Сила і загальність методу диференціального й інтегрального числення такі, що не ознайомившись із ними, не можна як слід зрозуміти все значення математики для природознавства, і техніки і навіть повністю оцінити всю красу і принадність самої математичної науки.

А.М. Колмогоров

Операції в математиці

Кожна дія (операція) в математиці має обернену:

- додавання-віднімання;
- множення-ділення;
- піднесення до степеня – добування кореня;
- логарифмування – потенціювання;
- множення одночлена на многочлен - розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки.

Деякі з обернених операцій виявилися неоднозначними:

$\sqrt{25}$ є числа 5 і -5, бо $5^2 = 25,\ (-5)^2 = 25.$

Основна операція диференціального числення є знаходження похідної $y' = f'(x)$ даної функції $y = f(x)$.

Обернена операція до диференціювання є: за відомою похідною $y' = f'(x)$ деякої функції знайти (відновити) саму функцію $y = f(x)$, яку називають первісною F для відомої функції $y = f(x)$. Операція знаходження первісної F для даної функції $y = f(x)$ називається інтегруванням.

<u>Отже,</u> інтегрування є оберненою операцією до операції диференціювання.

Первісна

Означення. Первісною для даної функції $y=f(x)$ на заданому проміжку $[a; b]$ називається така функція $F(x)$, похідна якої для всіх x з інтервалу $[a; b]$ дорівнює $f(x)$, тобто $F'(x)=f(x)$ для всіх x є $[a; b]$.

Наприклад, функція $F(x)=x^2$ є первісною для функції $f(x)=2x$ на проміжку $(-\infty;\infty)$, оскільки на цій множині виконується рівність $(x^2)'=2x$.

Для функції $f(x)=2x$ первісними будуть функції $F(x)=x^2+1$; $F(x)=x^2-10$; $F(x)=x^2+\sqrt{5}$; $F(x)=x^2-\frac{1}{3}$ і т. д., тобто загальний вигляд первісних для функції $f(x)=2x$ матимуть вигляд $F(x)=x^2+C$, де C – довільна стала.

Отже, операція інтегрування неоднозначна.

Таблиця первісних

Функція $y=f(x)$	Загальний вигляд первісної $F(x)+C$
k, де k - стала	$kx+C$
x^n, де $n \in Z$ $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$sin\ x$	$-\ cos\ x+C$
$cos\ x$	$sin\ x+C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tg\ x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\ ctg\ x + C$

Яка з двох функцій є первісною для другої?

$\sqrt{x}$

$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$-ctgx$

$\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$\dfrac{1}{\cos^2 x}$

tgx

$\sin x$

$\cos x$

$\sin x$

$-\cos x$

$3x^2$

x^3+1

$F(x)=\frac{x^3}{3}+1$ $F(x)=\frac{x^3}{3}$ $F(x)=\frac{x^3}{3}-2$

$F(x)=\sin x+2$

$F(x)=2\sqrt{x}+3$

$f(x)=x^2$

$F(x)=\sin x$ $f(x)=\cos x$

Вказати первісну F для кожної даної функції f

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $F(x)=2\sqrt{x}$

$f(x)=\sin x$

$F(x)=\sin x-3$

$F(x)=2\sqrt{x}-4$

$F(x)=-\cos x+5$ $F(x)=-\cos x-3$ $F(x)=-\cos x$

ОСНОВНА ВЛАСТИВІСТЬ ПЕРВІСНОЇ:

Якщо на проміжку $\langle a;b \rangle$ функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$, то на цьому проміжку первісною для $f(x)$ буде також функція $F(x)+C$

$F(x)=3x^2+x+2;\ F(x)=3x^2+x-3$ → $f(x)=6x+1$

$F(x)=\sin x+3;\ F(x)=11+\sin x$ → $f(x)=\cos x$

$F(x)=5-3\sqrt{x};\ F(x)=-3\sqrt{x}+1{,}5;\ x\in(0;\infty)$ → $f(x)=-\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

$F(x)=\frac{1}{4}tgx+6;\ F(x)=\frac{1}{4}tgx+\pi$ → $f(x)=\dfrac{1}{4\cos^2 x}$

$F(x)=2ctgx-1;\ F(x)=2ctgx+\sqrt{3}$ → $f(x)=-\dfrac{2}{\sin^2 x}$

Первісні однієї і тієї ж функції можуть відрізнятись лише на сталий доданок

Яка з функцій є первісною для функції $f(x)=\frac{1}{4}x^3$?

