Лекция 1

Содержание

- **Электрический заряд**
- **Закон Кулона**
- **Электростатическое поле**
- **Напряжённость поля. Линии напряженности**
- **Работа сил электростатического поля**
- **Потенциал. Эквипотенциальные поверхности**
- **Связь между напряженностью электрического поля и потенциалом**
- **Энергия взаимодействия зарядов**
- **Поток напряженности электрического поля**
- **Теорема Гаусса для электростатического поля**

Электрический заряд частицы является одной из основных, первичных ее характеристик. Ему присущи следующие ***фундаментальные свойства***:

1) электрический заряд существует в двух видах: как положительный, так и отрицательный;

2) в любой электрически изолированной системе алгебраическая сумма зарядов не изменяется, это утверждение выражает закон сохранения электрического заряда;

3) электрический заряд является релятивистски-инвариантным: его величина не зависит от системы отсчета, а значит, не зависит от того, движется он или покоится.

4) все заряды в природе кратны заряду электрона: $q = N e$, где N - целое.

Точечным зарядом является заряженное тело, геометрическими размерами которого в данных условиях можно пренебречь.

Закон Кулона (1785 г.) устанавливает, что сила взаимодействия двух точечных электрических зарядов q_1 и q_2, находящихся в вакууме на расстоянии r друг от друга (рис.1), определяется выражением:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r\ ,} \qquad (1.1)$$

где $\vec{e}_r$ - это орт радиус-вектора, направленный вдоль линии, соединяющей точечные заряды, $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\cdot 10^9\ м/Ф$, постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ Ф/м$ называется электрической постоянной. Заряд q выражается в кулонах [$Кл$].

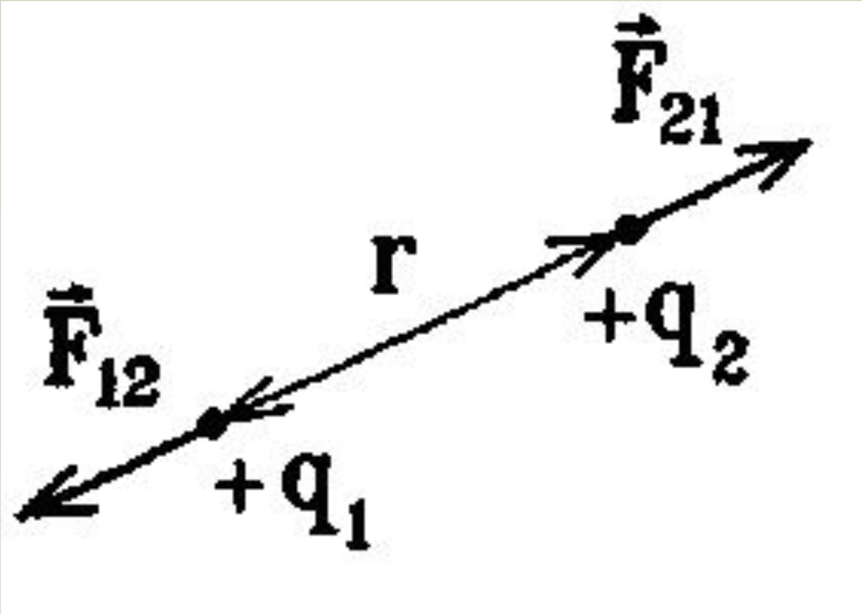


Рис.1

Согласно современным представлениям, взаимодействие между зарядами осуществляется через поле.

Всякий электрический заряд q изменяет определенным образом свойства окружающего его пространства - создает **электрическое поле**.

Это проявляет себя в том, что помещенный в какую-либо его точку другой, «***пробный***», заряд q_0 испытывает действие силы.

Тогда величину электрического поля можно определить по величине кулоновской силы $F_{кул}$, с которой поле действует на пробный заряд q_0. Но само поле заряда q не должно зависеть от величины q_0.

Поэтому электрическое поле принято характеризовать **вектором напряженности** $\vec{E}$:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}_{кул}}{q_0}}$$

- это векторная величина, равная силе, с которой поле действует на единичный пробный заряд (рис.2).

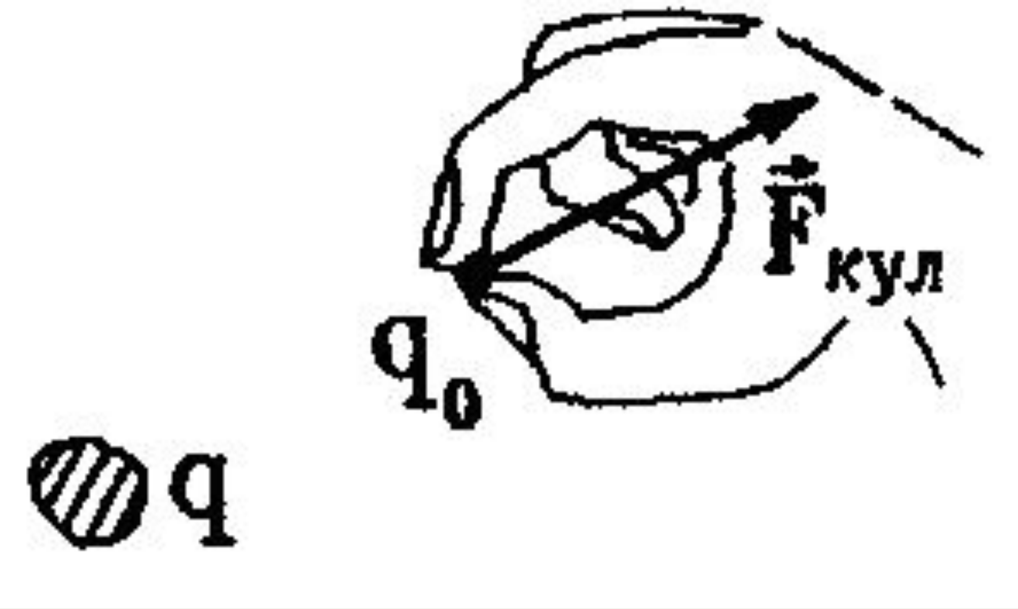


Рис.2

Тогда напряженность поля неподвижного точечного заряда q на расстоянии r от него можно представить как

