

# Лекция 4

# Содержание предыдущей лекции

**Динамика поступательного движения.**

**Закон сохранения импульса.**

- Движение тел переменной массы. Формула Циолковского.

**Механическая энергия**

- Сила, работа и потенциальная энергия, связь между силой и потенциальной энергией.
- Консервативные и неконсервативные силы.

# Содержание сегодняшней лекции

## Механическая энергия

- Работа и кинетическая энергия.
- Закон сохранения полной механической энергии в поле консервативных сил.
- Столкновение тел.

## Кинематика и динамика вращательного движения

- Кинематика вращательного движения: угловая скорость и угловое ускорение, их связь с линейной скоростью и ускорением.
- Момент силы. Уравнение моментов.

## Работа и кинетическая энергия

Уравнение движения частицы  $m\dot{v} = F$ .

$$\times ds = v dt$$

$$mvv dt = F ds$$

$$mvv dt = mv dv = md \left( \frac{v^2}{2} \right) = d \left( \frac{mv^2}{2} \right) = F ds = dA$$

## Работа и кинетическая энергия

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = d\left(\frac{p^2}{2m}\right)$$

$$T = \frac{p^2}{2m} \text{ – кинетическая энергия частицы.}$$

**Зависимость кинетической энергии (энергии движения)  
от массы и скорости рассматриваемого тела.**

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F ds = dA$$

## Работа и кинетическая энергия

$$T_2 - T_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_1^2 F ds = A_{12}.$$

**Равенство работы результирующей консервативных сил,  
действующих на частицу,  
приращению кинетической энергии частицы**

$$A_{12} = T_2 - T_1.$$

# **Закон сохранения полной механической энергии в поле консервативных сил**

$$A_{12} = U_1 - U_2 \qquad A_{12} = T_2 - T_1$$

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2$$

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1$$

**Постоянство полной механической энергии  $E = T + U$   
частицы, находящейся в поле консервативных сил.**

# **Закон сохранения полной механической энергии в поле консервативных сил**

**Постоянство полной механической энергии  
системы невзаимодействующих частиц,  
на которые действуют только консервативные силы.**

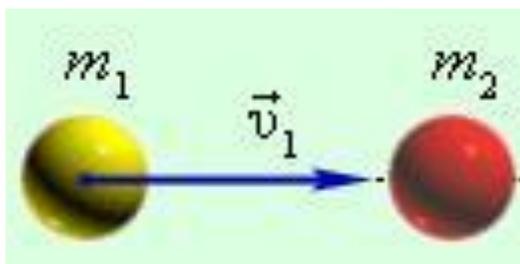
# Столкновение тел

Два крайних случая соударения –  
абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары.

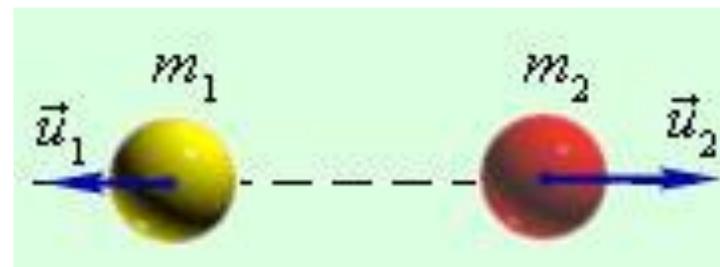


# Абсолютно упругий удар

До удара



После удара



**Условие упругого удара: механическая энергия взаимодействующих тел не переходит в другие (немеханические) виды энергии.**

**Переход кинетической энергии тел в потенциальную энергию упругой деформации тел и обратно.**

**Выполнение законов сохранения полной энергии и полного импульса системы тел.**

# Абсолютно упругий удар

Замкнутая система из двух частиц

Отсутствие вращения частиц (поступательное движение)

Выполнение закона сохранения механической энергии

$$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} + \frac{m_2 v_{20}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Выполнение закона сохранения суммарного импульса частиц

