Введение в математический анализ

Организационные вопросы

1) Практические занятия проходят на кафедре медицинской информатики и физики в 26 пав.,4 этаж (левая лестница).
2) На первом практическом занятии - знакомство с преподавателем и узнаете номер аудитории, в которой будете заниматься весь семестр
3) Вход на кафедру ТОЛЬКО в сменной обуви! Переобуваться необходимо на 1-м этаже при входе в павильон!!!

Организационные вопросы

4) На занятия по физике, математике необходимо принести:
-сменную обувь;
-белый халат;
-тетрадь для практических занятий (отдельная тетрадь, 48 л.);
-полученную в библиотеке зеленую методичку;
5) На практических занятиях не следует:
-приходить с опозданием
-нарушать требования к внешнему виду
-нарушать правила техники безопасности
6) Все пропущенные занятия необходимо своевременно отрабатывать:

Организационные вопросы

«нб» на лекциях	по заявлению на отработку из деканата в назначенные дни отработки (расписание на стенде на кафедре)	Потребуется рукописный реферат по теме пропущенной лекции, объем 25 стр.
«нб» на практических занятиях		Необходимо переписать протокол выполненной на пропущенном занятии лабораторной работы
Неудовлетвори-тельные оценки	без заявлений на отработку по расписанию, назначенному преподавателем или по графику отработок у своего преподавателя	Необходимо переписать работу, за которую получена неудовлетворительная оценка (контрольная работа, тест)

Организационные вопросы

Физика, математика изучается весь учебный год:

1 семестр – 6 лекций и 6 практик
На последнем занятии 1-го семестра - компьютерный тест
2 семестр – 6 лекций и 6 практик
На последнем занятии 2-го семестра - компьютерный зачетный тест
Календарно-тематический план лекций и практик размещен на стенде кафедры и в соответствующем разделе СДО Moodle

Значение математики в медицине

Математические методы в медицине — совокупность математических подходов, используемых для:

- **построения моделей процессов или явлений, происходящих в живых организмах и их изучение;**
- **построения прогностических моделей, организации службы здравоохранения и охраны здоровья**
- **обработка экспериментальных данных методами математической статистики**

Использования математики в медицине

Медицинская практика сталкивается с необходимостью выявления и оценки множественных взаимозависимостей.

Так как анализ многомерных представлений на уровне их интуитивного понимания чрезвычайно затруднен, то в медицине при анализе физиологических процессов в организме, при решении задач диагностики и лечения заболеваний применяют математический аппарат (определяют функциональные зависимости, строят графики и изучают их свойства)

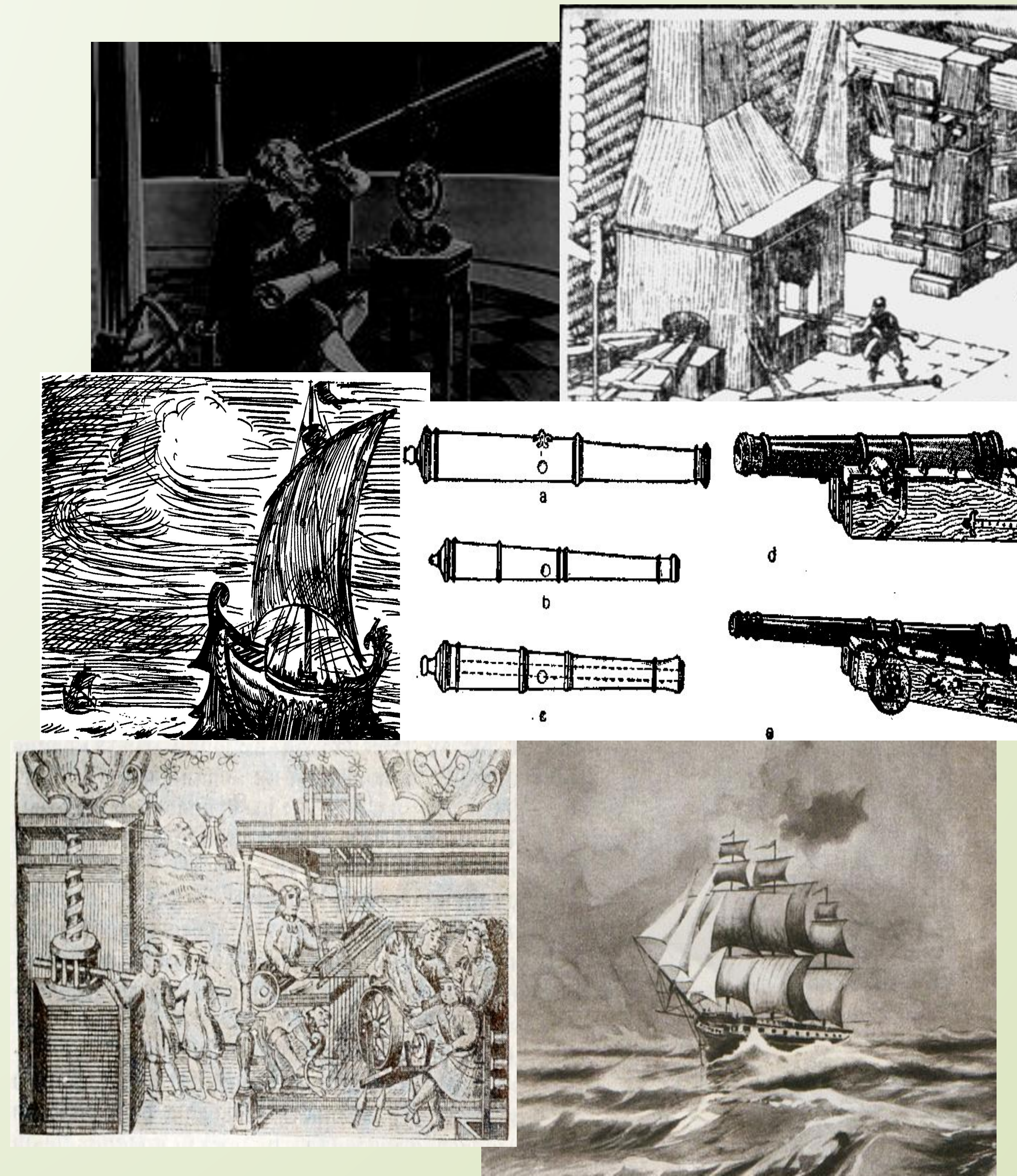
Примеры использования математики в медицине