$F(x)=2^{-4}x^4-1$

$F(x)=\frac{1}{16}x^4$

$F(x)=\frac{3}{4}x^2$

$F(x)=\frac{1}{16}x^4+5$

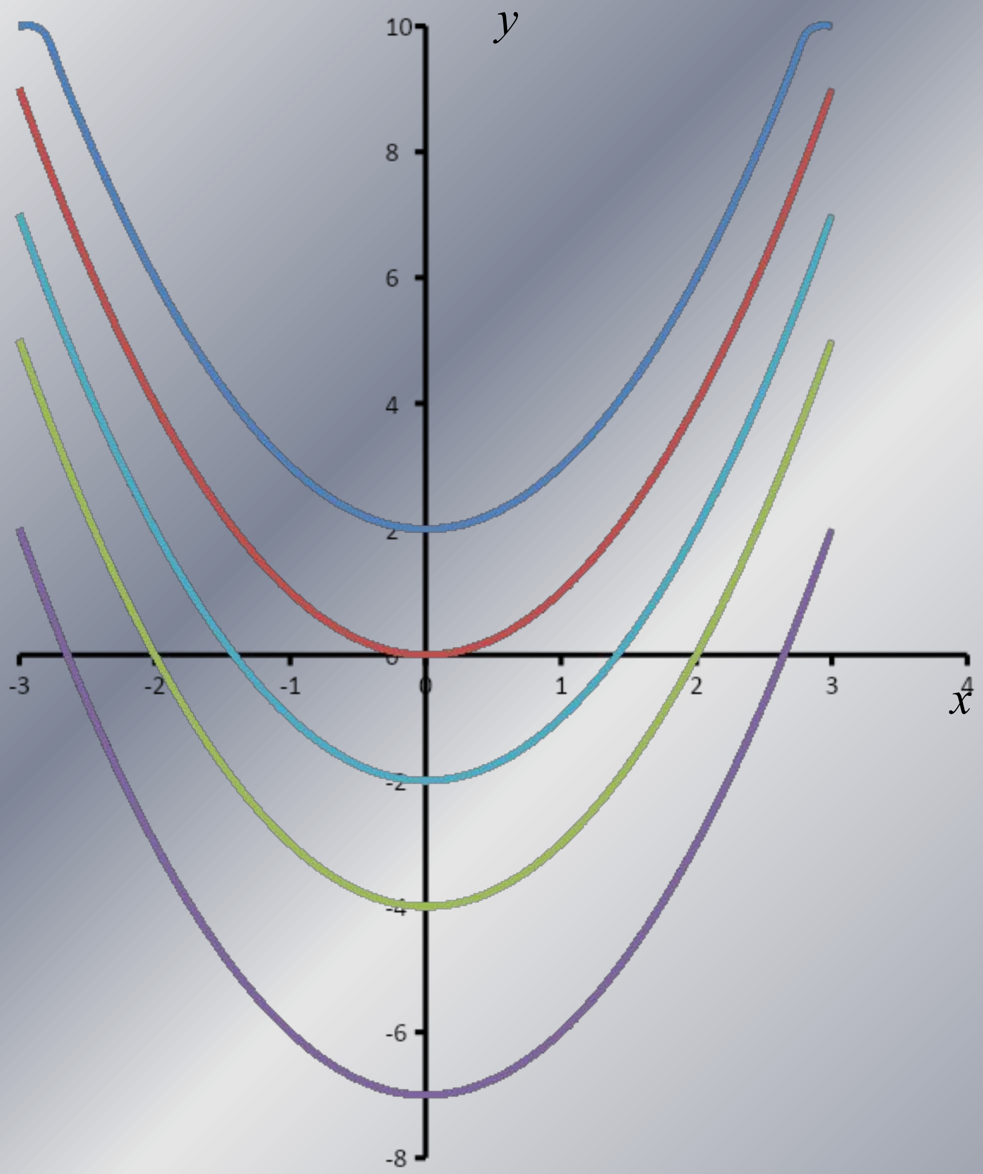
$F(x)=\frac{3}{4}x^2-4$

$F(x)=\frac{1}{16}x^4-\sqrt{2}$

$F(x)=x^4-3$

$F(x)=0{,}0625x^4$

Графіки первісних для даної функції