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r\ .} \qquad (1.2)$$

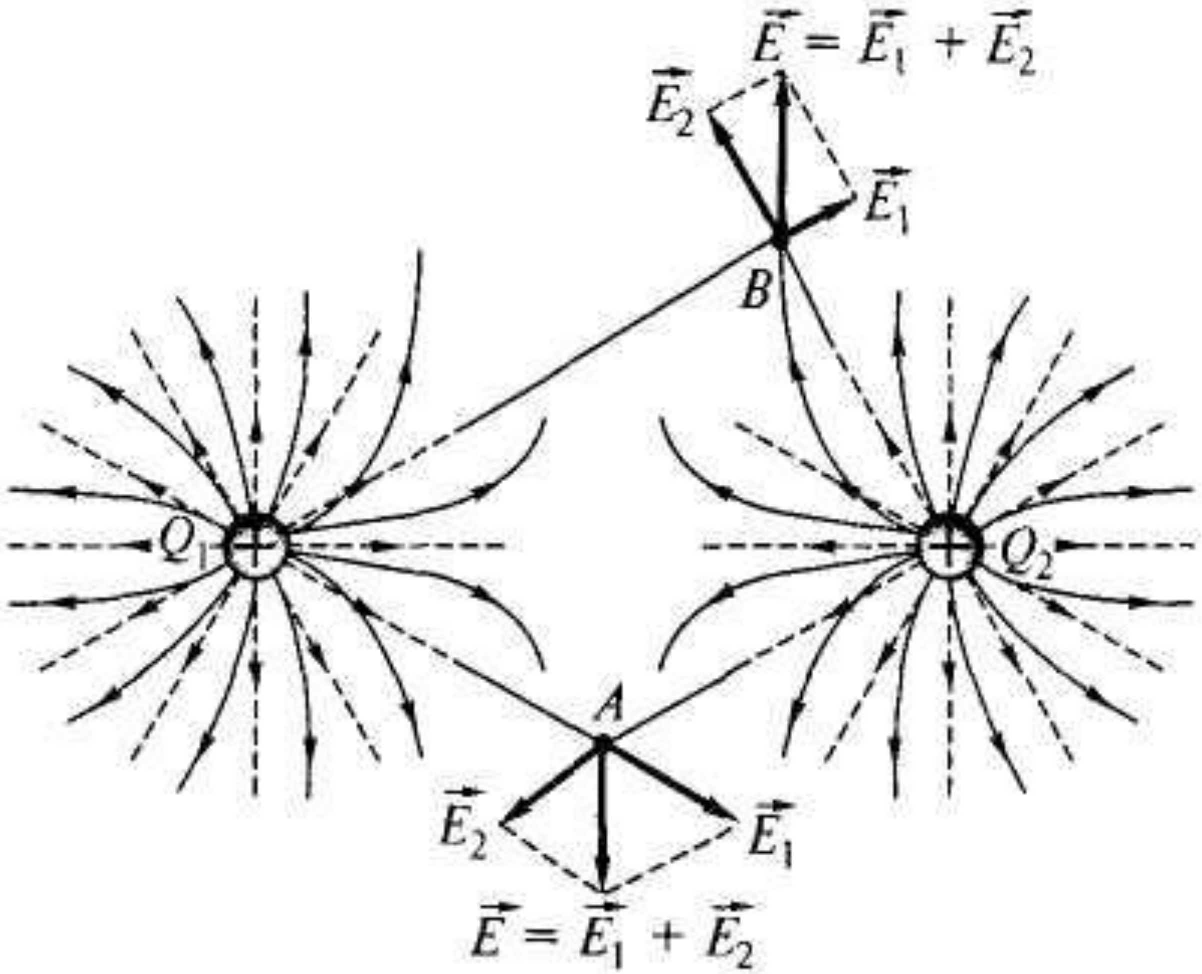
Напряженность поля $\vec{E}$ выражается в вольтах на метр (*В/м*).

Принцип суперпозиции. Напряженность поля системы точечных неподвижных зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавали бы каждый из зарядов в отдельности:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{e}_{ri}\ , \qquad (1.3)$$

где r_i расстояние между зарядом q_i, и интересующей нас точкой поля.

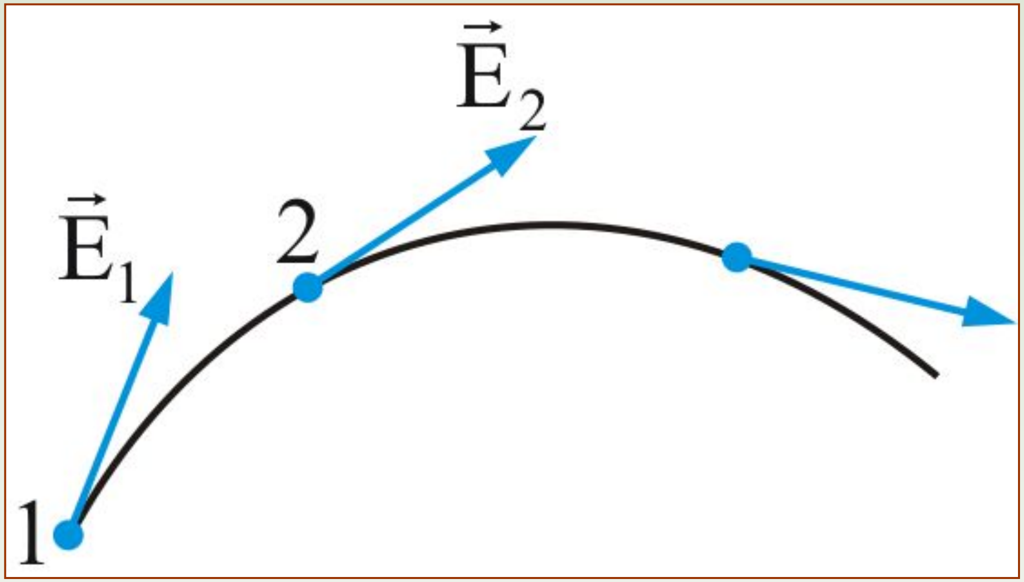
Принцип суперпозиции электрических полей:

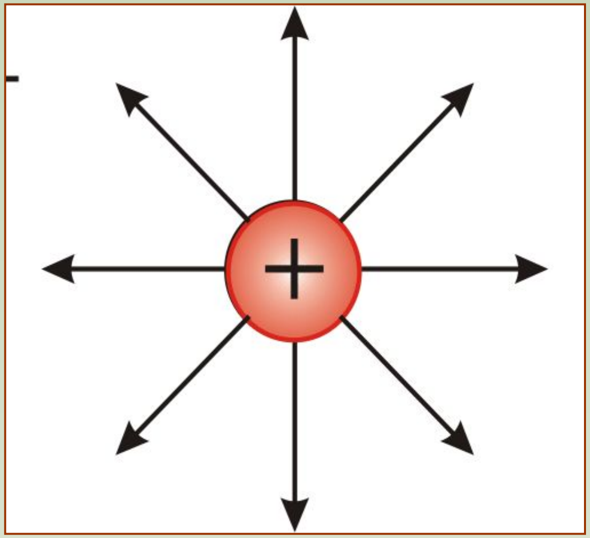


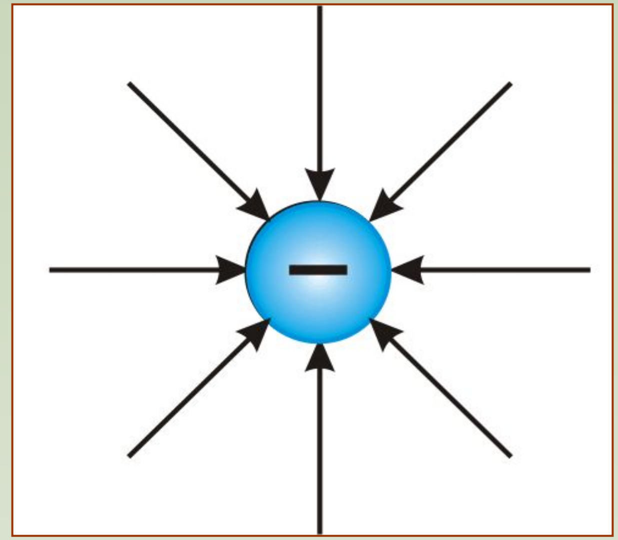
Геометрическое описание электрического поля

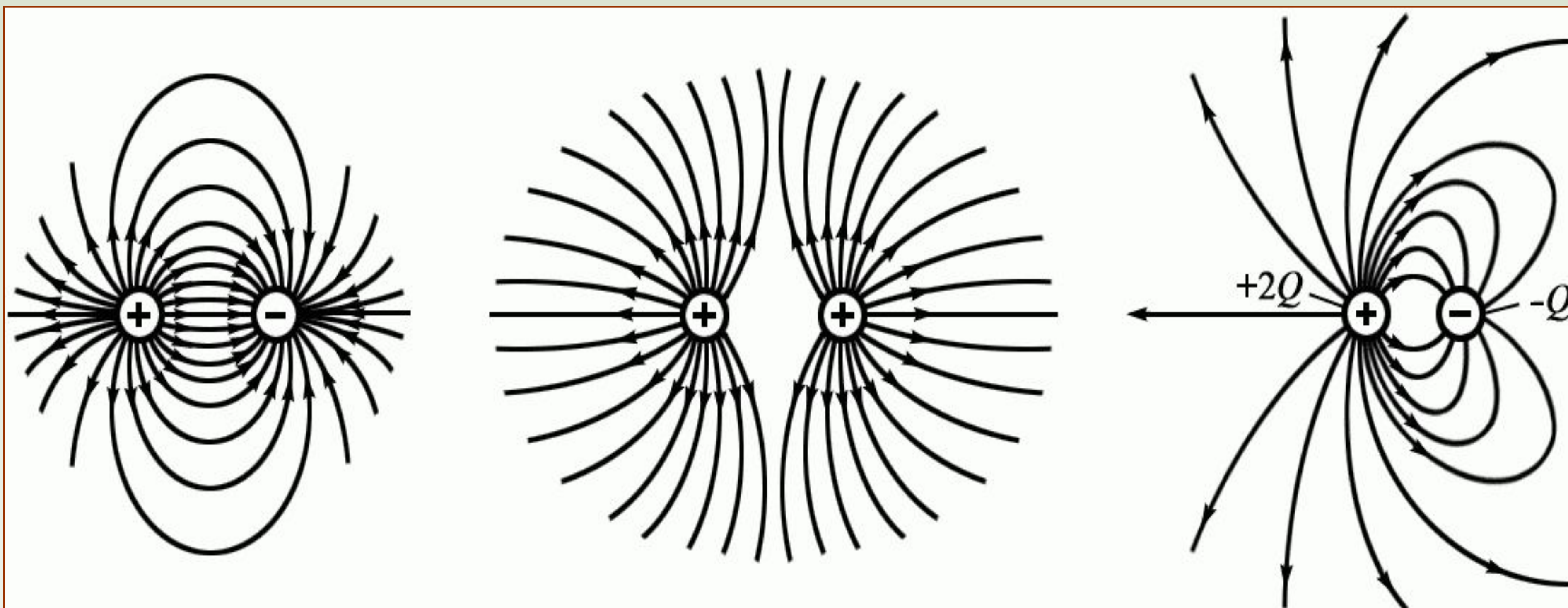
Зная вектор $\vec{E}$ в каждой точке, можно представить электрическое поле очень наглядно с помощью **линий напряженности**, или линий вектора $\vec{E}$. Эти линии проводят так, чтобы *касательная к ним в каждой точке совпадала с направлением вектора* $\vec{E}$,

а густота линий, т. е. число линий, пронизывающих единичную площадку, перпендикулярную линиям в данной точке, была бы пропорциональна модулю вектора $\vec{E}$.