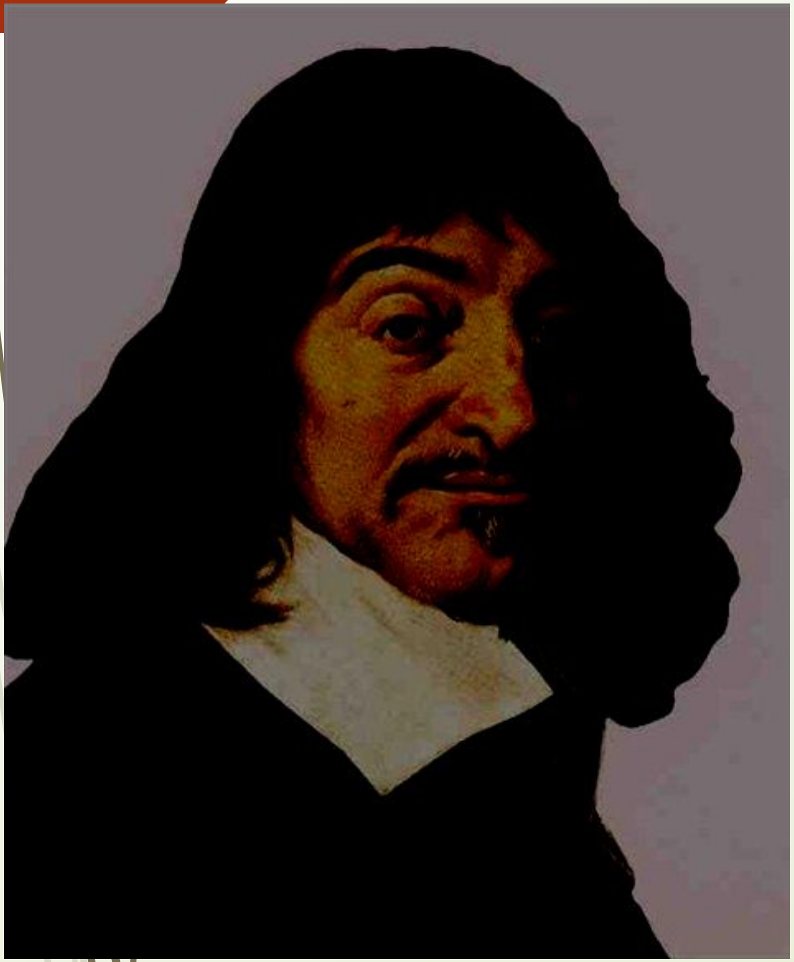
- модель крови как физико-химической системы, исследование проводится с помощью номограмм — многомерных графиков с 8—10 координатами;
- расчет скорости сокращения длины мышцы (нахождение производной)
- вычисления ударного и минутного объема сердца по измеряемым данным частоты сердечных сокращений и формы кривой АД
- описание течения процессов в сердечно-сосудистой системе с помощью модели эластичного резервуара (линейное дифференциальное уравнение)
- передача управляющих сигналов по нервным волокнам, как особый тип волны - солитон

История развития математического анализа

Создание и развитие математического анализа в 17 – 18 веках

- 17 век характеризуется бурным прогрессом в техники. Возникают мануфактуры. В военном деле развивается артиллерия. Начинаются регулярные морские путешествия. Это требовало разработки точных расчетов и измерений, а значит новых математических методов.





Рене Декарт
(1594 – 1650 гг.)

- Важнейшей заслугой *Рене Декарта* было введение переменной величины, это позволило математикам изучать процессы в динамике. Но его методы носили, в основном алгебраический характер, т.к. изучал он в основном кривые, заданные алгебраическими уравнениями. Однако, развитие науки и техники требовало изучения и класса кривых не алгебраического типа.

Для формирования общих методов решения геометрических задач Декартом была введена координатная система на плоскости для задания изучаемых кривых их уравнениями. Математический анализ не только упростил методы их изучение, но привел к открытию новых классов кривых.

