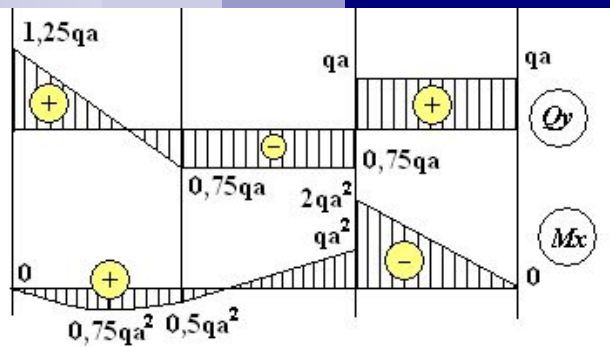


Курс лекций по Сопротивлению материалов



Модуль 1

Содержание

- Лекция 1. Введение. Основные определения. Реальный объект и расчетная схема. Схематизация свойств материала и геометрии объекта. Внешние силы. Метод сечений. Внутренние усилия.
- Лекция 2. Напряжения. Перемещения и деформации. Виды простейших деформаций. Внутренние усилия при растяжении-сжатии. Построение эпюр продольных сил и крутящих моментов.
- Лекция 3. Основные типы опор и балок. Чистый и поперечный изгиб. Внутренние усилия при изгибе. Дифференциальные зависимости. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

Рекомендуемая литература

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов для вузов. М.: Высшая школа. 1995, 2001 г. 560 с.
2. Сборник задач по сопротивлению материалов под ред. Александрова А.В., М.: Стройиздат. 1977г. 335 с.
3. Методические указания к выполнению расчетно-графических работ. Изд. МИИТ.
4. Лабораторные работы по сопротивлению материалов (Методические указания)

Лекция 1

Введение

Сопротивление материалов является частью более общей науки – механики твердого деформируемого тела, в которую входят: теория упругости, теории пластичности и ползучести, теория сооружений, строительная механика, механика разрушения и др. Задачей сопротивления материалов является изучение методов расчета простейших элементов конструкций и деталей машин на прочность, жесткость и устойчивость.



Прочностью называется способность элемента конструкции сопротивляться воздействию приложенных к нему сил не разрушаясь.

Жесткостью называется способность элемента конструкции сопротивляться воздействию приложенных к нему сил, получая лишь малые упругие деформации.

Устойчивостью называется способность элемента конструкции сохранять первоначальную форму равновесия под действием приложенных сил.

Реальные тела не являются абсолютно твердыми и под действием приложенных к ним сил изменяют свою первоначальную форму и размеры, то есть **деформируются**. Деформации тела, исчезающие после снятия внешних сил, называются **упругими**, а не исчезающие – **остаточными** или **пластическими**.

- Определение размеров деталей или внешних нагрузок, при которых исключается возможность разрушения деталей, является целью расчета на прочность.
- Определение размеров деталей или внешних нагрузок, при которых исключается возможность появления недопустимых с точки зрения нормальной работы конструкции деформаций этих деталей, является целью расчета на жесткость.

Реальный объект и расчетная схема

Реальный объект, освобожденный от несущественных особенностей, называется расчетной схемой. Переход от реального объекта к расчетной схеме осуществляется по следующим принципам:

Схематизация свойств материала

Реальные материалы обладают разнообразными физическими свойствами. С целью упрощения расчетов в сопротивлении материалов материал считается:

1. Материал считается **однородным**, если его свойства во всех направлениях одинаковы.
2. Материал считается **изотропным**, если его свойства во всех направлениях одинаковы.

Изотропными являются аморфные материалы, такие как стекло и смолы.

Анизотропными являются пластмассы, текстолит и т.п.

Металлы являются поликристаллическими телами, состоящими из большого количества зерен, размеры которых очень малы (порядка 0,01 мм).

Каждое зерно является анизотропным, но вследствие малых размеров зерен и беспорядочного их расположения металлы проявляют свойство изотропии.

Лекция 1 (продолжение – 1.2)

3. Материал обладает свойством **идеальной упругости**, вследствие которой деформируемое тело полностью восстанавливает свою форму и размеры после снятия нагрузки независимо от величин нагрузок и температуры тела.
4. Форма и размеры упругого тела меняются прямо **пропорционально изменению нагрузок**, то есть подчиняется закону Гука (1660 г.).
5. Материал обладает свойством **сплошности**, то есть способностью сплошь (без пустот) заполнять пространство, ограниченное поверхностью тела. Вследствие этого материал считается непрерывным, что позволяет использовать для определения напряжений и деформаций математический аппарат дифференциального и интегрального исчисления.
6. Упругие тела являются относительно жесткими, благодаря чему **перемещения точек тела весьма малы по сравнению** с размерами самого тела. Эта гипотеза служит основанием для использования при расчете начальных (исходных) размеров тела (по недеформированной схеме).

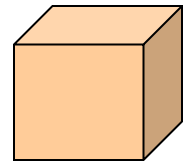
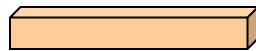
- **Схематизация геометрии реального объекта** – упрощает геометрию реально существующих тел, составляющих конструкцию.

