МБОУ СОШ № 37
Туренко Екатерина Леонидовна
г. Хабаровск

- Понятие касательной
- Задача о касательной
- Задача о скорости движения
- Общее определение производной
- **Смысл производной**
- Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции
- Основные правила Дифференцирования функций
- Производная сложной функции
- Производная обратной функции
- Производная неявной функции
- Производная функции, заданной Производная функции, заданной Производная функции, заданной параметрически
- Понятие о производных высших порядков
- Теорема о конечном приращении функции и ее следствия
- Теорема Ролля
- Теорема Ферма
- Возрастание и убывание функции одной переменной
- Экстремум функции одной переменной
- Вогнутость и выпуклость графика функции. Точки перегиба

# Понятие касательной

***Определение:*** *Касательной к данной непрерывной кривой в данной ее точке М (точка касания) называется предельное положение секущей ММ', проходящей через точку М, когда вторая точка пересечения М' неограниченно приближается по кривой к первой.*

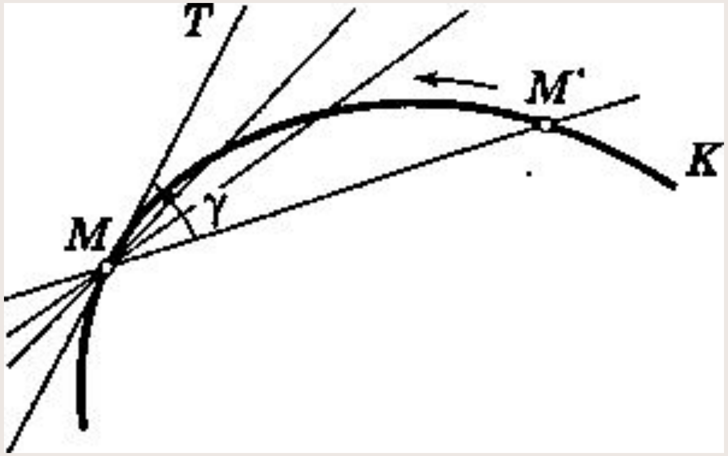



Рис. 1

# Задача о касательной

*Зная уравнение непрерывной линии*

$$y = f(x),$$

*найти уравнение касательной в данной ее точке М (x, y), предполагая, что касательная существует.*

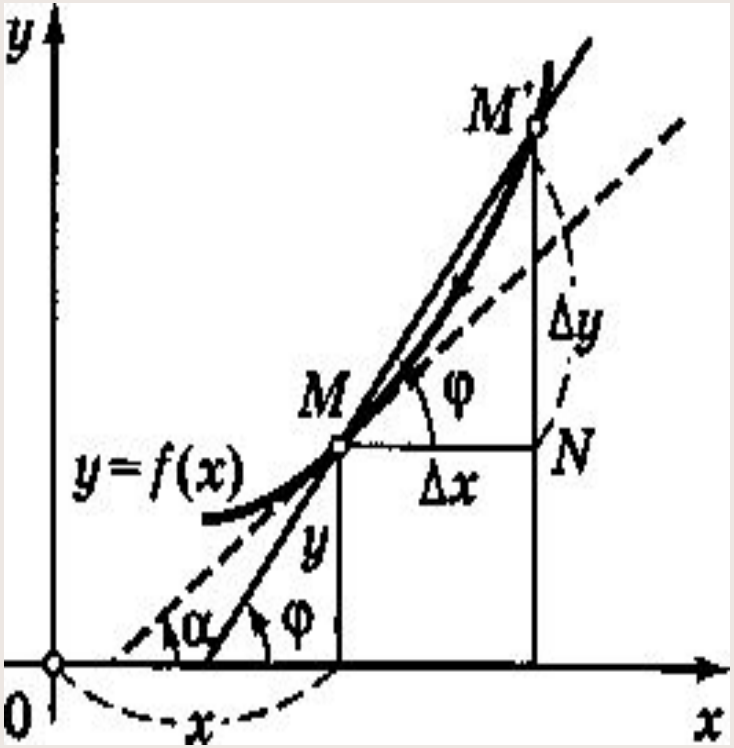
$$k = tg\varphi = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x)$$

$$tg\varphi \to tg\alpha$$

$$k = f'(x)$$

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$




$$Y - y = k(X - x)$$

Рис. 2.

