональными связками*, рассматриваемые выражения называются *пропозициональными формулами.*

<u>Определение.</u> *Формулы* алгебры высказываний индуктивно определяются по правилам:

1) каждая пропозициональная переменная является формулой,
2) если Φ,Ψ – формулы, то формулами являются также выражения

$$(\neg\Phi),\ (\Phi \wedge \Psi),\ (\Phi \vee \Psi),\ (\Phi \Rightarrow \Psi),\ (\Phi \Leftrightarrow \Psi).$$

Множество всех формул алгебры высказываний обозначим $\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}}$.

Если в формулу Ф входят переменные $X_1,\ldots,X_n$, то записывают $\Phi = \Phi(X_1,\ldots,X_n)$.

Из индуктивного определения формул следует, что если в формулу Ф вместо переменных $X_1,\ldots,X_n$ подставить произвольные конкретные высказывания $A_1,\ldots,A_n$, то получится некоторое сложное высказывание $\Phi(A_1,\ldots,A_n)$.

Истинностное значение высказывания $\lambda(\Phi(A_1,\ldots,A_n))$ определяется истинностными значениями исходных высказываний $\lambda(A_1),\ldots,\lambda(A_n)$ согласно таблицам истинностных значений логических операций $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Формула Φ определяет функцию n переменных F_{Φ}, которая каждому упорядоченному набору $(\lambda(X_1),\ldots,\lambda(X_n))$ n элементов множества $\{0,1\}$ ставит в соответствие элемент $\lambda(\Phi(X_1,\ldots,X_n))$ этого же множества.

Функция F_{Φ} называется *истинностной функцией формулы* Φ и графически представляется *истинностной таблицей*.

Такая таблица содержит 2^n строк и имеет одно из 2^{2^n} возможных распределений значений 0 и 1 в последнем столбце.

<u>Пример.</u> **Формула** $\Phi = (\neg X \wedge \neg Y \Leftrightarrow X \vee \neg Y)$ имеет следующую истинностную таблицу:

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$\neg X \wedge \neg Y$	$X \vee \neg Y$	$\neg X \wedge \neg Y \Leftrightarrow X \vee \neg Y$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0

<u>Определение.</u> Формула Ф называется:

– *тавтологией* (или *тождественно истинной формулой*) и обозначается $\models Ф$, если ее истинностная функция тождественно равна 1;

– *противоречием* (или *тождественно ложной формулой*), если ее истинностная функция тождественно равна 0;

– *выполнимой*, если ее истинностная функция не равна тождественно 0;

– *опровержимой*, если ее истинностная функция не равна тождественно 1.

Тавтологии являются общими схемами построения истинных высказываний и в этом смысле выражают некоторые *логические законы*.

Примеры таких законов являются:

$\models X \vee \neg X$ – закон исключенного третьего,

$\models \neg\neg X \Leftrightarrow X$ – закон двойного отрицания,

$\models \neg(X \wedge \neg X)$ – закон противоречия,

$\models (X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg Y \Rightarrow \neg X)$ – закон контрапозиции.

Новые тавтологии можно получить с помощью следующего правила.

Правило подстановки:

если $\models \Phi(X_1,\dots,X_n)$, то для любых формул $\Phi_1,\dots,\Phi_n$ тавтологией является формула $\Phi(\Phi_1,\dots,\Phi_n)$.

Логическая равносильность формул

Определение. Формулы Φ, Ψ называются *логически равносильными* (или просто *равносильными*), если при любой подстановке в эти формулы вместо переменных конкретных высказываний формулы превращаются в высказывания с одинаковыми истинностными значениями, т.е. $\models \Phi \Leftrightarrow \Psi$.

Для обозначения логически эквивалентных формул используется символическая запись $\Phi \cong \Psi$, или просто $\Phi = \Psi$.

Такие выражения называются *логическими равенствами* или просто *равенствами формул.*

Лемма. Справедливы следующие равенства формул:

1) $X \vee (Y \vee Z) = (X \vee Y) \vee Z$, $X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z$ – свойства ассоциативности дизъюнкции и конъюнкции;

2) $X \vee Y = Y \vee X$, $X \wedge Y = Y \wedge X$ – свойства коммутативности дизъюнкции и конъюнкции;

3) $X \vee X = X$, $X \wedge X = X$ – свойства идемпотентности дизъюнкции и конъюнкции;

4) $X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$, $X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ – законы дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции;

5) $\neg(X \wedge Y) = \neg X \vee \neg Y$, $\neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y$ – законы де Моргана;

6) $(X \wedge Y) \vee X = X$, $(X \vee Y) \wedge X = X$ – законы поглощения;

7) $\neg\neg X = X$ – закон двойного отрицания;

8) $X \Rightarrow Y = \neg X \vee Y$, $X \Rightarrow Y = \neg(X \wedge \neg Y)$ – взаимосвязь импликации с дизъюнкцией и конъюнкцией;

9) $X \Leftrightarrow Y = (X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$, $X \Leftrightarrow Y = (\neg X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y)$ – взаимосвязь эквивалентности с импликацией, дизъюнкцией и конъюнкцией.

Лемма (Правило замены). Если формулы Φ, Φ' равносильны, то для любой формулы $\Psi(X)$, содержащей переменную X, выполняется равенство: $\Psi(\Phi) = \Psi(\Phi')$.

Это правило означает, что при замене в любой формуле $\Psi = \Psi(\Phi)$ некоторой ее подформулы Φ на равносильную ей формулу Φ' получается формула $\Psi' = \Psi(\Phi')$, равносильная исходной формуле Ψ.

Такие переходы называются *равносильными преобразованиями формул*.

Пример.

Формула $\Phi = (X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z$ с помощью равенств 5),7),8) из леммы 2.4.1 равносильно преобразовывается следующим образом:

$$\Phi = (X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z = \neg(X \Rightarrow Y) \vee Z =$$

$$= \neg(\neg(X \wedge \neg Y)) \vee Z = (X \wedge \neg Y) \vee Z \cdot$$