Большинство сооружений, механизмов и машин можно расчленить на отдельные тела простой геометрической формы:

Брус - тело, два измерения которого малы по сравнению с третьим (стержни, стойки, валы, балки). Брус может иметь различную форму поперечного сечения (круглое, кольцевое, прямоугольное, коробчатое, двутавровое и др.). Поперечное сечение образуется при разрезе бруса плоскостью, перпендикулярной продольной оси, а продольная ось является линией, соединяющей центры тяжести поперечных сечений, и может быть прямой или криволинейной. Брус является основным объектом рассмотрения в курсе сопротивления материалов. Следующие тела являются объектами рассмотрения в других разделах механики твердого деформируемого тела (теория пластин и оболочек, теория упругости и др.):

Оболочка, пластина - тело, одно измерение которого мало по сравнению с двумя другими (тонкостенные резервуары, оболочки перекрытия, плиты, стенки).

Массив - тело, все три измерения которого мало отличаются друг от друга (фундаментные блоки, шарик подшипника, тело гравитационной плотины).



- **Схематизация силового воздействия** – представляет модель механического действия **внешних сил** на объект от других тел или сред. К внешним силам относятся также и **реакции связей**, определяемые методами теоретической механики. Схематизация силового воздействия сводится к рассмотрению трех типов нагрузки:

Сосредоточенная сила – сила, рассматриваемая в курсе теоретической механики как вектор, характеризуемый модулем (величиной), направлением действия и точкой приложения. Здесь такая сила является условной, поскольку механическое взаимодействие деформируемых тел не может осуществляться в точке (площадь контакта не равна нулю). Условность состоит в том, что в случае малости площадки контакта по сравнению с размерами объекта, **сила считается приложенной в точке**. Если же определяются контактные напряжения, например, в головке рельса, то учитывается фактическое распределение нагрузки на рельс по площадке контакта, размеры которой зависят от величины сжимающей силы (равнодействующей давления). Сосредоточенная сила измеряется в ньютонах (Н).

Объемные силы – силы, распределенные по объему (силы тяжести, силы инерции), приложенные к каждой частице объема. Для этих сил схематизация часто состоит в задании простого закона изменения этих сил по объему.

Объемные силы определяются их интенсивностью, как предел отношения равнодействующей сил в рассматриваемом элементарном объеме к величине этого объема, стремящегося к нулю:

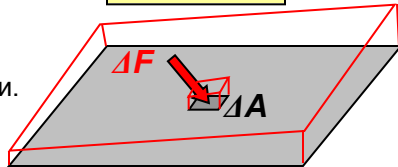
$$f = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta V}$$

и измеряются в Н/м³.

Лекция 1 (продолжение – 1.3)

Поверхностные силы – силы, распределенные по поверхности (давление жидкости, газа или другого тела), характеризующиеся интенсивностью давления, как предел отношения равнодействующей сил на рассматриваемой элементарной площадке к величине площади этой площадки, стремящейся к нулю:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

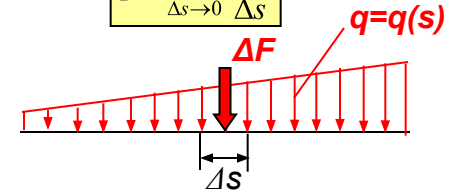


и измеряются в Н/м².

Для этих сил схематизация часто состоит в задании простого закона изменения этих сил по поверхности.

Линейно распределенная нагрузка – силы, распределенные по некоторой линии (длине), характеризующаяся интенсивностью нагружения, как предел отношения равнодействующей сил на рассматриваемой элементарной длине линии к величине длины этой линии, стремящейся к нулю:

$$q = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta s}$$

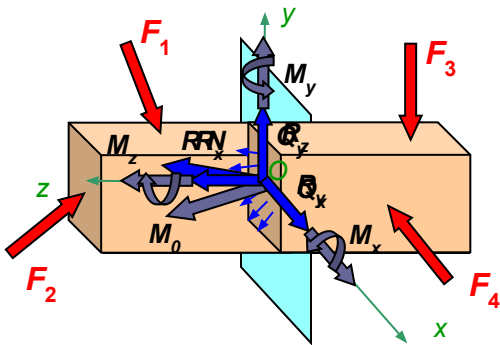


и измеряются в Н/м.

Для этих сил условность состоит в представлении области контакта в виде линии нулевой толщины. Характер изменения часто задается в виде простого закона (постоянного, линейного).

По характеру воздействия на сооружения внешние силы делятся на статические и динамические. **Динамическая нагрузка** быстро изменяется во времени (при движении подвижного состава, колебания, удар). При медленном изменении нагрузки можно пренебречь силами инерции и деформациями, возникающими в объекте, и такая нагрузка может условно считаться **статической**. По времени действия на сооружения нагрузки делятся на **постоянные** (вес пролетного строения, вес мостового полотна) и **временные** (нагрузка от проходящего подвижного состава, ветровая или снеговая нагрузка). Временные нагрузки регламентируются специальными документами (СНиП, ТУ).