+2Q
-Q

Работа сил электростатического поля. Потенциал

На электрический заряд со стороны электростатического поля действует сила, поэтому при перемещении заряда в поле совершается работа.

Пусть точечный заряд q_0 перемещается на расстояние $d\vec{l}$ в поле другого точечного заряда q.

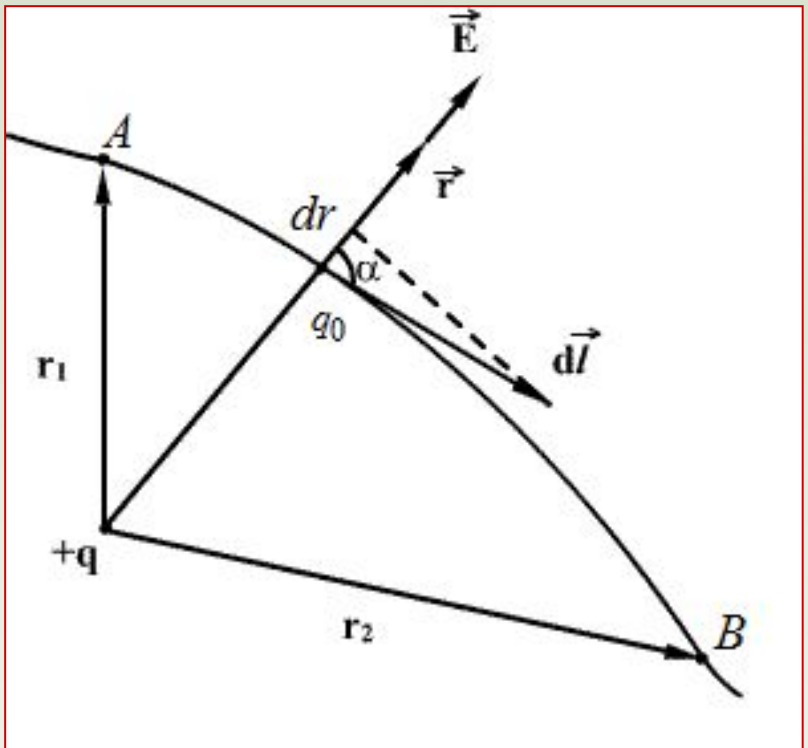


Рис.5

При этом кулоновская сила совершает элем. работу:

$$dA = \vec{F}d\vec{l} = Fdl\cos\alpha = Fdr\ .$$

Полная работа:

$$\boxed{A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \int_{r_1}^{r_2} \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).}$$

Вывод: Работа по перемещению заряда в эл. поле не зависит от формы пути, т.е. **электростатические силы** являются **потенциальными** или **консервативными**.

По определению консервативности силы эта работа идет на изменение потенциальной энергии W взаимодействия зарядов:

$$dA = -dW \quad \text{или} \quad A_{12} = -\left(W_2 - W_1\right),$$

отсюда следует, что **кулоновская потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов**, находящихся на расстоянии r друг от друга, равна:

$$\boxed{W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r}.}$$

Разделив это выражение на величину пробного заряда q_0, получаем выражение для **потенциала** поля точечного заряда q, находящегося в начале координат:

$$\boxed{\varphi = \frac{W}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r},}$$

т.е. потенциал равен потенциальной энергии единичного точечного заряда в данной точке поля. Единицей измерения потенциала является Вольт [*B*].

И потенциал, и потенциальная энергия определены с точностью до произвольной постоянной. Эта постоянная выбирается так, чтобы на бесконечном удалении $(r \to \infty)$ W и φ были равны нулю.

Поэтому можно сказать, что **потенциалом электрического поля называется работа по перемещению единичного положительного заряда из данной точки поля в бесконечность:**

$$\boxed{\varphi = \frac{A_{1-\infty}}{q_0}}$$

Для потенциала также, как и для напряженности, справедлив **принцип суперпозиции**: потенциал системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов отдельных зарядов:

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i}.}$$

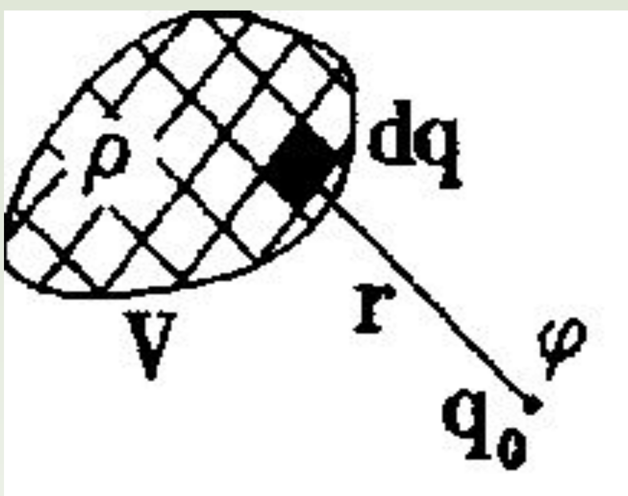


Рис.6

Потенциал поля непрерывно распределенного заряда (*рис.6*):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho\, dV}{r}.$$

Связь между вектором $\vec{E}$ и φ для электрического поля

Элементарная работа dA электрического поля:

$$dA = \vec{F}d\vec{l} = q_0\vec{E}d\vec{l} .$$

Тогда работа электрического поля по переносу пробного заряда из точки 1 в точку 2 :

$$A_{12} = q_0\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} .$$

Т.к. электростатическое поле потенциально, то эта работа равна разности потенц. энергий пробного заряда в этом эл. поле:

$$A_{12} = -(W_2 - W_1) = q_0(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Получаем связь разности потенциалов и напряженности эл. поля:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} .$$

Теперь получим обратное соотношение. Для этого запишем полученное соотношение в дифференциальной форме:

$$d\varphi = -\vec{E}d\vec{l} = -\left(E_x dx + E_y dy + E_z dz\right).$$

Для того чтобы из этой формулы *определить проекцию напряженности эл. поля*, например, по оси x, необходимо считать остальные переменные постоянными величинами.