***Например*, кривую *x+y – 3axy=0*. Эта кривая называется *Декартов лист*.**

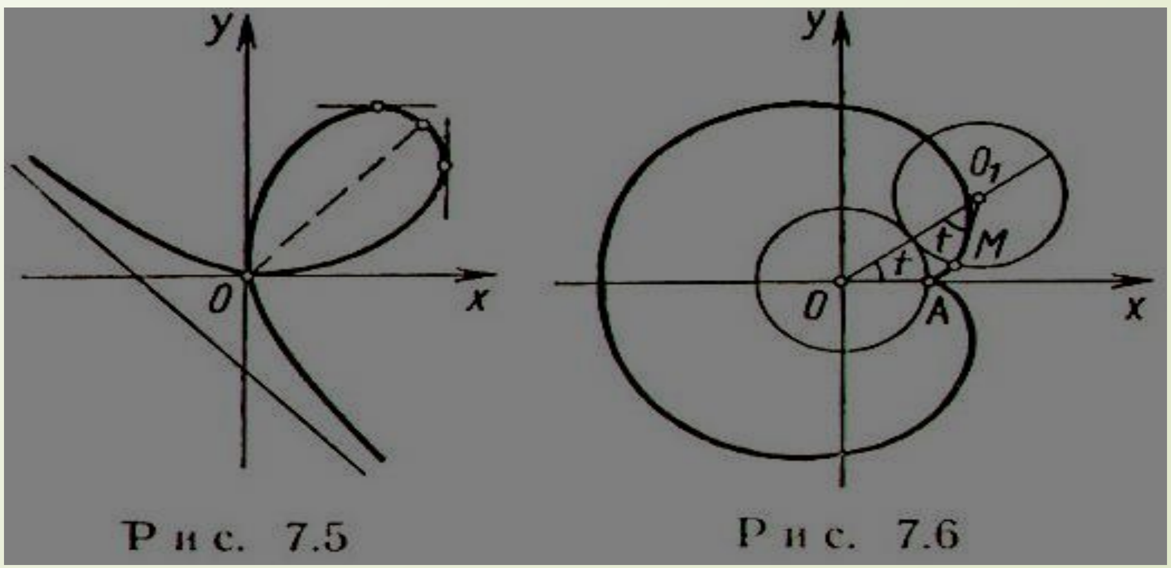
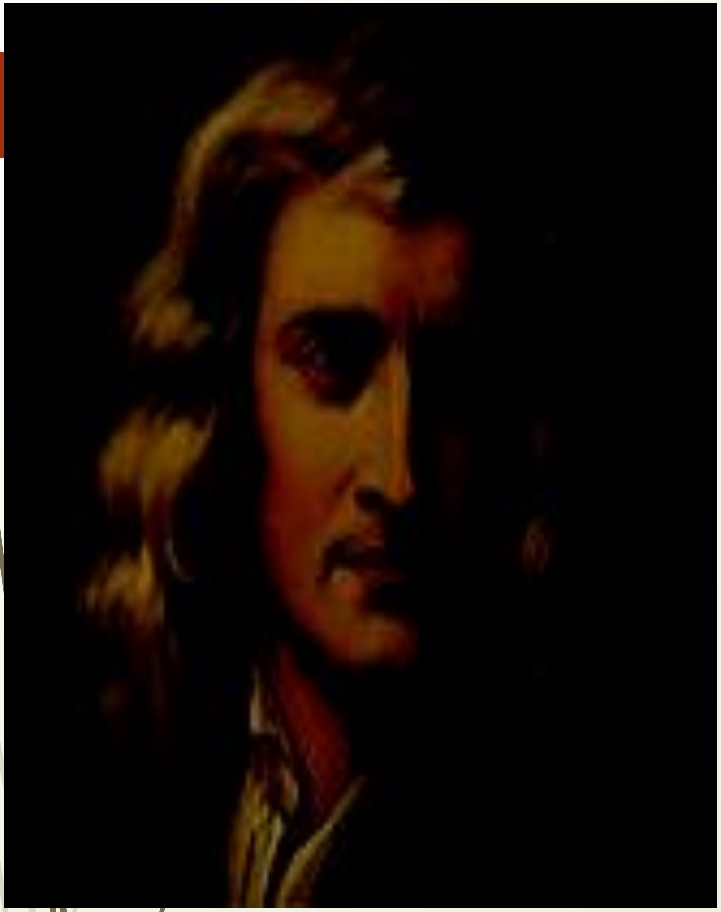


Рис. 7.5 Рис. 7.6

Важнейшие открытия в теории измерения площадей и объёмов сделал немецкий учёный – астроном *Иоганн Кеплер* (автор *трёх законов астрономии*, открывший что планеты движутся не по окружностям, как думал *Коперник*, а по эллипсам).

Иоганн Кеплер (1571-1630 гг.)