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

## Абсолютно упругий удар

$$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} + \frac{m_2 v_{20}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \quad m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$m_1 (v_{10} - v_1)(v_{10} + v_1) = m_2 (v_2 - v_{20})(v_2 + v_{20})$$

$$m_1 (v_{10} - v_1) = m_2 (v_2 - v_{20})$$

$$v_{10} + v_1 = v_2 + v_{20}$$

$$m_1(\overset{\square}{v}_{10} - \overset{\square}{v}_1) = m_2(\overset{\square}{v}_2 - \overset{\square}{v}_{20})$$

$$\overset{\square}{v}_{10} + \overset{\square}{v}_1 = \overset{\square}{v}_2 + \overset{\square}{v}_{20}$$

## Абсолютно упругий удар

$$m_1(\overset{\square}{v}_{10} - \overset{\square}{v}_1) = m_2(\overset{\square}{v}_2 - \overset{\square}{v}_{20})$$

$$m_1(\overset{\square}{v}_{10} - \overset{\square}{v}_1) = m_2(\overset{\square}{v}_2 - \overset{\square}{v}_{20})$$

-

+

$$\times m_2 \overset{\square}{v}_{10} + \overset{\square}{v}_1 = \overset{\square}{v}_2 + \overset{\square}{v}_{20}$$

$$\times m_1 \overset{\square}{v}_{10} + \overset{\square}{v}_1 = \overset{\square}{v}_2 + \overset{\square}{v}_{20}$$

---


$$\overset{\square}{v}_1 = \frac{2m_2 \overset{\square}{v}_{20} + (m_1 - m_2) \overset{\square}{v}_{10}}{m_1 + m_2},$$

---


$$\overset{\square}{v}_2 = \frac{2m_1 \overset{\square}{v}_{10} + (m_2 - m_1) \overset{\square}{v}_{20}}{m_1 + m_2}.$$

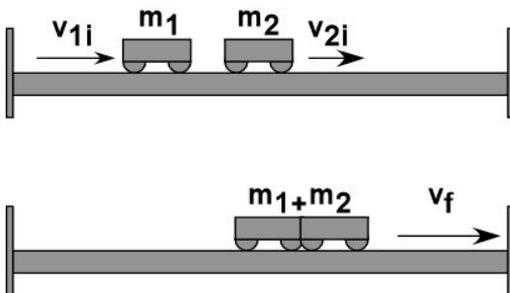
**Частный случай:**  $m_1 = m_2 \quad \overset{\square}{v}_1 = \overset{\square}{v}_{20} \quad \overset{\square}{v}_2 = \overset{\square}{v}_{10}$

# Абсолютно неупругий удар



**Нулевое значение  
потенциальной энергии  
деформации.**

**Полное или частичное превращение  
кинетической энергии во внутреннюю энергию.**



**После удара:  
движение тел с одинаковой скоростью  
или их нахождение в состоянии покоя.**

## **Абсолютно неупругий удар**

**Выполнение закона сохранения импульса.**

**Невыполнение закона сохранения механической энергии.**

**Выполнение закона сохранения суммарной энергии  
различных видов - механической и внутренней.**

# Абсолютно неупругий удар

**Закон сохранения  
суммарного импульса двух частиц,  
образующих замкнутую систему,**

$$m_1 \overset{\square}{v}_{10} + m_2 \overset{\square}{v}_{20} = m_1 \overset{\square}{v} + m_2 \overset{\square}{v} = (m_1 + m_2) \overset{\square}{v}$$