В математике такая производная называется частной:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Эти три производные объединяют в векторный оператор, который носит название ***градиент*** (или оператор ∇).

Запишем окончательную формулу:

$$\boxed{\vec{E} = -grad\,\varphi = -\nabla\varphi = -\left(\vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}.$$

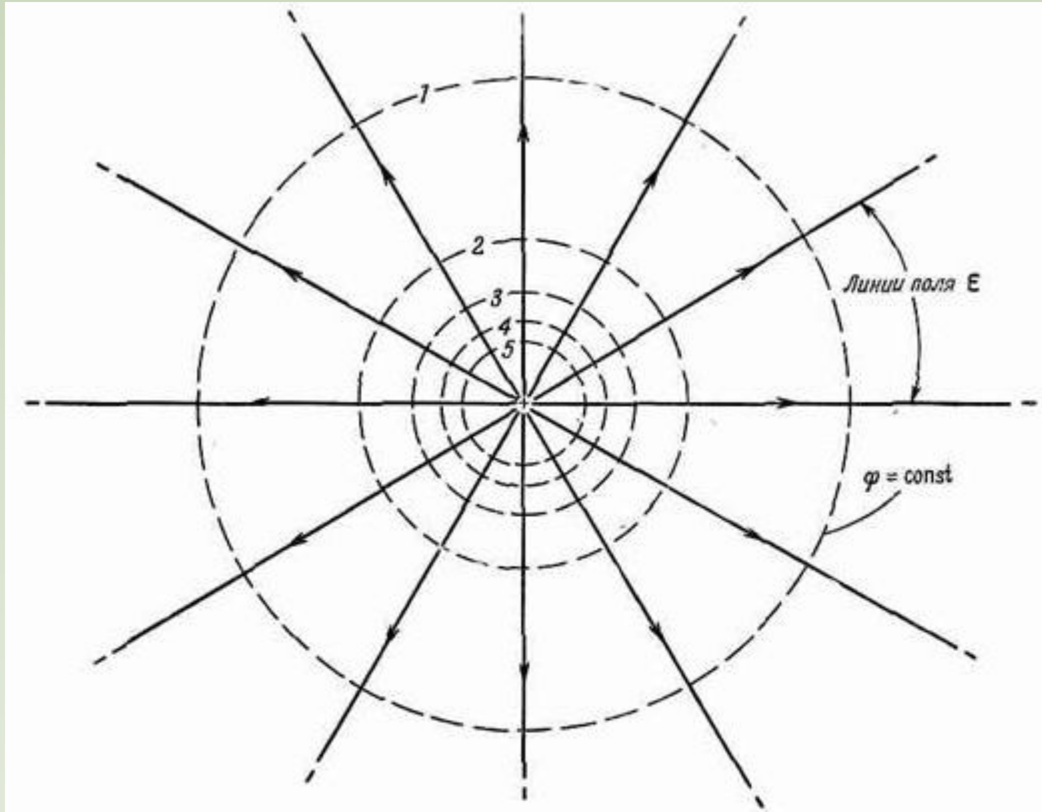
Эквипотенциальные поверхности

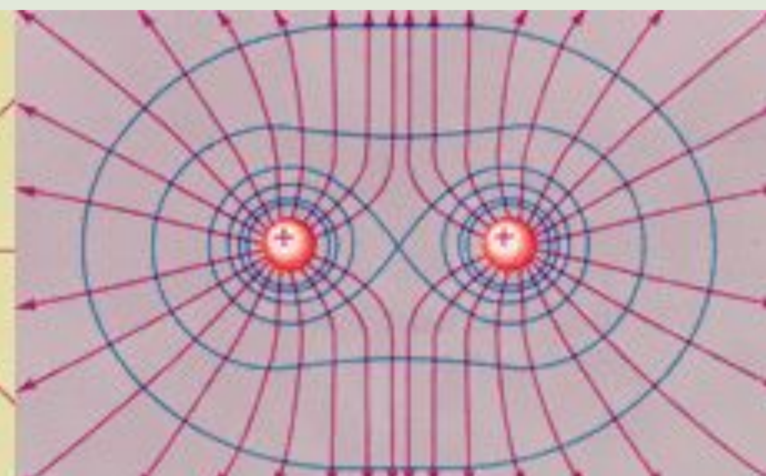
Введем понятие **эквипотенциальной поверхности** — поверхности, во всех точках которой потенциал φ имеет одно и то же значение.

Эквипотенциальные поверхности проводят так, чтобы разность потенциалов между двумя соседними поверхностями была одна и та же. Там, где потенциал поля больше, эквипотенциальные поверхности расположены гуще.

Вектор $\vec{E}$ направлен в каждой точке по нормали к эквипотенциальной поверхности в сторону уменьшения потенциала φ.

Для сложной системы зарядов проще вычислить потенциал, поскольку он является скалярной величиной, а затем, по известному распределению потенциала φ всегда можно определить напряженность поля, как: $\vec{E} = -grad\,\varphi$.