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x)$$

# Задача о скорости движения

- Задача. *Знаая закон движения S=f(t), найти скорость движущейся точки для любого момента времени.*

$$OM = x$$

$$t + \Delta t$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$OM' = x + \Delta x$$

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$x + x\Delta = f + \Delta t$$

$$\Delta x = f(t+\Delta t) - f(t)$$

$$v = f'(t)$$

# Общее определение производной

***Определение:*** *Производной функции y = f(x) называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, если этот предел существует*

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Найти производную функции $y = x^2$

$\Delta x \neq 0$ $\quad \Delta y = (x + \Delta x)^2$ $\quad y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$

$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x * \Delta x + (\Delta x)^2$ $\quad$ (x2)' = 2x

$\Delta$

# Смысл производной

**Физический**

*Если функция описывает какой-либо физический процесс, то* $y = f(x)$ *есть скорость протекания* $y'$ *этого процесса.*

**Геометрический**

$f'(x) = k$ *касательной к графику функции y=f (x) в точке, абсцисса которой равна x.*

**Например**

*Точка движется прямолинейно по закону* $S = t^2$ *.Найти скорость движения в момент времени t=3*

*Уравнение касательной к кривой*

$$y = x^2 + 1$$

*в точке A(1;2)*

*y=kx+b*

$$k = y'(x) = (x^2 + 1)' = 2x$$

*k=2*1=2*

*2=2*1+b*

*b=0*

*y=2x*

# Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Мы видели, что функция

$$y = f(x)$$

называется *непрерывной в точке x,* если в этой точке

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Функция называется *дифференцируемой в точке x,* если в этой точке она имеет производную, т. е. если существует конечный предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

# Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции

**ТЕОРЕМА:**

*Если функция дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке функция непрерывна. Обратное утверждение неверно: непрерывная функция может не иметь производной.*

# Основные правила дифференцирования функций:

I. ***Производная постоянной*** *величины равна нулю.*

II. ***Производная алгебраической суммы*** *конечного числа дифференцируемых функций равна такой же алгебраической сумме производных этих функций.*

**III. *Производная произведения*** *двух дифференцируемых функций равна произведению первого сомножителя на производную второго плюс произведение второго сомножителя на производную первого.*

IV**. Производная частного.** *Если числитель и знаменатель дроби — дифференцируемые функции и знаменатель не обра щается в нуль, то производная дроби равна также дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя.*

# Производная сложной функции

**ТЕОРЕМА:**

*Если y = f(z)и z= $\varphi$(x)— дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции* $y = f[\varphi(x)]$

*существует и равна производной данной функции y по промежуточному аргументу z, умноженной на производную самого промежуточного аргумента г по независимой переменной x,* т. е.

$$y'_x = y'_z z'_x$$

**Например**

$y = \ln(x^2 - 3x + 1)$ $\quad y = \ln\varphi \quad$ $\varphi = x^2 - 3x + 1$

$$y'_x = y'_\varphi * \varphi'_x = \frac{1}{u}(2x - 3) \qquad \frac{2x-3}{x^2-3x+1}$$

# Производная обратной функции

**ТЕОРЕМА.** *Для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.*

*<u>Доказательство.</u> Пусть y = f(x)*

$\Delta y \neq 0$ $\qquad y'_x = f'(x) \neq 0$

$\Delta x \qquad x = \varphi(y)$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \frac{\Delta y}{x}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$x_y{}' = \frac{1}{y_x{}'}$$

Например *y=arctg x*

*x=tg x обратная для y*

$$y'_x = \frac{1}{(tgy)'} \qquad \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$\frac{\cos^2 y}{1} \qquad \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y}$$

$$1 + \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y} \qquad 1 + ctg^2 y$$

$$\frac{1}{1 + tg^2 x} \qquad \frac{1}{1 + x^2}$$

# Производная неявной функции

***Определение:*** *Если y как функция от x задается соотношением F(x, y)=0, где F(x, y) - выражение, содержащее x и y, то y называется неявной функции от x.*