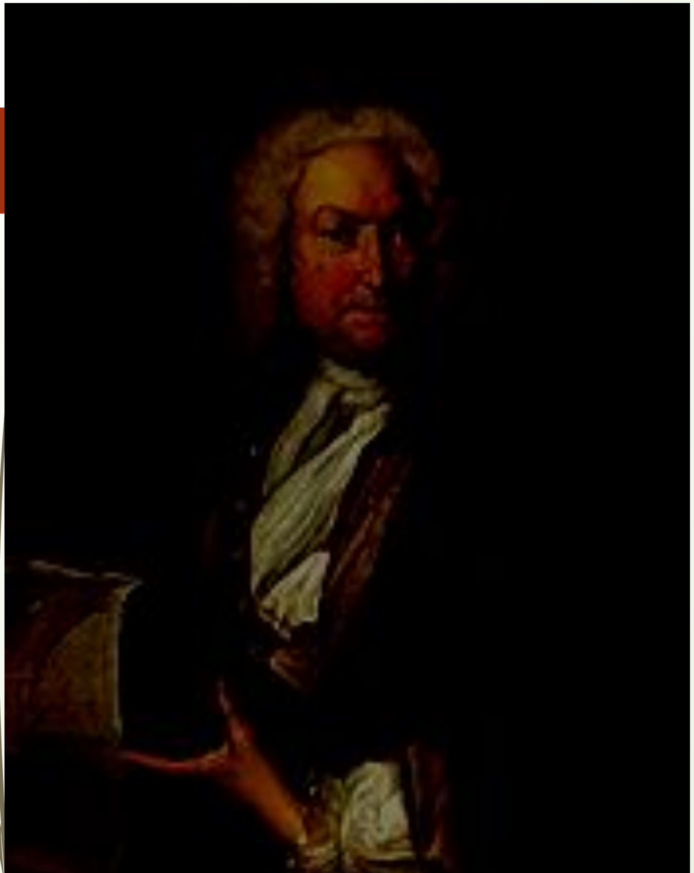
Исаак Ньютон

(1642-1727 гг.)

<u>Ньютон</u> **является создателем современной механики движения твердых тел, оптики и других областей физики. Он открыл закон всемирного тяготения, для чего ему пришлось ввести новое понятие - производной и разработать методы решения дифференциальных уравнений. Однако, он не дал этим понятиям строгого обоснования. С помощью разработанных им методов** ***<u>Ньютон</u>*** **сумел на основе закона всемирного тяготения подтвердить три закона** ***<u>Кеплера</u>*** **о движении планет.**

Готфрид Лейбниц
(1646 —1716 гг.)

Современник *Ньютона,* немецкий математик *Готфрид Лейбниц* обобщил теорию дифференциального и интегрального исчисления исходя из разработанного им аппарата бесконечно малых величин.
Если Ньютон исходил из задач физики и интерпретировал производную как скорость, то *Лейбниц* создал новый раздел математического анализа - теорию бесконечно малых величин.
Спор между учёными о приоритете привёл к тому, что в Англии более ста лет не использовали более удобные обозначения *Лейбница* для производной и интеграла: «´» и «∫». *Лейбниц* ввёл для них и общепринятые и сегодня названия: *«дифференциал»* и *«интеграл»*.

Продолжателями идей *<u>Лейбница</u>* были его ученики братья *<u>Бернулли</u>* (Иоганн и Якоб). Развили аппарат и правила интегрального и дифференциального исчисление. Заложили основы теории вероятности, открыли закон больших чисел, работы в гидродинамике

Леонард Эйлер

- Важную роль в развитие математики 18 века сыграл Леонард Эйлер. Родился в Швейцарии в 1707 году. Переехал в Россию и работал в Петербургской Академии Наук до 1741 года. После чего 20 лет жил и работал в Берлине.
- В Россию вернулся в 1762 году, где жил и работал до смерти (1783 год). Эйлер отличался необыкновенной научной плодовитостью. Ещё через 100 лет после его смерти журналы печатали его неопубликованные работы (более 80 томов). Эйлер работал во всех областях математического анализа и был одним из создателей математической физики и теории специальных функций.
- Заложил основы теории графов. Работы по теории чисел

Строгость методов исследования функций в математическом анализе была достигнута в работах французского математика *Огюстена Коши.*

Анализ базировался на введенном понятии предела функции. Он предложил, такие ставшие классическими определения как *предел и непрерывность функции. Им* доказан ряд теорем математического анализа.

Огюстен Коши (1789-1857 гг)

Карл Вейерштрасс
(1815 – 1897 гг.)

Георг Кантор
(1845 – 1918 гг.)

Дальнейшее развитие идей Коши основывались на возникшей теории действительных чисел. Это направление было заложено во второй половине 19-го века немецкими математиками ***Вейерштрассом*** и ***Кантором***.

Вейерштрассом были заложены основы теории аналитических функций и вариационного исчисления

Работы Кантора привели к формализации понятия конечного и бесконечного множества. Введены понятия множества и его мощности.
В результате, вся математика была перестроена на теоретико-множественную основу. Это позволило устранить парадоксы связанными с определением понятия бесконечности в классическом математическом анализе.

Функции и пределы

Функцией называется правило, по которому каждому элементу X некоторого множества K соответствует единственный элемент Y другого множества L.

Графиком функции y=f(x) называется множество точек плоскости XOY для каждой из которых абсцисса X является значением аргумента, а ордината Y – соответствующим значениям данной функции.