1
2
3
4
5
Линии поля E
φ = const



Энергия взаимодействия системы электрических зарядов

Потенциальная энергия двух зарядов q_1 и q_2 может быть представлена в форме:

$$W_{p_{12}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}}.$$

Энергия системы из N зарядов (q_1, q_2, …q_N) определяется как сумма энергий взаимодействия зарядов, взятых попарно:

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{(i \neq k)} W_{p_{ik}}(r_{ik}),$$

здесь

$$W_{p_{ik}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon} \cdot \frac{q_i q_k}{r_{ik}}.$$

Тогда формула для потенциальной энергии системы зарядов:

$$\boxed{W_p = \frac{1}{2} \sum_{(i \neq k)} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon} \cdot \frac{q_i \cdot q_k}{r_{ik}}.}$$

Здесь все индексы i и k пробегают значения от 1 до N, значения $i = k$ не принимаются во внимание.

Это выражение можно переписать в виде:

$$W_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \cdot \sum_{k=1(k\neq i)}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon} \cdot \frac{q_k}{r_{ik}},$$

величина $\varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon} \cdot \sum_{k=1(k\neq i)}^{N} \frac{q_k}{r_{ik}}$

есть потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме q_i, в точке, где помещен заряд q_i.

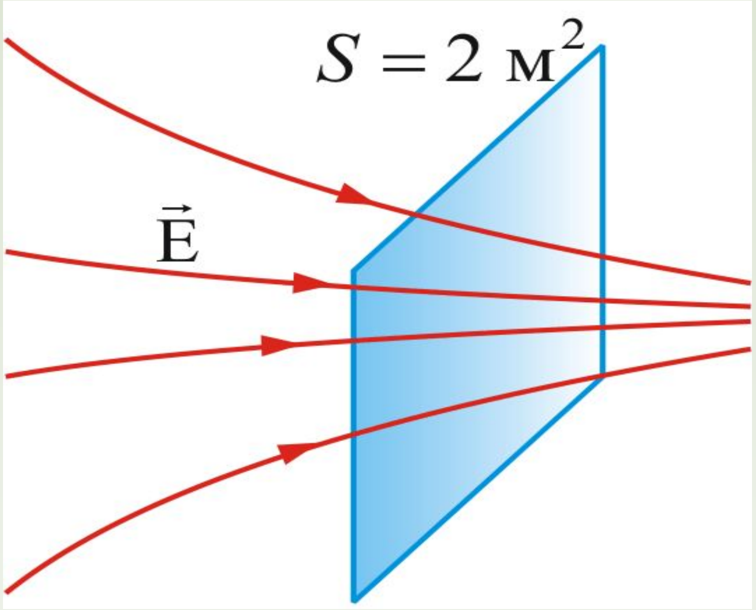
Выражение для потенциальной энергии системы электрических зарядов можно записать также в виде:

$$\boxed{W_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\varphi_i .}$$

Поток вектора напряженности электрического поля (поток вектора $\vec{E}$)

Густота силовых линий *находится* ***по правилу***:
число силовых линий, перпендикулярно пронизывающих поверхность единичной площади, должно равняться (*или быть пропорциональным*) *модулю вектора напряженности поля* $|\vec{E}|$ *в данном месте*, т.е.

$$\boxed{|\vec{E}| = \frac{\text{число линий}}{S} = \frac{\Phi}{S}}$$



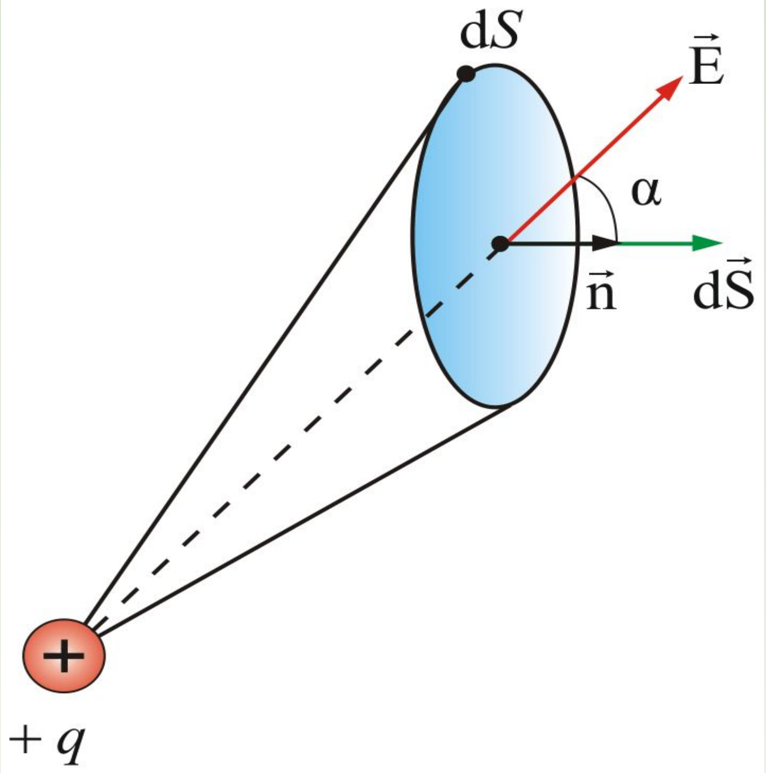
$$|\vec{E}| = \frac{4}{2} = 2\left(\frac{\text{В}}{\text{м}}\right)$$

Полное число силовых линий, проходящих через поверхность S называется ***потоком вектора напряженности*** Φ_E *через эту поверхность.*

- Поток вектора напряженности через произвольную элемент. площадку dS будет равен:

$$\boxed{d\Phi_E = E dS\cos\alpha = E_n dS.}$$

{Т.О., поток вектора $\vec{E}$ есть скаляр, который в зависимости от величины угла α может быть как > 0, так и < 0.}



