Урок 9

Задания 10-11

Задание 10: Задачи с прикладным содержанием

1. Линейные уравнения и неравенства
2. Квадратные и степенные уравнения и неравенства
3. Рациональные уравнения и неравенства
4. Иррациональные уравнения и неравенства
5. Показательные уравнения и неравенства
6. Логарифмические уравнения и неравенства
7. Тригонометрические уравнения и неравенства
8. Разные задачи

Задание 10, тип 1: Линейные уравнения и неравенства

При температуре $0\,^{\circ}\mathrm{C}$ рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^{\circ}) = l_0(1 + \alpha \cdot t^{\circ})$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}(^{\circ}\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Задание 10, тип 2: Квадратные и степенные уравнения и неравенства

После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h– расстояние в метрах, t– время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,6 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

Высота над землей подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1,6 + 8t - 5t^2$, где h– высота в метрах, t– время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее трех метров?

Задание 10, тип 2: Квадратные и степенные уравнения и неравенства

В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t – время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ – начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{50}$ – отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объема воды?

Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t – время в минутах, $T_0 = 1400$ К, $a = -10$ К/мин^2, $b = 200$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1760 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

Задание 10, тип 2: Квадратные и степенные уравнения и неравенства

На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \alpha \rho g r^3$, где $\alpha = 4,2$ – постоянная, r – радиус аппарата в метрах, $\rho = 1000$ кг/м^3 – плотность воды, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ Н/кг). Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше, чем 336 000 Н? Ответ выразите в метрах.

Задание 10, тип 3: Рациональные уравнения и неравенства

Сила тока в цепи I (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U – напряжение в вольтах, R – сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включен предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 4 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 – температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 – температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой минимальной температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 15%, если температура холодильника $T_2 = 340$ К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

Задание 10, тип 3: Рациональные уравнения и неравенства

При сближении источника и приёмника звуковых сигналов движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу частота звукового сигнала, регистрируемого приемником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 150$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0 \frac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c – скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 10$ м/с и $v = 15$ м/с – скорости приемника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приемнике f будет не менее 160 Гц?

Задание 10, тип 4: Иррациональные уравнения и неравенства

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a км/ч ^{2} . Скорость вычисляется по формуле $v=\sqrt{2la}$, где l— пройденный автомобилем путь. Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав один километр, приобрести скорость 100 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2 .

Расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землей, выраженное в километрах, до видимой им линии горизонта вычисляется по формуле $l=\sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R=6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 км. К пляжу ведет лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На какое наименьшее количество ступенек нужно подняться человеку, чтобы он увидел горизонт на расстоянии не менее 6,4 километров?

Задание 10, тип 5: Показательные уравнения и неравенства

1. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T}$, где m_0– начальная масса изотопа, t– время, прошедшее от начального момента, T– период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 40 мг. Период его полураспада составляет 10 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 5 мг.

2. Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = const$, где p(Па) – давление в газе, V– объем газа в кубических метрах, a – положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение вдвое раз объема газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 4 раза?

Задание 10, тип 6: Логарифмические уравнения и неравенства

1. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C=2\cdot10^{-6}$Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R=5\cdot10^{6}$Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0=16$кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t=\alpha RC\log_2\frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha=0,7$– постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 21 с. Ответ дайте в киловольтах.

2. Водолазный колокол, содержащий $\upsilon=2$моля воздуха при давлении $p_1=1,5$атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A=\alpha\upsilon T\log_2\frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha=5,75$— постоянная, $T=300$К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2(в атм) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 6900 Дж.

Задание 10, тип 7: Тригонометрические уравнения и неравенства

1. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полета мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полета составит 3 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

2. Груз массой 0,08 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняются по закону $v = v_0 \cos\frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 2$ с — период колебаний, $v_0 = 0,5$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 1 секунду после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Задание 10, тип 7: Тригонометрические уравнения и неравенства

3. Два тела массой $m = 2$кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 10$м/с под углом 2αдруг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении определяется выражением $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$.Под каким наименьшим углом 2α(в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 50 джоулей?

4. Трактор тащит сани с силой $F = 80$кН, направленной под острым углом αк горизонту. Работа трактора (в килоджоулях) на участке длиной $S = 50$м вычисляется по формуле $A = FS\cos\alpha$.При каком максимальном угле α(в градусах) совершенная работа будет не менее 2000 кДж?

Задание 10, тип 8: разные задачи

Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый показатель — целое число от -2 до 2.

Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится втрое, а объективность — вдвое дороже, чем оперативность. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{3In + Op + 2Tr}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 30.