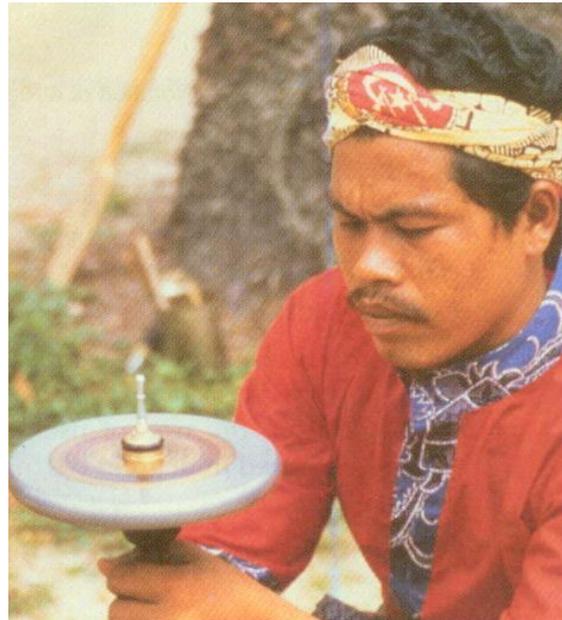
до удара

после удара

$$\overset{\square}{v} = \frac{m_1 \overset{\square}{v}_{10} + m_2 \overset{\square}{v}_{20}}{m_1 + m_2}.$$

# **Вращательное движение**

**Вращательное движение – движение,  
при котором все точки тела совершают движение по  
концентрическим окружностям.**



# Кинематика вращательного движения



# Кинематика вращательного движения

Вектор  $\vec{\varphi}$  -

характеристика поворота материальной точки (тела) на некоторый угол  $\varphi$  относительно некоторой фиксированной в пространстве оси.

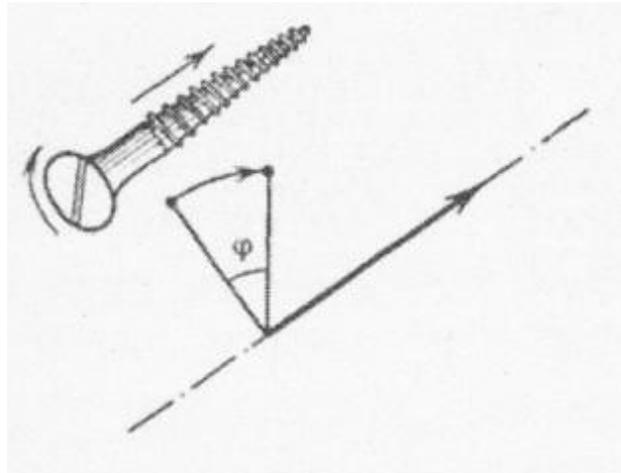
Длина вектора – угол поворота.

Направление вектора – ориентация оси.

Неоднозначность в выборе направления поворота – поворот возможен по или против часовой стрелки.

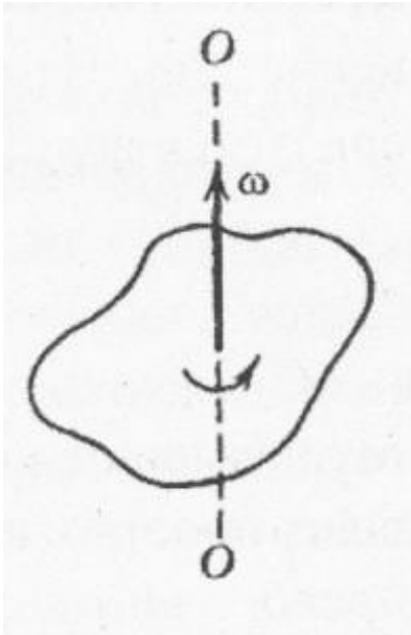
# Кинематика вращательного движения

Вектор  $\vec{\varphi}$  - фактически псевдовектор.



Условный выбор направления –  
использование правила правого винта.

# Кинематика вращательного движения



**Угловая скорость материальной точки  
(тела) - псевдовектор**

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

**Модуль вектора угловой скорости**

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

# Кинематика вращательного движения

Равномерное вращательное движение –  
вращение с постоянной скоростью  $\omega = \frac{\varphi}{t}$ .