Элементарной называется функция, составленная из основных базовых элементарных функций с использованием действий «+», «−», «÷», «*» и операций взятия функции от функции, последовательно примененных конечное число раз.

Функция y= f(ϕ(x)) называется *сложной функцией* или функцией от функции.

Способы задания функций

1) Аналитический (формула), в том числе и параметрический способ (пример).
2) Табличный.
3) Графический.

Основные элементарные функции

1) y=const; 2) y=x^{α}; , α-действительное, $\alpha\neq 0$
3) y=ax; (|a|>0) 4) y= $\log_a x$; (a>0, a≠1)
5) y=a^x; a>0.

Тригонометрические

y=sin x, y=cos x, y=tg x, y=ctg x.

Обратные тригонометрические

y=arcsin x, y=arccos x, y=arctg x, y=arcctg x.

Пример параметрического задание функции

- Предположим, что функциональная зависимость y от x задана непосредственно в виде *y = f(x)*.

Вводя промежуточную величину — *t*. Тогда формулы

$$x = \varphi (t);$$

$$y = \psi (t).$$

задают параметрическое представление функции одной переменной *y = f(x)*.

Замечание: применяют в полярных системах координат.

Пример: **Уравнение окружности имеет вид:**

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Параметрическое уравнение окружности:

$$x = r \cos t ;$$

$$y = r \sin t ;$$

При $0 \le t < 2\pi$.

Любой интервал (a,b), содержащий точку x_0, называется *окрестностью* точки x_0.
Интервал (x_0- δ, x_0+ δ), где ε>0, симметричный относительно x_0, называется δ *-окрестностью* точки x_0.

Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, может быть, самой точки x_0.

Число А называется *пределом функции* f(x) *в точке* x_0, если для любого числа ε>0 найдется такое положительное число δ, что для любого $x \neq x_0$, удовлетворяющего неравенству $|x- x_0|< δ$, выполняется соотношение $|f(x)-A|< ε$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ: $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right) = A$

Число A_1 называется пределом функции $y=f(x)$ *слева в точке x_0*, если для любого наперёд заданного сколь угодно малого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что при всех $x \in (x_0-\delta, x_0)$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$

Предел функции $y=f(x)$ справа: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$

Пределы слева и справа называются *<u>односторонними</u>* пределами.

Если существуют односторонние пределы, оба равные A, то существует и предел функции, равный также A.

Если $A_1 \neq A_2$, то предел функции $f(x)$ в точке x_0 не существует.

Бесконечно малые функции

Функция f(x) называется *бесконечно малой* при x->x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Если α(x) – бесконечно малая функция (величина), то

$\dfrac{1}{\alpha(x)}=\beta(x)$ **- бесконечно большая величина,** т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=\infty$

Свойства бесконечно малых.

Теорема 1. Если функция f(x) имеет предел при x->x_0, равный A, то она представима в виде f(x) = A + α(x) , где α(x) – б.м.ф.

Справедливо и обратное: если функция f(x) представима как f(x) = A + α(x) при x->x_0, то её предел равен A.

Теорема 2. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых в точке функций есть бесконечно малая функция

Теорема 3. Произведение ограниченной при функции на бесконечно малую есть бесконечно малая функция.

Следствие 1. Произведение постоянной величины на бесконечно малую есть функция бесконечно малая.

Следствие 2. Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая

Непрерывные функции

Функция f(x) называется непрерывной в точке $x=x_0$, если $$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Функция f(x) называется *непрерывной* в данной <u>точке</u>, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$$

Функция f(x) называется *непрерывной* в <u>интервале</u>, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Если функция f(x) в точке x_0 не является *непрерывной*, то эта точка называется точкой разрыва, а функция разрывной в данной точке.

Основные теоремы о пределах

Теорема 1.

Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен сумме пределов этих функций.

$$\lim_{x \to x_0}\left(\sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i \left(\lim_{x \to x_0} f_i(x)\right), \ \boldsymbol{k} - \textbf{const}$$

Следствие.

Предел постоянной *C* равен самой постоянной $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$

Теорема 2.

Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций

$$\lim_{x \to x_0}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(\lim_{x \to x_0} f_i(x)\right)$$

Теорема 3.

Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций в случае, если предел знаменателя отличен от нуля.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}\text{, если } \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$$

Теорема 4.

Предел сложной, непрерывной функции определяется формулой

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to x_0} g(x))$$

Т.е. знак предела и функции можно менять местами

Определение производной

Пусть дана функция f(x), определенная и непрерывная на интервале (a,b).

Дадим аргументу *x* є (a, b) приращение Δx, такое что (x+ Δx) є (a, b).

Тогда функция f(x) получит приращение Δf =f(x+ Δx)- f(x):

Предел отношения приращения Δf функции f(x) к соответствующему приращению Δx аргумента x при стремлении Δx к нулю, называется ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ f(x) в точке *x*, при условии, что этот предел существует.

ОБОЗНАЧЕНИЕ:

$$f_x' = y_x' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Функция, для которой в точке x существует конечная производная называется <u>дифференцируемой в данной точке</u>.