Задание 11: текстовые задачи

1. Задачи на проценты, сплавы и смеси
2. Задачи на движение по прямой
3. Задачи на движение по окружности
4. Задачи на движение по воде
5. Задачи на совместную работу
6. Задачи на прогрессии

Процент от числа — это сотая доля этого числа. Задача найти $p\%$ от a, эквивалентна задаче вычислить произведение $p \cdot \frac{a}{100}$ или $0,01pa$. Например, вычисляя 6% от 150, получаем: $0,06 \cdot 150 = 6 \cdot 1,5 = 9$. Справедливы следующие утверждения.

– Если некоторое число a увеличить на $p\%$, то получим $a(1+0,01p)$.

– Если некоторое число a уменьшить на $p\%$, то получим $a(1-0,01p)$.

– Если некоторое число а увеличить на $p_1\%$, а полученный результат уменьшить на $p_2\%$, то оно получим

$$a(1+0,01p_1)(1-0,01p_2).$$

– Положенная в банк под $p\%$ годовых начальная сумма S_0 через n лет с учетом процентов достигнет величины

$$S_n = S_0(1+0,01p)^n.$$

Задание 11, тип 1: Задачи на проценты, сплавы и смеси

- 1. В 2008 году в городском квартале проживало 40 000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 8%, а в 2010 году на 9% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

- 2. Четыре одинаковые рубашки дешевле куртки на 8%. На сколько процентов пять таких же рубашек дороже куртки?

- 3. Митя, Антон, Гоша и Борис учредили компанию с уставным капиталом 200000 рублей. Митя внес 14% уставного капитала, Антон — 42000 рублей, Гоша — 0,12 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Борис. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 1000000 рублей причитается Борису? Ответ дайте в рублях.

Задание 11, тип 1: Задачи на проценты, сплавы и смеси

- 4. В сосуд, содержащий 5 литров 12–процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

- 5. Смешали некоторое количество 15–процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 19–процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

- 6. Смешали 4 литра 15–процентного водного раствора некоторого вещества с 6 литрами 25–процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Задание 11, тип 1: Задачи на проценты, сплавы и смеси

- 7. Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

- 8. Смешав 14-процентный и 50-процентный раствор кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 22-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 32-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 14-процентного раствора использовали для получения смеси?

Задание 11, тип 4: Задачи на прогрессии

6. Арифметическая прогрессия

Формула n-го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Характеристическое свойство арифметической прогрессии: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n \geq 2$.

Сумма n первых членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{a_1 + a}{2} n$.

При решении задач, связанных с арифметической прогрессией, могут оказаться полезными также следующие формулы:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n; \qquad S_n = \frac{2a_n - d(n-1)}{2} n; \qquad a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \; k < n;$$

$$a_k + a_n = a_{k-m} + a_{n+m}, \; m < k; \qquad d = \frac{a_n - a_k}{n - k}.$$

Задание 11, тип 4: Задачи на прогрессии

7. Геометрическая прогрессия

Формула n-го члена геометрической прогрессии: $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Характеристическое свойство геометрической прогрессии: $a_n^2 = a_{n-1} a_{n+1}$, $n \geq 2$.

Сумма n первых членов геометрической прогрессии: $S_n = \dfrac{a_1 - a_n q}{1 - q}$, $q \neq 1$.

При решении задач, связанных с геометрической прогрессией, могут оказаться полезными также следующие формулы:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}; \qquad a_n^2 = a_{n-k} a_{n+k},\ k < n; \quad a_k a_n = a_{k-m} a_{n+m},\ m < k; \qquad |q| = \sqrt[n-k]{\frac{a_n}{a_k}}.$$

8. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $S = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Задание 11, тип 4: Задачи на прогрессии

- 1. Бригада маляров красит забор длиной 240 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 60 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

- 2. Рабочие прокладывают тоннель длиной 500 метров, ежедневно увеличивая норму прокладки на одно и то же число метров. Известно, что за первый день рабочие проложили 3 метра тоннеля. Определите, сколько метров тоннеля проложили рабочие в последний день, если вся работа была выполнена за 10 дней.

Задание 11, тип 4: Задачи на прогрессии

- 3. Турист идет из одного города в другой, каждый день проходя больше, чем в предыдущий день, на одно и то же расстояние. Известно, что за первый день турист прошел 10 километров. Определите, сколько километров прошел турист за третий день, если весь путь он прошел за 6 дней, а расстояние между городами составляет 120 километров.

- 4. Бизнесмен Бубликов получил в 2000 году прибыль в размере 5000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 300% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Бубликов за 2003 год?