- Внутренние силы** – Под действием **внешних сил** на объект происходит изменение расстояний между частицами (атомами) рассматриваемого тела и сил взаимодействия между ними. В результате возникают так называемые **внутренние силы**, которые можно определить **методом сечений**:



$$\begin{aligned} Q_x + \sum X_i^{\text{оставл. части}} &= 0; & M_x + \sum M_{xi}^{\text{оставл. части}} &= 0; \\ Q_y + \sum Y_i^{\text{оставл. части}} &= 0; & M_y + \sum M_{yi}^{\text{оставл. части}} &= 0; \\ N + \sum Z_i^{\text{оставл. части}} &= 0; & M_z + \sum M_{zi}^{\text{оставл. части}} &= 0. \end{aligned}$$

Или, как легко можно доказать:

$$\begin{aligned} Q_x &= \sum X_i^{\text{отброш. части}}; & M_x &= \sum M_{xi}^{\text{отброш. части}}; \\ Q_y &= \sum Y_i^{\text{отброш. части}}; & M_y &= \sum M_{yi}^{\text{отброш. части}}; \\ N &= \sum Z_i^{\text{отброш. части}}; & M_z &= \sum M_{zi}^{\text{отброш. части}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & \sum M_{xi} &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; & \sum M_{yi} &= 0; \\ \sum Z_i &= 0; & \sum M_{zi} &= 0. \end{aligned}$$

е действие на оставшуюся часть бруса ... образом по поверхности поперечного

иведением к главному вектору и нтр тяжести поперечного сечения.

5. Разложим главный вектор и главный момент на

6. Полученные компоненты имеют в сопротивлении материалов специальные названия, соответствующие видам деформации:

$R_z = N$ – нормальная сила, $R_x = Q_x$, $R_y = Q_y$ – поперечные силы и M_z – крутящий момент, M_x , M_y – изгибающие

моменты. Поскольку оставленная часть бруса должна остаться в равновесии, полученные внутренние силовые факторы могут быть определены: из уравнений равновесия, составленных для этой части:

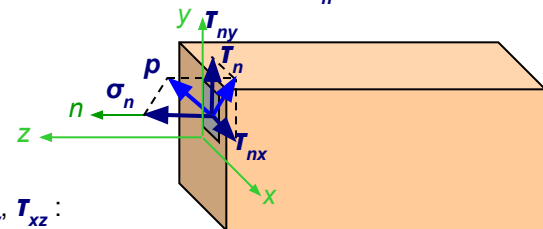
Лекция 2

■ Напряжения – мера, характеризующая распределение внутренних сил по сечению.

Поскольку внутренние силы, представляют собой поверхностные силы, приложенные к поперечному сечению оставленной части, то интенсивность этих сил, называемое **полным напряжением**, определяется как указано ранее: Размерность этого напряжения совпадает с размерностью поверхностной нагрузки (Н/м^2 , $\text{МПа} = 10^6 \text{ Н/м}^2$).

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}$$

Полное напряжение, как и равнодействующая внутренних сил, приложенных на элементарной площадке, является векторной величиной и может быть разложено на две составляющие: перпендикулярное к рассматриваемой площадке – **нормальное напряжение σ_n** и касательное к площадке – **касательное напряжение T_n** :

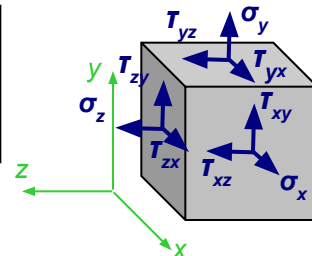


Касательное напряжение, в свою очередь, может быть разложено на две составляющие, параллельные координатным осям x, y , связанным с поперечным сечением – T_{nx}, T_{ny} :

При анализе напряжений в окрестности рассматриваемой точки выделяется бесконечно малый объемный элемент (параллелепипед со сторонами dx, dy, dz), по каждой грани которого действуют, в общем случае, три напряжения, например, для грани, перпендикулярной оси x (площадка x) – σ_x, T_{xy}, T_{xz} :

Компоненты напряжений по трем перпендикулярным граням элемента образуют систему напряжений, описываемую так называемым **тензором напряжений**:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \end{pmatrix}$$



Здесь пер
нормальн
индекс ук
нормальн

Напомним, что **опорные реакции конструкции включаются в число внешних сил**. Для определения этих реакций в статически неопределимых системах уравнений равновесия недостаточно и следует дополнительно рассматривать **перемещения**, связанные с внутренними усилиями и напряжениями, а также физические соотношения упругости.

Задача определения напряжений в силу интегральности соотношений с внутренними усилиями всегда статически неопределима и необходимо дополнительно рассматривать **деформации** тела с целью определения закона распределения напряжений по сечению.

■ Связь в

связаны у
усилия ес
выполняет

сечении. С другой стороны внутренние
элементарным площадкам (напряжений),
сечению.

Выполнение этой операции для каждого из внутренних усилий приводит к следующим интегральным выражениям:

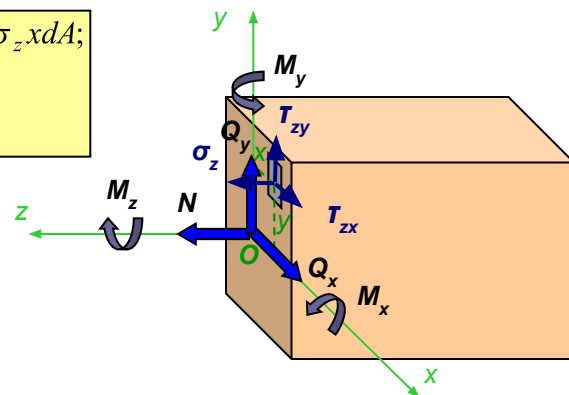
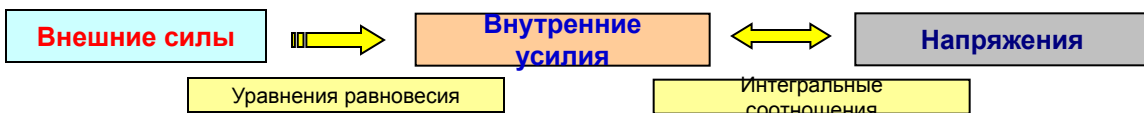
$$N = \int_A \sigma_z dA;$$