- Т.е. в однородном поле:

$$\boxed{\Phi_E = ES.}$$

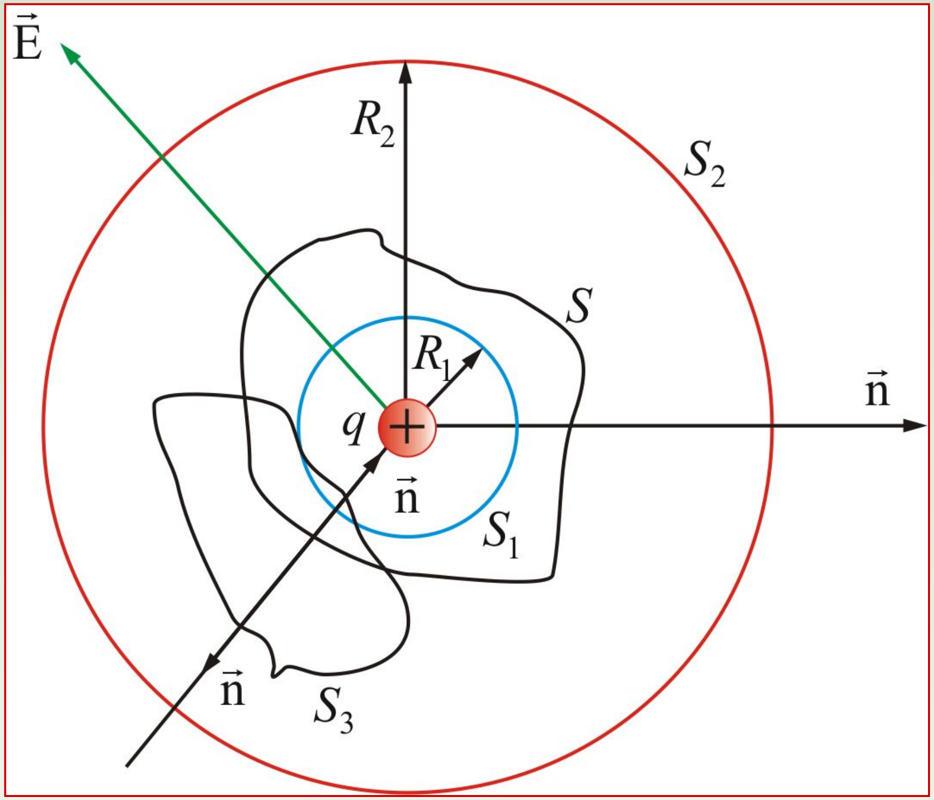
- В произвольном эл. поле:

$$\boxed{\Phi_E = \int_S \vec{E}d\vec{S} = \int_S E_n dS.}$$

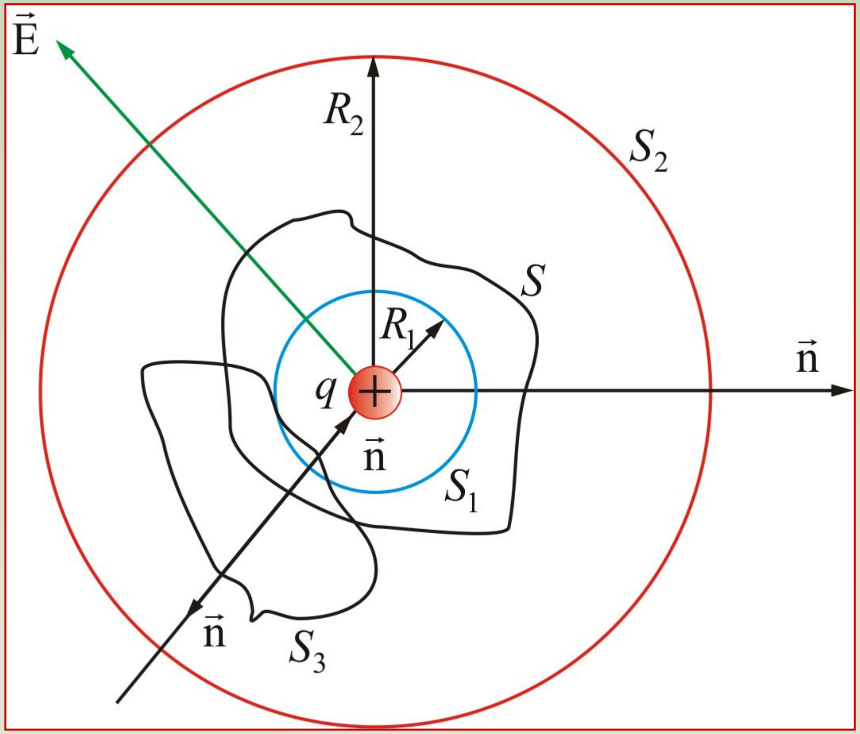
Теорема Гаусса и ее применение к расчету электрических полей

Для вычисления напряженности эл. полей, обладающих симметрией, применяется теорема Гаусса.

Определим поток вектора $\vec{E}$ через произвольную замкнутую поверхность *S*, окружающую точечный заряд *q*.



Окружим заряд q сферой S_1.
Центр сферы совпадает с центром заряда.
Радиус сферы S_1 равен R_1



В каждой точке поверхности S_1 проекция E_n на направление внешней нормали одинакова и равна:

$$\boxed{E_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_1^2}.}$$

- Тогда поток через S_1:

$$\boxed{\Phi_E = \oint_{S_1} E_n \mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} 4\pi R_1^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.}$$

- Поток через сферу S_2, имеющую радиус R_2:

$$\Phi_E = \oint_{S_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\,\mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\,4\pi R_2^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