$F(x)=x^2+2$

$F(x)=x^2$

$F(x)=x^2-4$

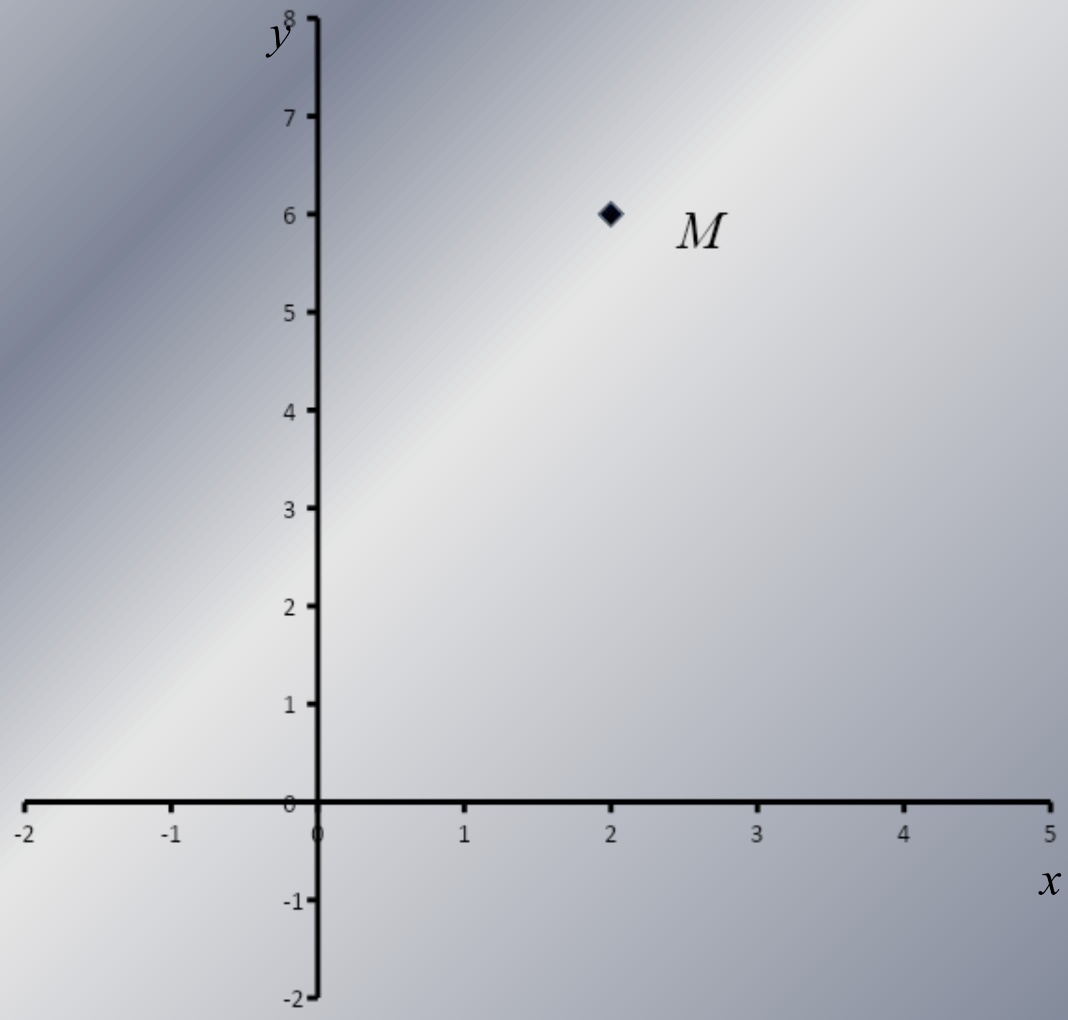
$F(x)=x^2-7$

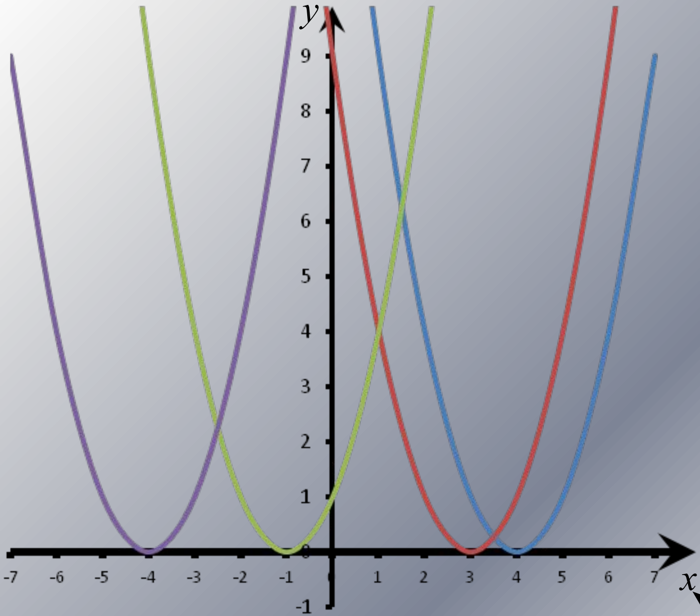
$F(x)=x^2-2$

Основній властивості первісних можна надати геометричного змісту:

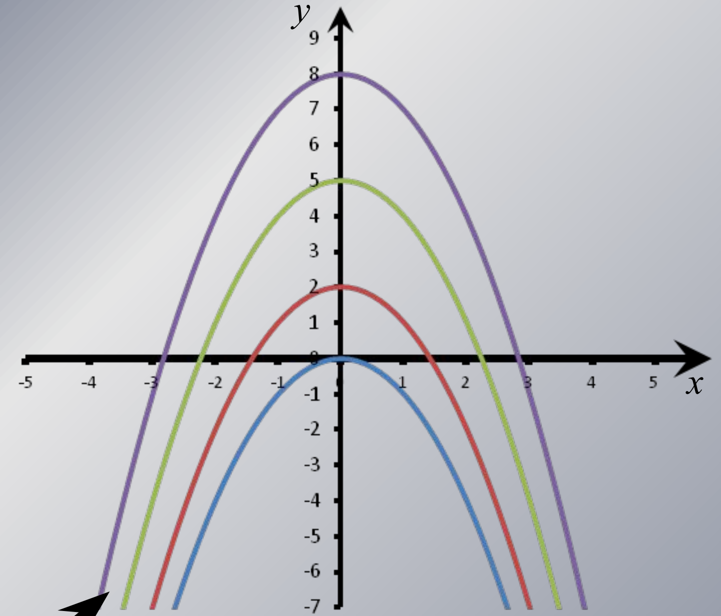
Графіки будь-яких двох первісних даної функції можна отримати один з одного паралельним перенесенням уздовж осі ординат

Завдання. Побудувати графік первісної для функції $f(x)=2x$, яка проходить через точку $M\ (2;\ 6)$