$$Q_x = \int_A \tau_{zx} dA; \quad Q_y = \int_A \tau_{zy} dA;$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA; \quad M_y = -\int_A \sigma_z x dA;$$

$$M_z = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA.$$

Таким образом, в целом связь внешних сил, внутренних усилий и напряжений такова:



Лекция 2 (продолжение – 2.2)

- **Перемещения** – переход точек тела в новое положение вследствие изменения формы и размеров тела под действием нагрузки. Полное перемещение точки в пространстве раскладывается на компоненты u , v и w , параллельные осям x , y и z , соответственно. Перемещения рассматриваемой точки зависят от деформации всех нагруженных областей тела и включают в себя перемещения как жесткого целого ненагруженных областей. Таким образом, перемещения не могут характеризовать степень деформирования в окрестности рассматриваемой точки.

- **Деформация в точке** – мера деформирования материала в ее окрестности. Выделим в рассматриваемой точке тела элементарный объем (параллелепипед со сторонами dx , dy , dz) и рассмотрим его возможные изменения размеров и формы.

Пусть за счет деформации длины его ребер получат **абсолютные удлинения** Δdx , Δdy и

Относительные линейные деформации в точке:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}; \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}; \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}.$$

Кроме линейных деформаций, связанных с изменением размеров линейных элементов возникают **угловые деформации** или **углы сдвига**, связанные с изменением формы.

Например, в плоскости xu могут возникнуть малые изменения первоначально прямых углов параллелепипеда:

$$\frac{\Delta x}{dy} = \operatorname{tg} \gamma_{xy} \approx \gamma_{xy}.$$

Такие угловые деформации в общем случае могут иметь место во всех трех плоскостях. Все относительные деформации весьма малы и имеют для реальных материалов порядок $\approx 10^{-4}$ - 10^{-3} .

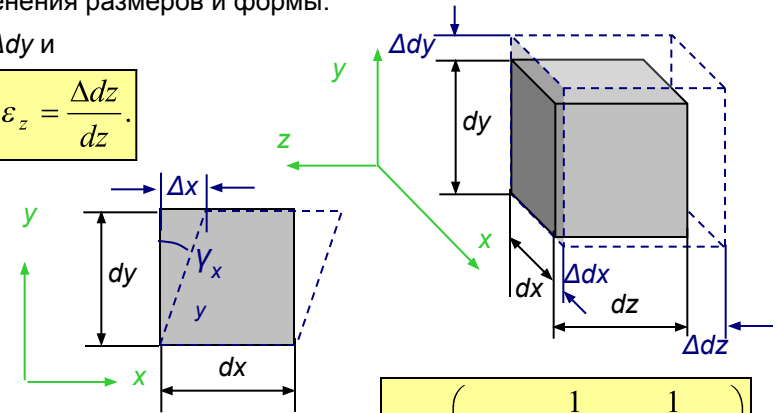
Таким образом, совокупность относительных линейных и угловых деформаций определяют деформированное состояние в точке и образуют **тензор деформаций**, подобный тензору напряжений:

Примечание: Половинные углы сдвига используются в целях получения аналогичных формул преобразования с тензором напряжений.

В зависимости от того, какие из компонент относительных деформаций имеют нулевое значение в рассматриваемой области или для всего тела различают следующие **простые виды деформаций**:

1. **Линейная деформация** – $\varepsilon_z \neq 0$, углы сдвига равны нулю, остальными линейными относительными деформациями пренебрегается (характеризуется абсолютным и относительным удлинением).
2. **Плоская деформация** – $\varepsilon_z \neq 0$, $\varepsilon_x \neq 0$ или $\varepsilon_y \neq 0$, остальные относительные деформации равны нулю (характеризуется абсолютным и относительным сужением площади поперечного сечения). Эти виды деформаций обычно реализуются при растяжении-сжатии.
3. **Объемная деформация** – $\varepsilon_z \neq 0$, $\varepsilon_x \neq 0$, $\varepsilon_y \neq 0$, углы сдвига равны нулю (характеризуется абсолютным и относительным изменением объема).
4. **Чистый сдвиг** – линейные относительные деформации равны нулю, углы сдвига не равны нулю (характеризуется изменением формы, изменение объема не происходит). Это вид деформации также возникает при кручении.

В соответствии с видом деформации вначале последовательно изучают такие простейшие напряженно-деформированные состояния как растяжение-сжатие, чистый сдвиг и кручение, чистый изгиб. Далее изучаются более сложные – поперечный изгиб, сложное сопротивление, продольный изгиб.



$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Лекция 2 (продолжение – 2.3)

■ **Определение внутренних усилий** – Внутренние усилия определяются **методом сечений** в совокупности точек по длине бруса с целью обнаружения их максимальных значений. График изменения внутреннего усилия по оси бруса называется **эпюрой**.