Если функция имеет конечные производные во всех точках некоторого промежутка, то она называется <u>дифференцируемой на данном промежутке.</u>

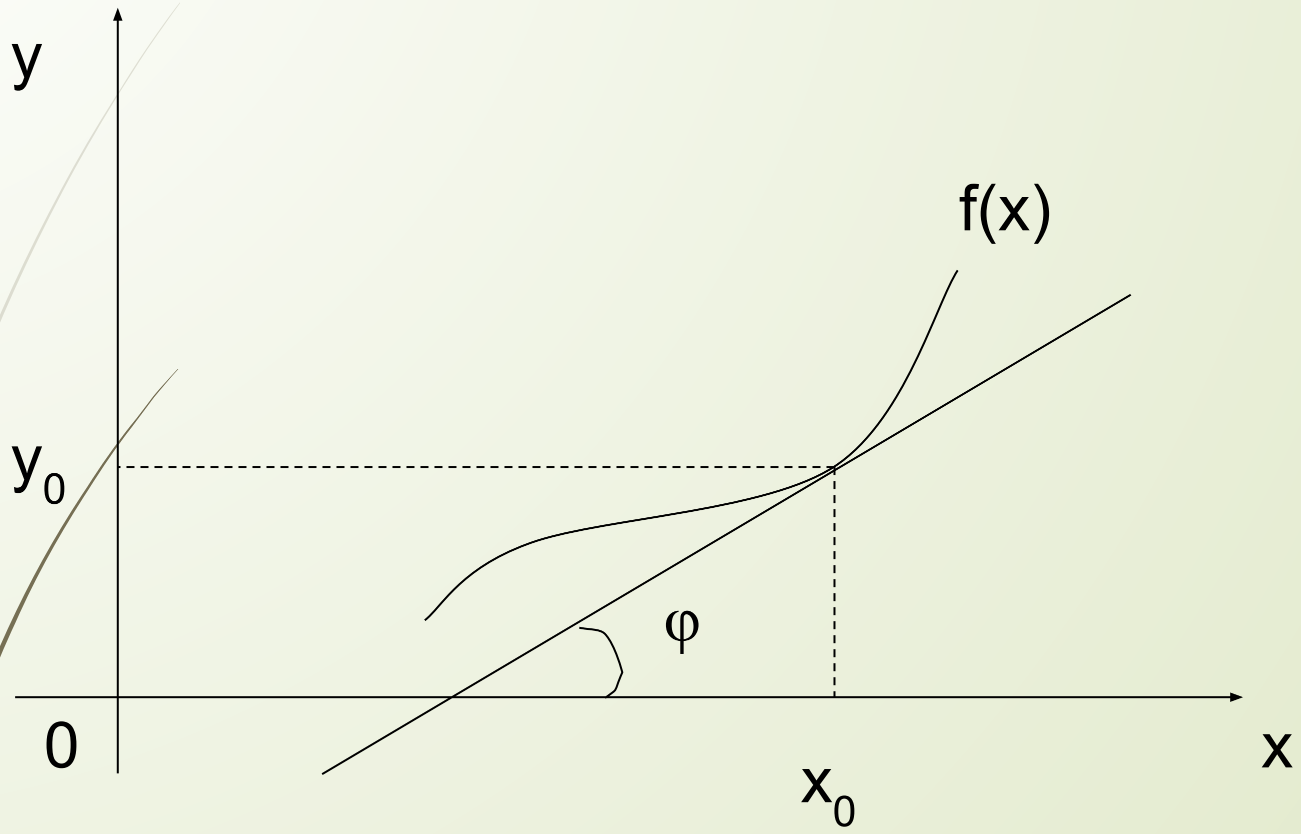
Физический смысл первой производной функции
Скорость протекания физических, химических и пр. процессов; находится как предел отношения приращения функции к приращению аргумента, стремящегося к нулю. (***физический смысл производной***)

Геометрический смысл первой производной.
Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику дифференцируемой функции в некоторой точке; численно равен производной функции в данной точке.
(угловой коэффициент касательной = тангенс угла наклона касательной)

$$k = tg\varphi = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Уравнение касательной к функции y=f(x) в точке (x_0, y_0) имеет вид: $\mathbf{y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0}$, где $y_0 = f(x_0)$