Период обращения  $T$  при равномерном вращении –  
время, за которое тело делает один оборот.

$$\Delta t = T \quad \Delta\varphi = 2\pi \quad \omega = 2\pi / T \quad T = 2\pi / \omega$$

Число оборотов в единицу времени  $\nu = 1/T = \omega / 2\pi$ .

$$\text{Угловая скорость } \omega = 2\pi\nu.$$

# Кинематика вращательного движения

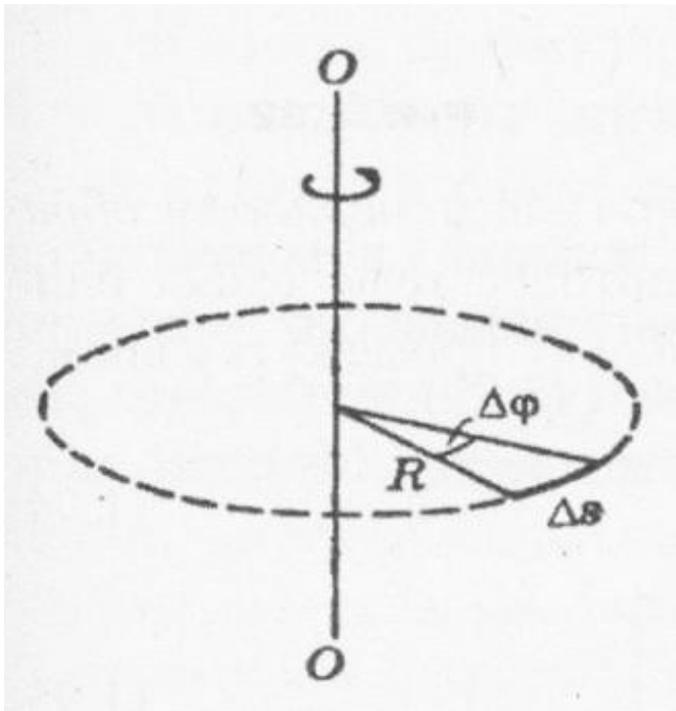
Возможность изменения  $\vec{\omega}$  за счет изменения скорости вращения тела вокруг оси (модуль) и за счет поворота оси (направление).

Угловое ускорение (псевдовектор)

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

- характеристика скорости изменения вектора угловой скорости во времени.

# Кинематика вращательного движения

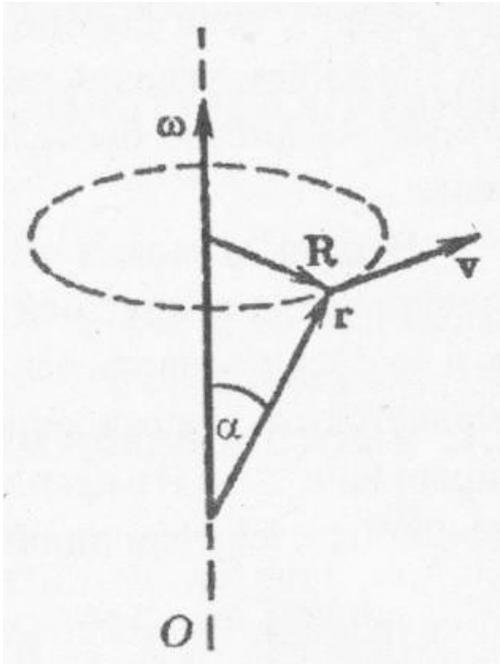


Разная линейная скорость  $v$   
у различных точек  
вращающегося тела.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega.$$

$$v = R\omega.$$

# Кинематика вращательного движения



Совпадение  $[\overset{\Delta}{\omega}\overset{\Delta}{r}]$  по направлению с  $\overset{\Delta}{v}$ .

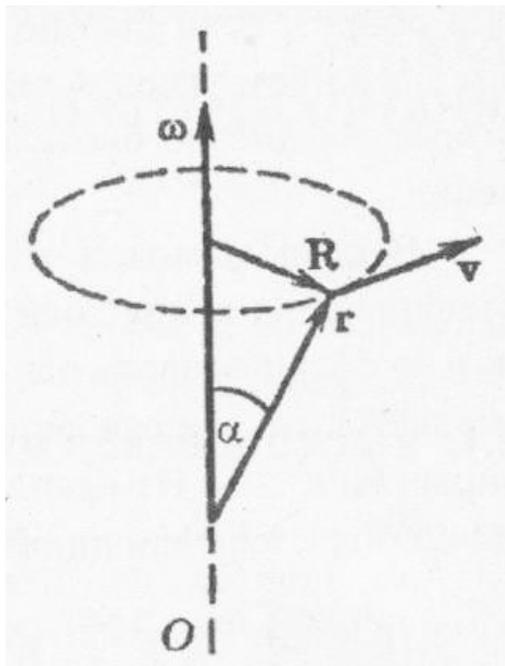
Равенство модуля  $[\overset{\Delta}{\omega}\overset{\Delta}{r}]$   
величине  $\omega r \cdot \sin \alpha$ , т.е.  $\omega R$ .