Общий порядок построения эпюр внутренних усилий:

1. Если необходимо, то **определяются опорные реакции** так, как это делается в курсе теоретической механики (выбрать объект, отбросить связи, заменить отброшенные связи реакциями, составить уравнения равновесия). Реакции можно не находить, если они не входят в число внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения.

2. **Определяется число участков** бруса, на которых действует та или иная нагрузка. Число участков зависит от фактора, влияющий на резкое (скачкообразное) место расположения опоры, точка приложения сосредоточенной силы, начало или конец распределенной нагрузки.

3. **На каждом из участков проводится сечение** и на каждом сечении указывается текущая продольная сила. При выборе начала локальных координат сечения z необходимо указать, в какую сторону от сечения направлена ось z .

4. Для рассматриваемого сечения отбросим левую часть бруса или оставленную часть или используя установленную сторону от сечения.

5. По полученным выражениям строим эпюру продольных сил, откладывая значения координат в разрешенном направлении.

Из уравнения равновесия получаем выражение для продольной силы на участке 1: $N^{I-I} = F_1 - F_2$.

Повторяем шаги 3 и 4 для следующих участков:

3. Проведем сечение **II-II** на втором участке и определим текущую координату сечения и пределы ее изменения: $0 \leq z_2 \leq b$.

4. Отбросим левую часть, заменим ее действие продольной силой N^{II-II} и составим уравнение равновесия в проекции на ось z : $\sum Z_i = 0; -N^{II-II} - F_2 = 0$.

Из уравнения равновесия получаем выражение для продольной силы на участке 2: $N^{II-II} = -F_2$.

Аналогично получаем для участка 3 ($0 \leq z_3 \leq c$): $\sum Z_i = 0; -N^{III-III} = 0$. $N^{III-III} = 0$.

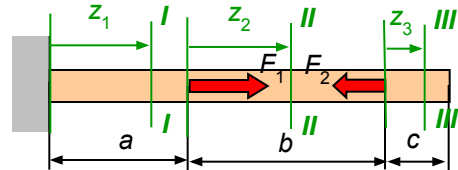
Полученные выражения показывают, что **продольная сила в сечении равна алгебраической сумме проекций на ось бруса сил, взятых по одну сторону от сечения!**

$$N = \sum F_{xi}^{прав} = \sum F_{xi}^{лев}$$

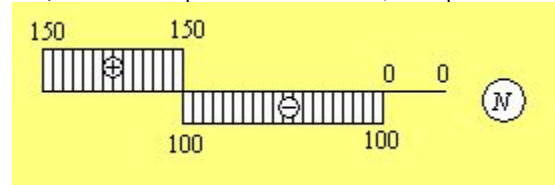
Знак слагаемых положителен, если рассматриваемая сила направлена от сечения, т.е. будучи приложена к сечению вызывает растяжение части бруса по другую сторону от сечения.

■ **Внутренние усилия при растяжении** – фактор – **продольная сила N**. В соответствии с уравнения равновесия в проекции на ось, с

■ Продольная сила считается **положительной**, если она вызывает **растяжение**, т.е. направлена от сечения (в сторону внешней нормали), и **отрицательной**, если она вызывает **сжатие**, т.е. направлено к сечению.



И пусть **прямолинейный брус** нагружен **продольными силами**. Строим эпюру продольных сил:
 При построении **эпюры N**, положительные значения обычно откладываются вверх от базисной линии или вправо, если она вертикальна. Реакции левой опоры можно не определять, т.к. в этом примере можно ограничиться рассмотрением лишь сил, действующих на оставленную часть (справа от сечений). Пусть $F_1 = 200$ кН, $F_2 = 100$ кН. Откладывая на каждом из участков значения продольной силы в некотором выбранном направлении, получаем эпюру N:



Проведем сечение **I-I** на первом участке и определим текущую координату сечения и пределы ее изменения: $0 \leq z_1 \leq a$.
 Отбросим левую часть, заменим ее действие продольной силой N^{I-I} . Составим уравнение равновесия в проекции на ось z : $\sum Z_i = 0; -N^{I-I} + F_1 - F_2 = 0$.

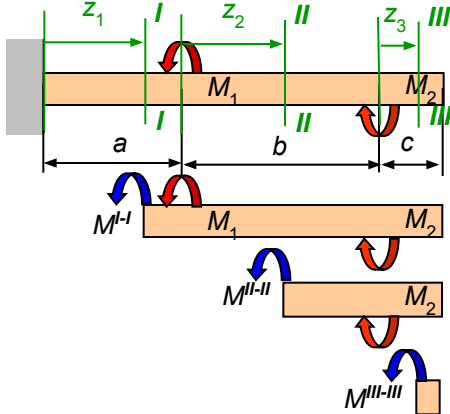
$$\sum Z_i = 0; -N^{I-I} + F_1 - F_2 = 0$$

Лекция 2 (продолжение – 2.4)

- Внутренние усилия при кручении** – При кручении в поперечном сечении стержня возникает лишь один силовой фактор – **крутящий момент M_z** . В соответствии с методом сечений величина и направление крутящего момента может быть найдены из уравнения равновесия в моментах относительно оси, совпадающей с осью стержня, составленного для оставленной части:
- Крутящий момент считается **положительным**, если при взгляде на сечение со стороны внешней нормали он поворачивает сечение **по ходу часовой стрелки**.