Графическая интерпретация производной



Непрерывность и дифференцируемость

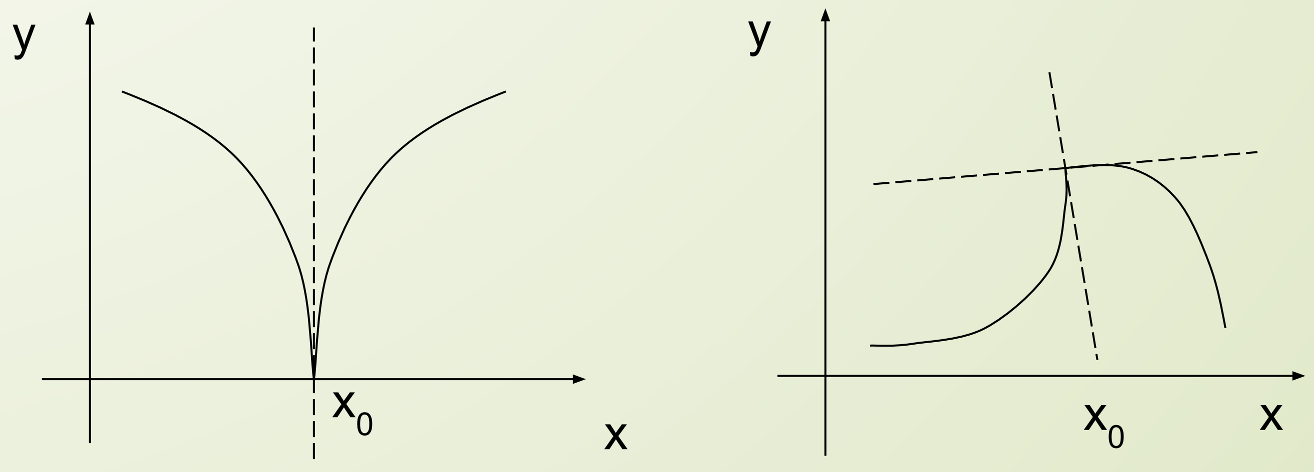
<u>Теорема</u>.

Если функция f(x) <u>дифференцируема</u> в некоторой точке x, то она <u>непрерывна</u> в этой точке.

$$\textit{дифференцируемость} \Rightarrow \textit{непрерывность}$$

Обратное утверждение неверно!

$$\textit{непрерывность} \not\Rightarrow \textit{дифференцируемость}$$



Правила дифференцирования

1. **Производная постоянной величины равна нулю.**

$$(C)'_x = 0, если \quad C - const$$

3. **Производная алгебраической суммы конечного числа функций равна сумме производных слагаемых**

$$(u + v + w + ... + m)' = u' + v' + w' + ... + m'$$

4. **Производная произведения двух функций определяется формулой**

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

5. **Производная частного от деления двух функций определяется формулой**

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Дифференциал функции

Понятие о дифференциале функции.

Определение: Дифференциалом функции называется величина, пропорциональная приращению независимой переменной и отличающаяся от приращения функции на бесконечно малую функцию высшего порядка малости по сравнению с приращением независимой переменной.

Механический смысл дифференциала

Если $s=f(t)$ есть путь, пройденный материальной точкой за время t, то производная s'_t есть скорость движения в момент времени

Дифференциал пути $\mathbf{ds = f'(t)\Delta t}$ приближенно равен пути, пройденному материальной точкой от момента времени t до момента времени $\mathbf{t+\Delta t}$, если пренебречь изменением скорости движения на данном промежутке времени.

Связь дифференциала функции с производной. Дифференциал независимой переменной.

Теорема 1.

Если функция имеет дифференциал, то эта функция имеет производную.

Следствие: $dy = \ y`_x \, \Delta x$

Теорема 2. - обратная

Если функция имеет производную, то эта функция имеет дифференциал.

Определение. Под дифференциалом независимой переменной понимается дифференциал функции, тождественной с независимой переменной, т.е. при y = x.

y′= 1, то dy = dx = Δx

Следствие: dy = $y'_x \cdot dx; y'_x = \dfrac{dy}{dx}$.

Производные высших порядков

Производную f’(x) функции y = f(x) называется **ПРОИЗВОДНОЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА** или просто **первой производной** этой функции.

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Производная функции является функцией => ее можно дифференцировать.

ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ или **производной второго порядка** называется производная от ее первой производной.

$$y'' = (y')' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Производная (n-1)-й производной (n є N) называется **ПРОИЗВОДНОЙ n-го ПОРЯДКА** или **n-й производной**.

Обозначение: $f^{(n)}(x)$

Свойства дифференциала

$$d(k \cdot u) = k \cdot du$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + dv \cdot u$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^{2}}$$

Интегрирование

Неопределенный интеграл

Интегральное исчисление решает задачу поиска функции *F(x)* по ее производной $F'(x) = f(x)$(или дифференциалу). Искомую функцию называют первообразной функции

Условие существования первообразной

Функция *F(x)* называется первообразной функции *f(x) на* ***интервале*** $(a;b)$ ***если***, $\forall x \in (a;b) \Rightarrow F'(x) = f(x)$

Определение: Множество всех первообразных

для $f(x)$ называется неопределенным интегралом и

обозначается $F(x)+C$, где **f(x)** подынтегральная функция, **f(x) dx** подынтегральное выражение, **x** переменная интегрирования

$$\int f(x)dx$$

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

Свойства неопределенного интеграла

1. **Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению,**

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

2. **Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной**

$$\int df(x) = F(x) + C$$

Свойства неопределенного интеграла

3. **Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла**

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$$

4. **Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций**

$$\int f(x)dx + \varphi(x)dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx$$

Таблица неопределенных интегралов

Пользуясь тем, что интегрирование – процесс обратный дифференцированию, можно получить таблицу основных интегралов путем обращения формул дифференцирования и использования свойств неопределенного интеграла

$$d(\sin u) = \cos u\,du \quad \Longleftrightarrow \quad \int \cos u\,du = \cos u + C$$

Отметим, что в таблице основных интегралов переменная интегрирования u может обозначать как независимую переменную, так и функцию от независимой переменой (согласно инвариантности формулы интегрирования).