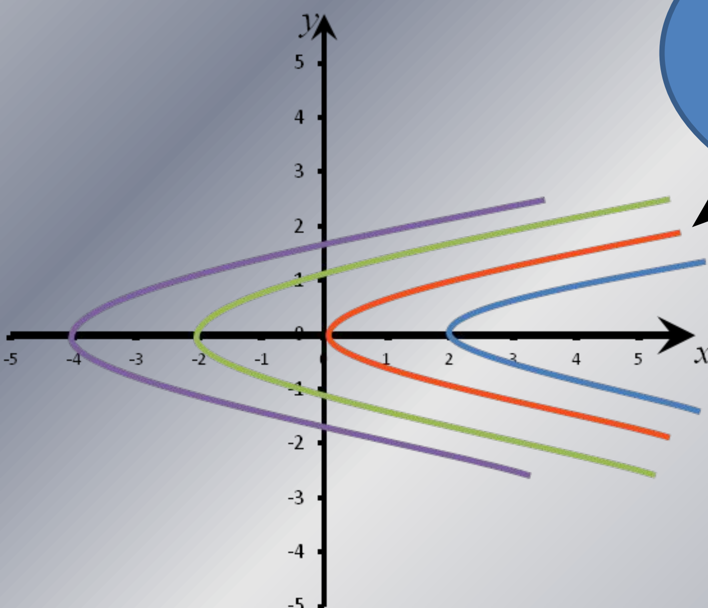


а)

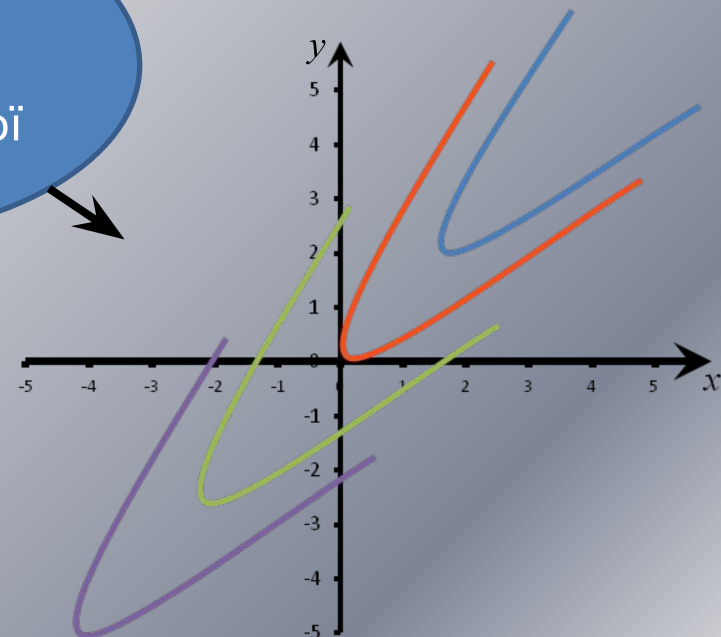


б)