Внимание! Это правило знаков условное и не совпадает с принятыми правилами знаков моментов, углов поворота в теоретической механике и математике, поскольку связано не с системой координат, а с видом деформации оставленной части, точно также, как правило знаков для продольного усилия связано не с направлением оси z , а с видом деформации рассматриваемой части бруса.

- Построение эпюры крутящих моментов** принципиально ничем не отличается от построения эпюры продольных сил. Положительные значения откладываются вверх от горизонтальной базовой линии, а отрицательные – вниз.



Пусть прямолинейный брус нагружен внешними сосредоточенными крутящими моментами M_1, M_2 :

Используя полученные выражения для крутящего момента построим эпюру крутящих моментов: Пусть $M_1=250$ Нм, $M_2=100$ Нм. Откладывая на каждом из участков значения крутящего момента в некотором выбранном масштабе получаем эпюру M_z :

Обратите внимание, что **скачки на эпюре M_z располагаются в точках приложения внешних сосредоточенных моментов и равны величинам этих моментов**. Соответственно скачок на левом конце эпюры дает величину опорного момента.

в моментах относительно оси z . $\sum M_{zi} = 0; -M_z^{I-I} - M_1 + M_2 = 0$.

Из уравнения равновесия получаем выражение для крутящего момента на участке 1: $M_z^{I-I} = -M_1 + M_2$.

Повторяем шаги 3 и 4 для следующих участков:

3. Проведем сечение II-II на втором участке и определим текущую координату сечения и пределы ее действия: $0 \leq z_2 \leq b$.

бросим левую часть, заменим ее действие крутящим моментом M_z^{II-II} . $\sum M_i = 0; -M_z^{II-II} + M_2 = 0$.

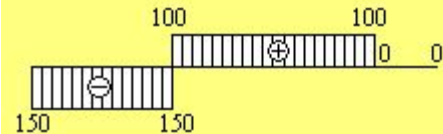
Из уравнения равновесия получаем выражение для крутящего момента на участке 2: $M_z^{II-II} = M_2$.

Аналогично получаем для участка 3 ($0 \leq z_3 \leq c$): $\sum M_{zi} = 0; -M_z^{III-III} = 0$. $M_z^{III-III} = 0$.

Полученные выражения показывают, что **крутящий момент в сечении равен алгебраической сумме моментов внешних сил относительно оси бруса, взятых по одну сторону от сечения!**

$$M_z = \sum M_{zi}^{\text{прав}} = \sum M_{zi}^{\text{лев}}$$

Знак слагаемых положителен, если рассматриваемый внешний крутящий момент вращает сечение по часовой стрелке при взгляде на сечение со стороны внешней нормали.



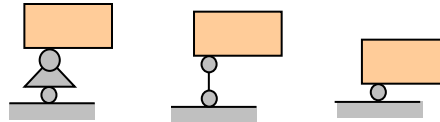
Лекция 3

■ **Основные типы опор и балок** – Стержни, работающие главным образом на изгиб, называются **балками**. Балки являются простейшими несущими конструкциями в мостах, промышленных и гражданских сооружениях. Балки опираются на другие конструкции или основание (стены, колонны, устои и др.).

■ **Схематизация опорных устройств** – упрощает реальные конструкции опорных устройств с сохранением функций ограничения перемещений. Схематизация большинства из опорных устройств рассмотрена в курсе теоретической механике и сводится к к нескольким типам опор:

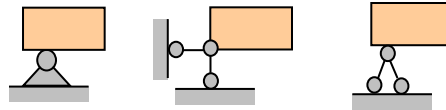
Шарнирно-подвижная (катковая) опора – ограничивает перемещение объекта по нормали к опорной плоскости (не препятствует повороту и перемещению по касательной к опорной плоскости).

Другие схематические изображения шарнирно-подвижной опоры:

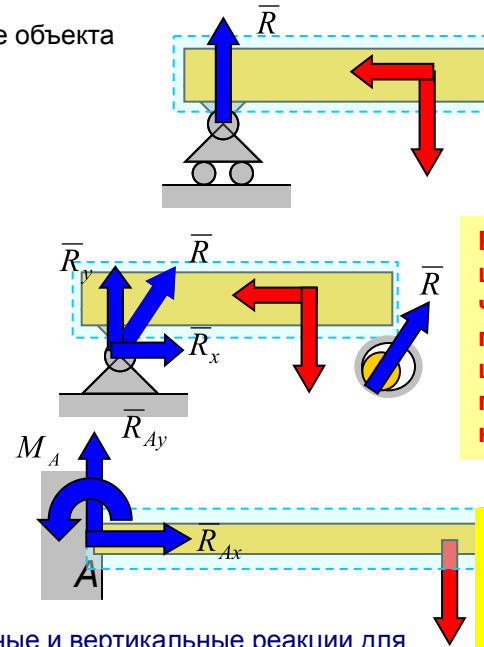


Шарнирно-неподвижная опора – ограничивает перемещение объекта как по нормали к опорной плоскости, так и по касательной (не препятствует повороту).

Другие схематические изображения шарнирно-неподвижной опоры:



Жесткое защемление (жесткая заделка) – ограничивает как поступательные, так и вращательные движения (линейные и угловые перемещения) объекта. В случае плоской системы сил (плоская заделка) ограничиваются перемещения по осям x , y и поворот в плоскости x , y .