## Алгоритм нахождения производных заданных функций в неявном виде.

*1) Находим производную от левой части равенства F(x, y)=0, рассматривая y как функцию от x и приравниваем ее к нулю.*

*2) Решаем полученное уравнение относительно y, в результате будем иметь выражение производной от неявной функции в виде y=f(x)*

**Пример.** Найти $y'$

$$x^3y^2+5xy+4$$

$$(x^3y^2)'+(5xy)+4'$$

$$(x^3)'y^2+x^3(y^2)'+(5x)'y+5xy'+0$$

$$3x^2y^2+x^32yy'+5y+5xy$$

# Производная функции, заданной параметрически

**ТЕОРЕМА:**

*Если функция y от аргумента x задана параметрически*

$$x = \varphi(t) \quad и \quad y = \psi(t)$$

*где функции* $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$

*дифференцируемы и* $\varphi'(t) \neq 0$, *то производная*

*этой функции есть* $y_x' = \dfrac{y_t'}{x_t'}$

Например

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \qquad x_t' = 2t \qquad y_t' = 3t^2$$

$$y_x' = y_t' : x_t' = 3t^2 : 2t = \frac{3}{2}t$$

# Понятие о производных высших порядков

*Производная f '(x) от функции f (x) называется производной первого порядка и представляет собой некоторую новую функцию. Может случиться, что эта функция сама имеет производную. Тогда производная от производной первого порядка называется производной второго порядка или второй производной и обозначается так: f ''(x). Итак,*

$$f''(x) = \left[f'(x)\right]'$$

$$f'''(x) = \left[f''(x)\right]'$$

**Пример**

1)Пусть y = sin x

***Тогда имеем последовательно***

$$y' = \cos x,\ y'' = -\sin x,\ y''' = -\cos x,\ y^{IV} = \sin x, \ldots\ldots$$

2)Пусть $y(x) = 4x^3 + 2\cos x$

Найти: $y'''$

$$y' = 12x^2 - 2\sin x$$

$$y'' = 24x - 2\cos x$$

$$y''' = -24x + 2\sin x$$

# Теорема о конечном приращении функции и ее следствия

**ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА:**

Конечное приращение дифференцируемой функции равно соответствующему приращению аргумента, умноженному на значение ее производной в некоторой промежуточной точке, т. е. если f(x) есть *дифференцируемая функция на некотором промежутке* $\langle a, b \rangle$ и $x_1$, $x_2$ ($x_1 < x_2$) *— любые значения из этого промежутка, то*

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi)$$

*где* $x_1 < \xi < x_2.$

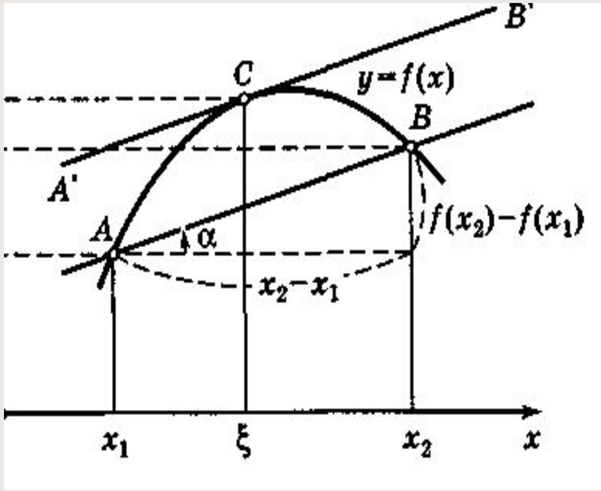
***Доказательство:*** $y = f(x)$

$A(x_1, f(x_1))$ $B(x_2\ f(x_2))$

$C(\xi, f(\xi))$ $x_1 < \xi < x_2.$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi)$$



# ТЕОРЕМА РОЛЛЯ:

***Между двумя последовательными корнями дифференцируемой функции всегда содержится, по меньшей мере, один корень ее производной.***