Вказати, на якому малюнку зображено графіки первісної функції

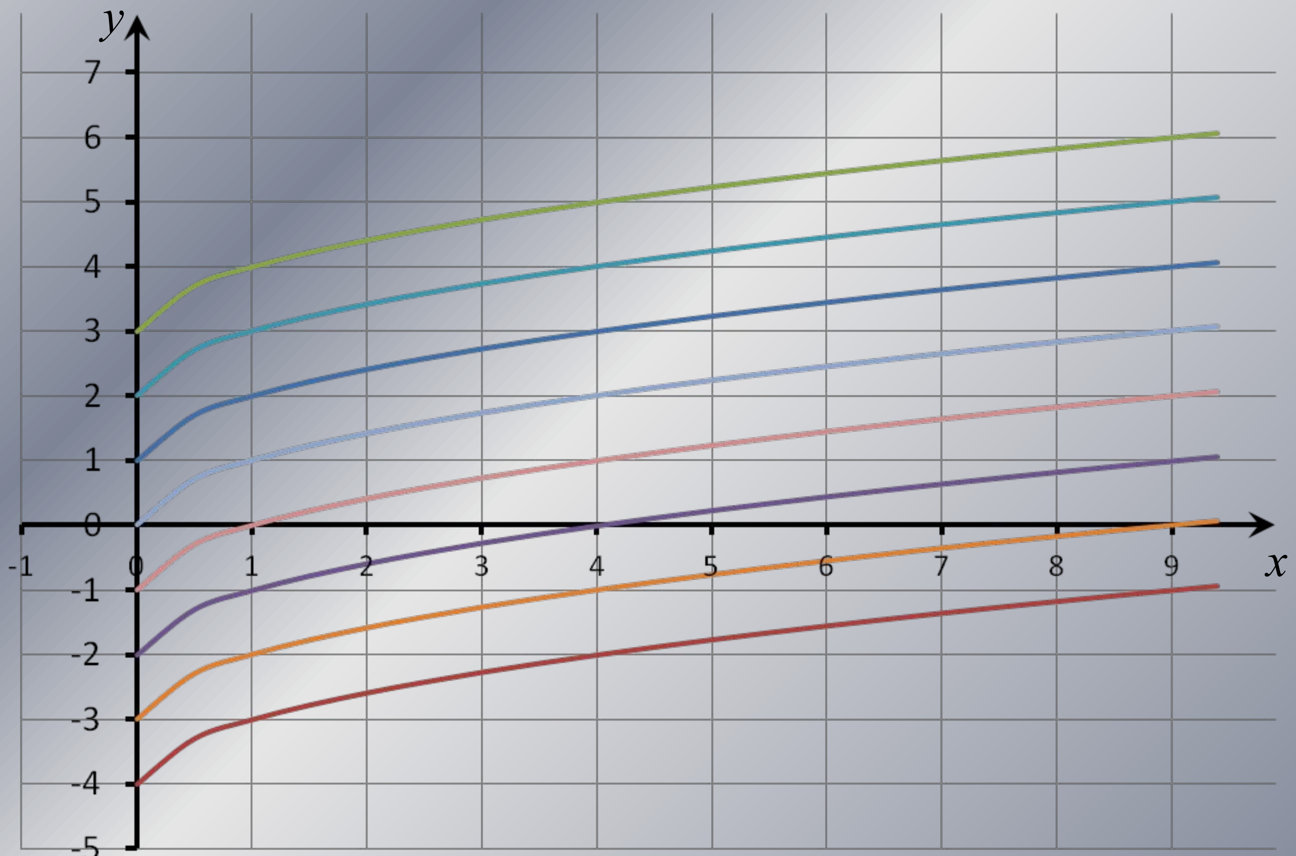


в)



г)

Завдання. На малюнку зображено первісну функції $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $x \in (0;\infty)$. Показати, яка з первісних проходить через точку *K(4; 2)* і вибрати формулу первісної, яка проходить через вказану точку.



1) $F(x)=\sqrt{x}+1$ 3) $F(x)=\sqrt{x}+3$ 5) $F(x)=\sqrt{x}+2$ 7) $F(x)=\sqrt{x}$

2) $F(x)=\sqrt{x}-4$ 4) $F(x)=\sqrt{x}-2$ 6) $F(x)=\sqrt{x}-3$ 8) $F(x)=\sqrt{x}-1$

Правила знаходження первісної

I правило знаходження первісної

$$\begin{pmatrix} F\ \textit{первісна для}\ f \\ G\ \textit{первісна для}\ g \end{pmatrix} \Rightarrow \left(F+G-\textit{первісна для}\ \ f+g\right)$$

Приклад:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{x^3}{3}-\textit{первісна для}\ x^2 \\ \dfrac{x^2}{5}-\ \textit{первісна для}\ \dfrac{2x}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{5}-\textit{первісна для}\ \ x^2+\frac{2x}{5}\right)$$

II правило знаходження первісної

$$\left(F-\textit{первісна для}\ \ f, k-\textit{деяке число}\right) \Rightarrow \left(kF-\textit{первісна для}\ \ kf\right)$$

Приклад:

$$\left(F(x)=\sin x-\textit{первісна для}\ \ f(x)=\cos x\right) \Rightarrow \left(F(x)=10\sin x-\textit{первісна для}\ \ f(x)=10\cos x\right)$$

III правило знаходження первісної

$$\left(F-\textit{первісна для}\ \ f, k-\textit{деяке число}, k\neq 0\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{k}\cdot F(kx+b)-\textit{первісна для}\ \ f(kx+b)\right)$$

Приклад:

$$\left(F(x)=\cos x-\textit{первісна для}\ \ f(x)=-\sin x\right) \Rightarrow \left(F(x)=\frac{1}{3}\cos(3x+1)-\textit{первісна для}\ \ f(x)=-\sin(3x+1)\right)$$