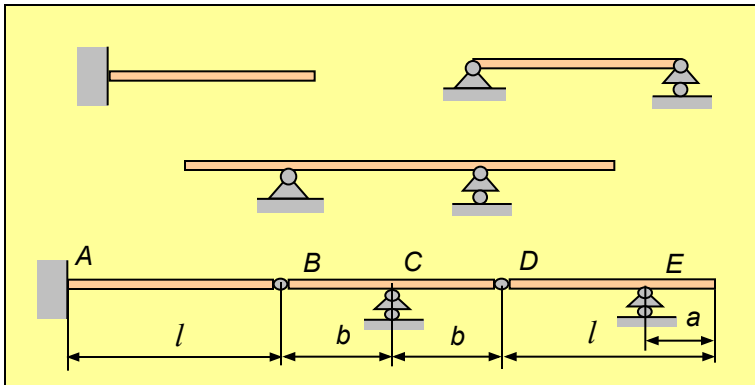


Реакция подвижного шарнира проходит через центр шарнира перпендикулярно оси шарнира и плоскости опирания.

Реакция неподвижного шарнира проходит через центр шарнира

Реакцию неподвижного шарнира можно разложить на две составляющие, например, R_x и R_y ,

В жесткой плоской заделке возникает три реактивных усилия: две составляющие реактивные силы R_{Ax} и R_{Ay} , а также реактивный момент (пара сил) M_A .



...и горизонтальные и вертикальные реакции для (horizontal) и V_A (vertical).
...и три реакции по направлению трех координатных осей и три

...для обеспечения неподвижности балки (плоские системы – 3, пространственные – 6) ...о изменяемость системы.

- **Основные типы балок** – различаются способом закрепления:
- **Консоль** – один конец жестко защемлен, второй свободен.
- **Простая (двух опорная)** – по обоим концам шарнирные опоры.
- **Консольная (двух опорная)** – простая балка с консольными частями.
- **Составная балка** – составленная из двух или более простых, консольных балок и консолей.

Лекция 3 (продолжение – 3.2)

- **Определение опорных реакций в балках** – выполняется методами теоретической механики.
- **Уравнения равновесия** могут быть составлены в виде одной из трех форм:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0; \\ \sum Y_i = 0; \\ \sum M_{iA} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum X_i = 0; \\ \sum M_{iB} = 0; \\ \sum M_{iA} = 0 \end{cases} \begin{matrix} x \\ L \\ AB \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \sum M_{iC} = 0; \\ \sum M_{iB} = 0; \\ \sum M_{iA} = 0 \end{cases} \begin{matrix} C \\ \neq \\ AB \end{matrix}$$

Поскольку найденные опорные реакции участвуют в дальнейших расчетах (построение эпюр внутренних усилий, определение напряжений и перемещений) следует активно пользоваться этими формами уравнений так, чтобы в каждое из уравнений входила лишь **одна определяемая реакция**, чтобы исключить подстановку ранее найденных и не проверенных реакций. После независимого вычисления всех реакций **обязательно должна быть сделана проверка** составлением такого уравнения равновесия, в котором бы присутствовали все или большинство из найденных реакций. Поскольку балки несут преимущественно вертикальную нагрузку, то в общем случае рекомендуется воспользоваться **формой II** и проверить вертикальные реакции составлением **уравнения в проекциях на вертикальную ось**.

Помните, что неверно найденные реакции в любом случае приведут к неверным результатам при построении эпюр, определении напряжений и перемещений!

- **Внутренние усилия при изгибе** – При изгибе возникают в общем случае изгибающие моменты M_x, M_y и поперечные силы Q_x, Q_y . Если в поперечном сечении возникает только один изгибающий момент M_x , то такой изгиб называется **чистым**. В большинстве случаев дополнительно к изгибающему моменту возникает поперечная сила Q_y , и такой изгиб называется **поперечным**.

Если внешняя нагрузка и реактивные усилия лежат в одной плоскости, то такой изгиб называется **плоским**.

- **Правила знаков для изгибающего момента** – Изгибающий момент принимается положительным, если он изгибает элемент балки так, нижние волокна оказываются растянутыми, т.е. ось балки искривляется выпуклостью вниз.

- **Правила знаков для поперечной силы** – Поперечная сила принимается положительной, если она стремится повернуть элемент балки по ходу движения.

- **Дифференциальные зависимости** – Рассмотрим элемент балки длиной dz , нагруженный равномерно распределенной нагрузкой q , и заменим действующие на него силы и моменты. Выделенный элемент находится в равновесии и удовлетворяет уравнения равновесия: Из первого уравнения получаем:

$$\frac{dQ_y}{dz} = -q_y.$$

Производная от поперечной силы по продольной координате равна интенсивности распределенной нагрузки.