***Доказательство:*** В самом деле, если *f*(x) — дифференцируемая функция и $f(x_1) = f(x_2) = 0(x_1 < x_2)$

то из формулы имеем $(x_2 - x_1) f'(\xi) = 0$

или, так как , $x_2 \neq x_1$

$f'(\xi) = 0,$ где $x_1 < \xi x_2$

# ТЕОРЕМА ФЕРМА:

**Если функция y=*f* (x) определена и непрерывна (a, b) и пусть эта функция принимает max во внутренней точке $x_0$ этого интервала, тогда если существует** $f'(x_0)$, **то** $f'(x_0) = 0$

***Доказательство:*** Пусть в точке $x_0$ функция $y = f(x)$ принимает *max* значение для любых $x \in (a,b)$, $x_0 \in ]a,b[$ $\Rightarrow$ для любых, $x \in ]a,b[$ $f(x) < f(x_0), x \neq x_0$

следовательно

$f(x) - f(x_0) < 0$, для любых $x \neq x_0$

Существует функция $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$ т.е. $f'(x) \leq 0$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$ $f'(x) \geq 0$ Следовательно, $f'(x_0) = 0$

# Возрастание и убывание функции одной переменной

**ТЕОРЕМА 1: (Необходимый признак возрастания функции)**

*1) Если дифференцируемая функция возрастает в некотором промежутке, то производная этой функции неотрицательна в этом промежутке.*

***Доказательство:***

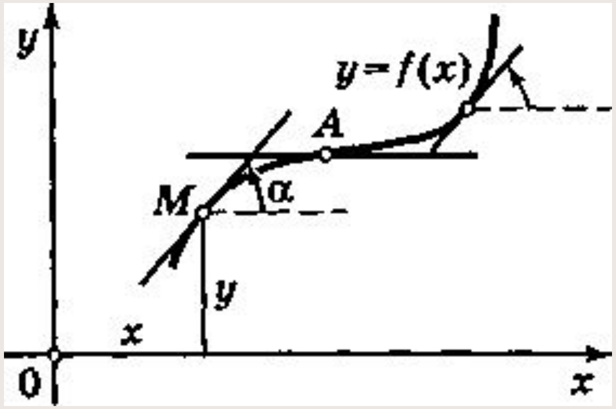
1) Пусть дифференцируемая функция *f*(x) возрастает в промежутке (a,b*).* Согласно определению производной,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$$

$$f'(x) \geq 0$$



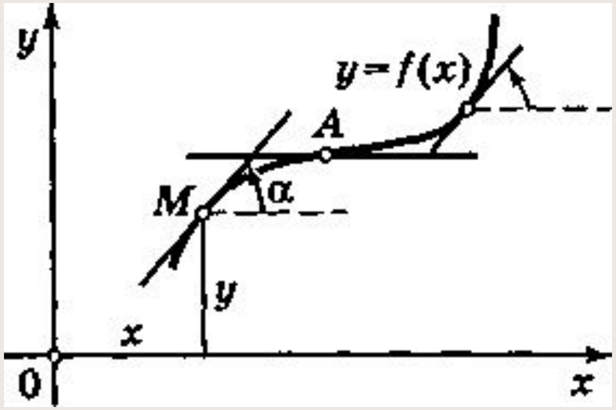
# ТЕОРЕМА 2: (Необходимый признак убывания функции)

*Если дифференцируемая функция убывает в некотором промежутке, то ее производная неположительна в этом промежутке.*

**Доказательство:**

Пусть дифференцируемая функция $f(x)$ убывает в промежутке (a,b). Согласно определению производной,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$




$$f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} < 0$$

$$f'(x) \le 0$$

# ТЕОРЕМА: Достаточный признак возрастания функции

*1) Если производная дифференцируемой функции положительна внутри некоторого промежутка, то функция возрастает на этом промежутке.*

***Доказательство:*** 1) Пусть, например, дифференцируемая функция *f*(x) такова, что $f'(x) > 0$ при $a < x < b$

Для любых двух значений $a \le x_1 < x_2 \le b$ , принадлежащих промежутку (a, *b),* в силу теоремы о конечном приращении функции имеем