Методы интегрирования

1. Метод **непосредственного интегрирования** Интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) приводится к одному или нескольким интегралам табличного вида

2. Метод **подстановкой** заключается во введении новой переменной интегрирования (т.е. подстановки). При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся **(в случае удачной подстановки)**

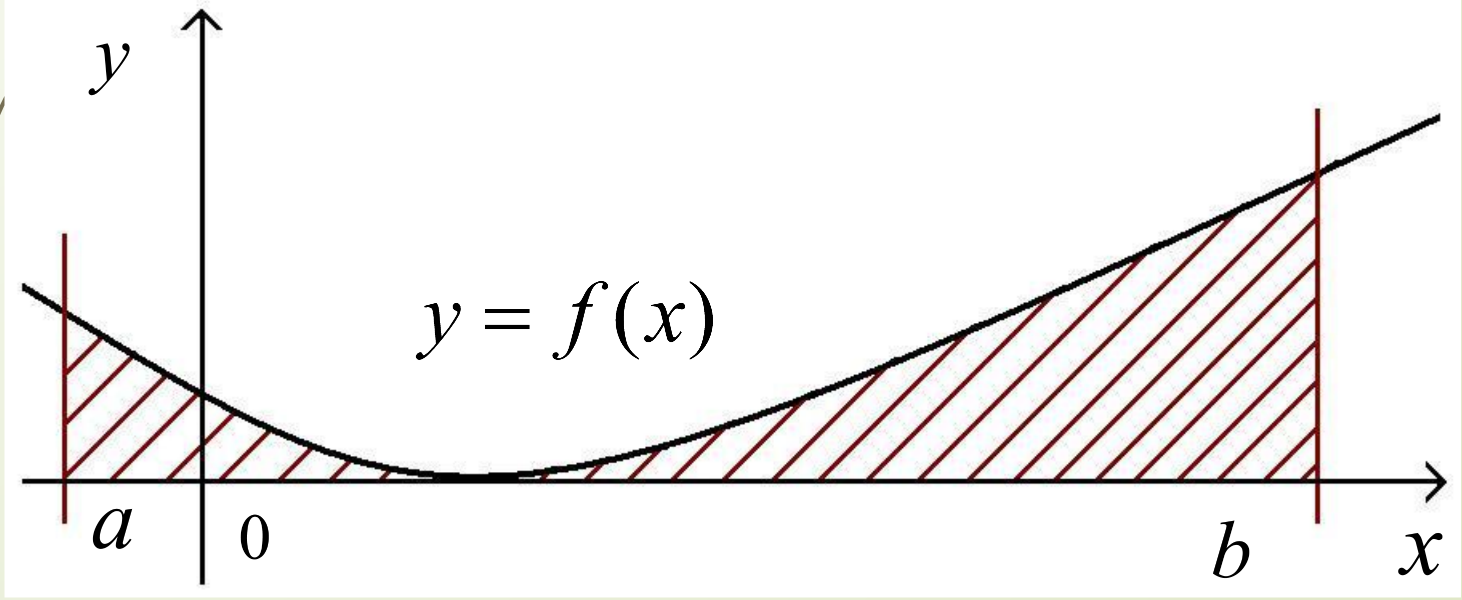
3. Метод **интегрирования по частям.** Сущность метода в том, что подынтегральное выражение представляется каким - либо образом в виде произведения двух сомножителей.

$$d(uv) = udv + vdu \quad \Longrightarrow \quad d(uv) = \int udv + \int vdu$$

Определенный интеграл

Понятие определенного интеграла (геометрический смысл)

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной неотрицательной $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ численно равен площади прямолинейной трапеции, ограниченной осью *OX*, прямыми $x=a,\ x=b$ и графиком функции $y=f(x)$.



Связь и отличие определенных и неопределенных интегралов

Связь	Отличие
Как в определенном так и неопределенном в интеграле необходимо находить первообразную для функции $f(x)$.	Неопределенный интеграл – общее выражение для всех первообразных, а определенный интеграл – это число.

Определенный интеграл

Вычислить определенный интеграл, это определить одну из первообразных функции , $f(x)$, т.е. функцию $F(x)$ и найти разность

$$F(b) - F(a).$$

Правило выглядит так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Дифференциальные уравнения

Основные определения

Основные типы:

- Обыкновенные дифференциальные уравнения
- Уравнения в частных производных (уравнения матфизики)

Определение: Дифференциальным уравнением (n)-ого порядка называется соотношение, связывающее независимую переменную x, функцию y, и её производные до (n)-ого порядка включительно.

Определение: Наивысший порядок производной, входящий в уравнение называется порядком уравнения.

Дифференциальное уравнение в явной форме

Это дифференциальное уравнение, разрешенное относительно старшей производной

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x)...y^{(n-1)}(x))$$

Определение:

Всякая функция $y=\varphi(x)$ подставленная в дифференциальное уравнение обращает его в тождество, является решением искомого уравнения.

Вывод:

Решить уравнение – значит, найти всю его совокупность частных решений в заданной области.

Частное решение дифференциального уравнения

Это любое решение исходного дифференциального уравнения, которое находится из общего решения, если приписать определенные значения произвольным постоянным, в него входящим (т.е. задать систему начальных значений) – решение задачи Коши