С использованием этих основных зависимостей получаем:

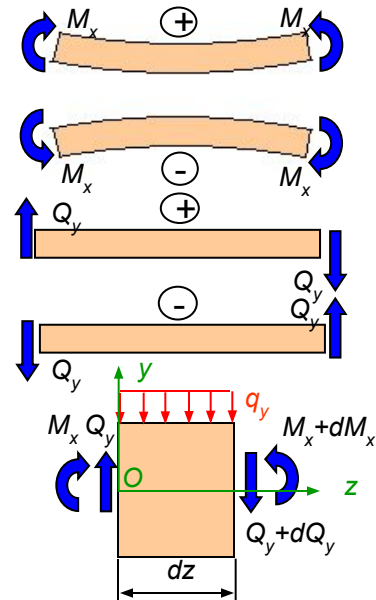
$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = -q_y.$$

Вторая производная от изгибающего момента по продольной координате равна интенсивности распределенной нагрузки.

Из второго уравнения, пренебрегая малыми второго порядка получаем:

Производная от изгибающего момента по продольной координате равна поперечной силе.

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y.$$

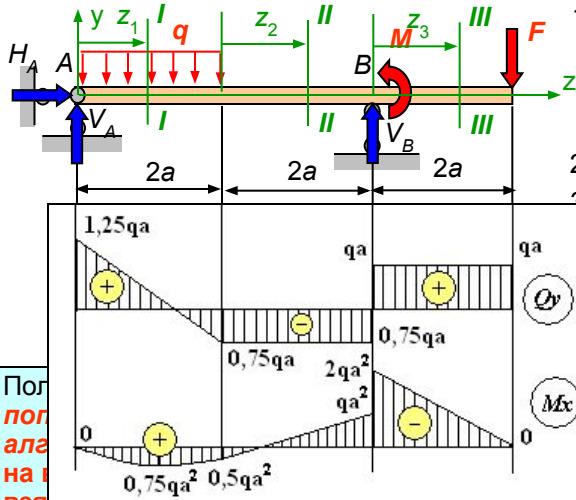


Лекция 3 (продолжение – 3.3)

Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил – принципиально ничем не отличается от построения эпюры продольных сил и крутящих моментов. Положительные значения поперечной силы Q_y откладываются вверх от горизонтальной базовой линии, а отрицательные – вниз. Положительные значения изгибающих моментов M_x откладываются **вниз** – со стороны растянутого волокна. Таким образом расположение ординат эпюры M_x указывают, какие волокна растянуты.

Примечание: Это правило принято в строительных и транспортных вузах в то время, как в машиностроительных и авиационных вузах используется обратное правило (положительный момент откладывается со стороны сжатого волокна).

Пусть балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой q , сосредоточенной силой $F=qa$ и крутящим моментом $M=qa^2$:



1. Определяем опорные реакции:

$$\sum Z_i = 0; \quad H_A = 0;$$

$$\sum M_{Ai} = 0; \quad -F6a + M + V_B 4a - (q2a)a = 0;$$

$$\sum M_{Bi} = 0; \quad -F2a + M + (q2a)3a - V_A 4a = 0;$$

$$V_B = 1,75qa$$

$$V_A = 1,25qa$$

2. Количество участков – 3.

$$F6a - M + q2a^2 \quad qa6a - qa^2 + q2a^2$$

Используя полученные выражения для поперечной силы и изгибающего момента построим эпюру поперечных сил и изгибающих моментов, подставляя значения реакций и координаты начала и конца участков. В случае квадратичного изменения величины (изгибающий момент на первом участке) дополнительно подставляется координата точки внутри интервала, например, посередине. Откладывая на каждом из участков значения поперечных сил и изгибающего момента в некотором выбранном масштабе получаем эпюры Q_y и M_x :

Отсюда получаем:

$$Q_y^{I-I} = V_A - qz_1.$$

$$M_x^{I-I} = V_A z_1 - q \frac{z_1^2}{2}.$$

повторяем шаги 3 и 4 для следующих участков:

сечение II-II на втором участке и определим текущую координату сечения и пределы ее $2a \leq z_2 \leq 4a$.

вторую часть, заменим ее действие поперечной силой Q_y^{II-II} и изгибающим моментом M_x^{II-II} уравнения равновесия в проекциях и в моментах относительно оси x , проходящей через его сечения (т.е. относительно точки D):

$$\sum Y_i = 0; \quad V_A - q2a - Q_y^{II-II} = 0; \quad \sum M_{Di} = 0; \quad -V_A(2a + z_2) + q2a(a + z_2) + M_x^{II-II} = 0.$$

получаем:

$$Q_y^{II-II} = V_A - q2a.$$

$$M_x^{II-II} = V_A(2a + z_2) - q2a(a + z_2).$$

получаем для участка 3 ($0 \leq z_3 \leq 2a$):

$$\sum Y_i = 0; \quad Q_y^{III-III} - F = 0; \quad \sum M_{Ei} = 0; \quad -M_x^{III-III} - F(2a - z_3) = 0.$$

$$Q_y^{III-III} = F.$$

$$M_x^{III-III} = -F(2a + z_2).$$

Свойства эпюр:

1. Равномерно распределенная нагрузка на участке своего действия вызывает на эпюре Q наклонную прямую линию, падающую в сторону действия нагрузки, а на эпюре M – параболу с выпуклостью в ту же сторону.
2. Сосредоточенная сила вызывает на эпюре Q скачок в точке приложения силы в сторону действия силы, а на эпюре M – перелом в ту же сторону.
3. Сосредоточенный момент не вызывает на эпюре Q в точке его приложения никаких особенностей, а на эпюре M вызывает скачок в ту же сторону.

Смотрите и удивляйтесь!