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

где $\xi$ — промежуточное значение между $x_1$ и $x_2$ и, следовательно, лежащее внутри промежутка (a, b*).*

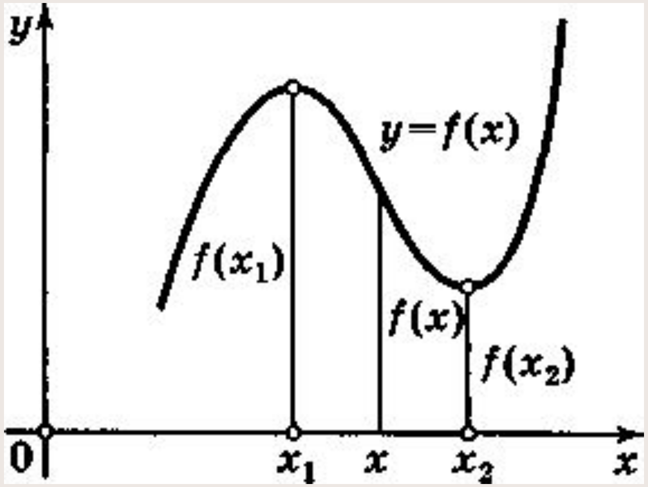
Так как $x_2 - x_1 > 0$ и $f(x_2) - f(x_1) > 0$ то отсюда получим

$$f'(\xi) > 0$$

Следовательно, функция *f*(*x*) возрастет на промежутке (a, b).

# Экстремум функции одной переменной

***Определение:*** Максимум или минимум функции называется *экстремумом функции,* а те значения аргумента, при которых достигаются экстремумы функции, называются *точками экстремума функции* (соответственно: *точками максимума* или *точками минимума функции).*



# НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ

**ТЕОРЕМА.** *В точке экстремума (двустороннего) дифференцируемой функции производная ее равна нулю.*

***Доказательство***. Пусть, для определенности, $x_0$ есть точка минимума функции $f$(x).

$$f(x_0+\Delta x_0) > f(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x_0}$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x_0} > 0$$

$$f'(x_0) \geq 0, \qquad \Delta x_0 > 0$$

$$f'(x_0) \leq 0 \qquad \Delta x_0 < 0$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x_0} < 0$$

$$f'(x_0) = 0$$

# ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ

ТЕОРЕМА: *Если дифференцируемая функция f(x) такова, что для некоторого значения* $x_0$ *ее аргумента x производная* $f'(x)$ *равна нулю и меняет свой знак при переходе через это значение, то число является экстремумом функции f(x)*, *причем:*

1) *функция f(x) имеет максимум при x —* $x_0$ *,если изменение знака производной* $f'(x)$ *происходит с плюса на минус;*

2) *функция f(x) имеет минимум при x =* $x_0$ *, если изменение знака производной* $f'$(x) *происходит с минуса на плюс.*

**Доказательство.** Пусть $f(x_0) = 0$, $f'(x) > 0$ при $x_0 - \xi < x < x_0$

$f'(x) < 0$ при $x_0 < x < x_0 + \xi$

$f(x_0) > f(x)$ x< $x_0$

$[x_0 - \xi, x_0]$ $[x_0, x_0 + \xi]$ $f(x_0) > f(x)$ $x > x_0$

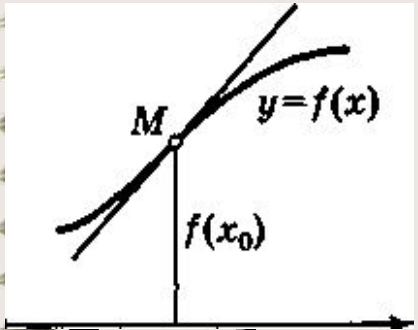
# Вогнутость и выпуклость графика функции. Точки перегиба