Следовательно,  $\overset{\Delta}{v} = [\overset{\Delta}{\omega}\overset{\Delta}{r}]$ .

# Кинематика вращательного движения

Модуль нормального ускорения точки, движущейся с линейной скоростью  $v$ ,

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R.$$



В векторном виде  $\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}$ .

Направления векторов  $\vec{a}_n$  и  $\vec{R}$  противоположны.

# Кинематика вращательного движения

**Условие: ось тела не поворачивается в пространстве.**

**Модуль тангенциального ускорения  $|a_\tau| = |dv / dt|$ .**

**Линейная скорость точки на расстоянии  $R$  от оси вращения  
 $v = \omega R$ .**

$$|a_\tau| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \right| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(\omega R)}{\Delta t} \right| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right| = R \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right| = R\varepsilon.$$

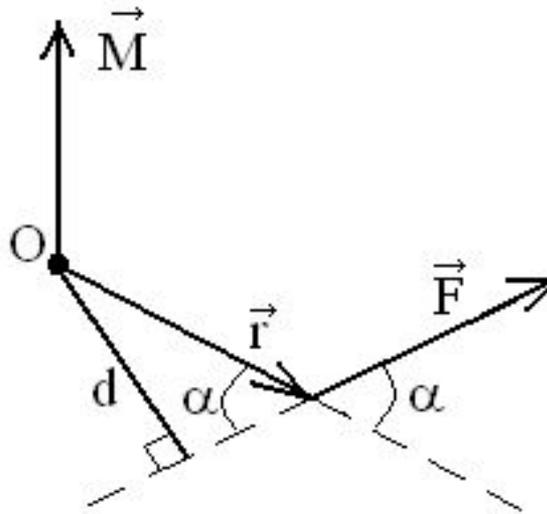
$$|a_\tau| = R\varepsilon.$$

# **Динамика вращательного движения**

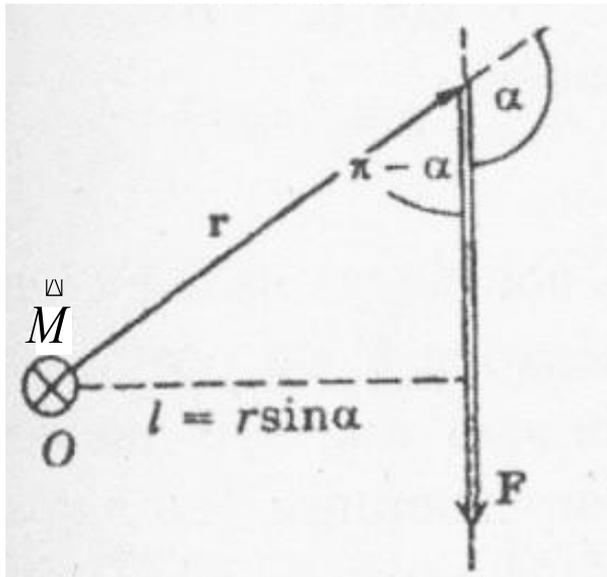
## Момент силы относительно точки

Момент силы относительно точки  $O$   $\vec{M} = [\vec{r} \vec{F}]$ ,

где  $\vec{r}$  - радиус-вектор, направленный из точки  $O$   
в точку приложения силы.



## Момент силы относительно точки



$$M = rF \sin \alpha = lF$$

$$l = r \sin \alpha \quad \text{- плечо силы}$$

## Контрольный вопрос

Две частицы обладают одинаковыми кинетическими энергиями. Величины их импульсов соотносятся как:

а)  $p_1 < p_2$ ,

б)  $p_1 = p_2$ ,

в)  $p_1 > p_2$ ,

г) невозможно определить.