***Определение:*** *График дифференцируемой функции y = f(x) называется вогнутым вверх (или выпуклым вниз) в промежутке (a, b), если соответствующая часть кривой*

$$y = f(x)(x \in \langle a, b \rangle)$$

*расположена выше касательной, проведенной в любой ее точке M(x, f(x)).*

*Аналогично, график дифференцируемой функции y = f(x) называется выпуклым вверх (или вогнутым вниз) в промежутке (a, b), если соответствующая часть кривой расположена ниже касательной, проведенной к любой ее точке M(x, f(x))*



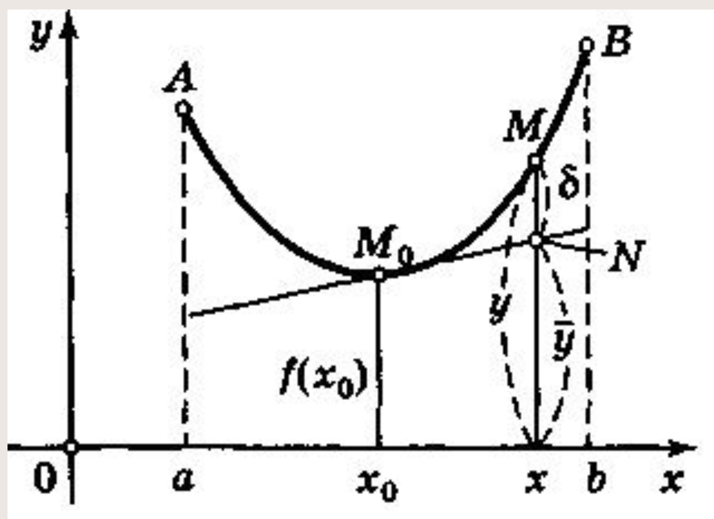

**Определение:** *Точкой перегиба графика дифференцируемой функции y = f(x) называется его точка, при переходе через которую кривая меняет свою вогнутость на выпуклость или наоборот*

# ТЕОРЕМА:

*Если для дважды дифференцируемой функции y = f(x) вторая ее производная f "(x) положительна внутри промежутка (a,b), то график этой функции вогнут вверх в данном промежутке.*

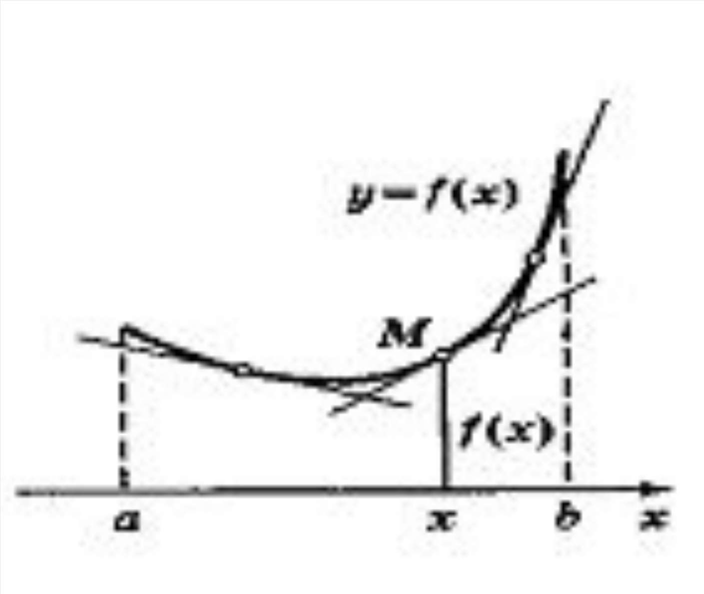
***Доказательство:***

*Пусть f "(x) > 0 при $a<x<b$и$x_0$ — любая точка промежутка (a, b). Сравним в точке x ординату y кривой y=f(x) ординатой y ее касательной MoN, проведенной в точке*



# Достаточные условия вогнутости (выпуклости) графика функции.

**Теорема:** *Если же вторая производная f''(x) отрицательна внутри промежутка (a, b), то график функции y = f(x) вогнут вниз в этом промежутке.*




**Доказательство:**

*Аналогично доказывается, что если f ''(x) < 0 при a < x < b, то график функции y = f(x) вогнут вниз на промежутке (a, b).*