- Из непрерывности линии $\vec{E}$ следует, что поток и через любую произвольную поверхность S будет равен этой же величине:

$$\Phi_E = \oint_S E_n\,\mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

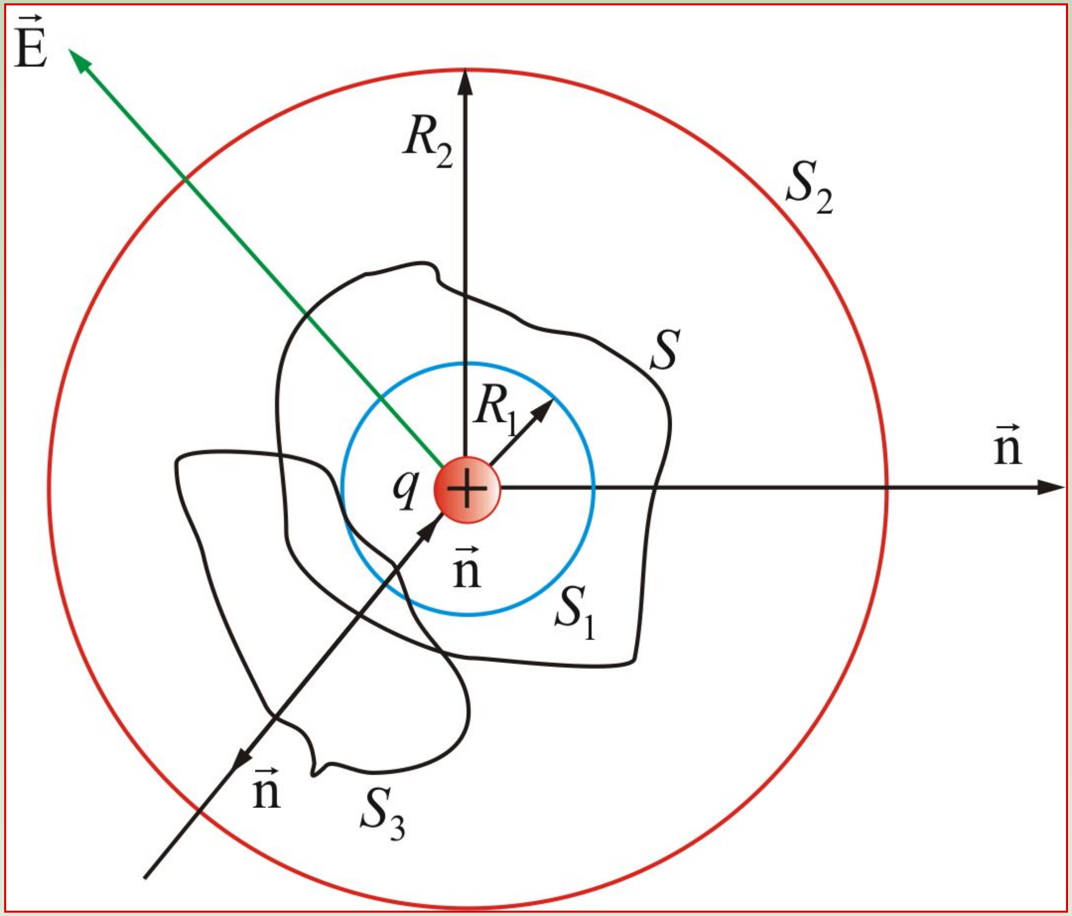
– теорема Гаусса для одного заряда.

Для любого числа произвольно расположенных зарядов, находящихся внутри поверхности:

$$\boxed{\Phi_E = \oint_S E_n \mathrm{d}S = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}}$$

– теорема Гаусса для системы зарядов (в интегральной форме).

Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме всех зарядов, расположенных внутри поверхности, деленной на ε_0.



Полный поток проходящий через S_3, не охватывающую заряд q, равен нулю:

$$\Phi_3 = 0.$$

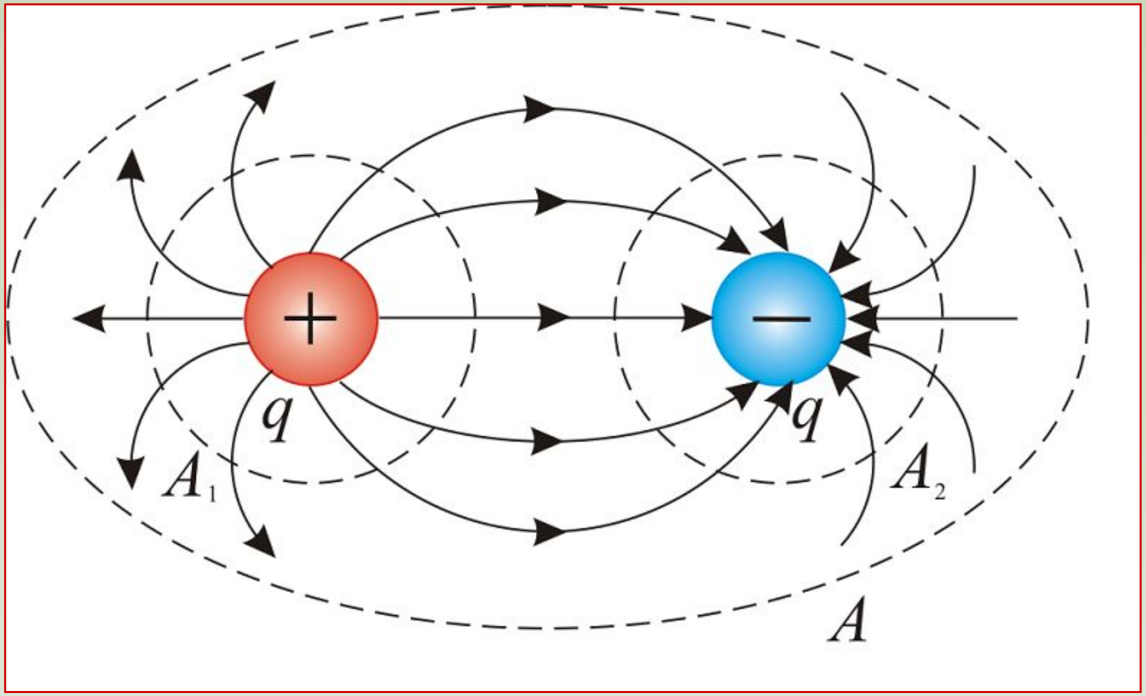
Суммарный заряд объема dV можно записать:

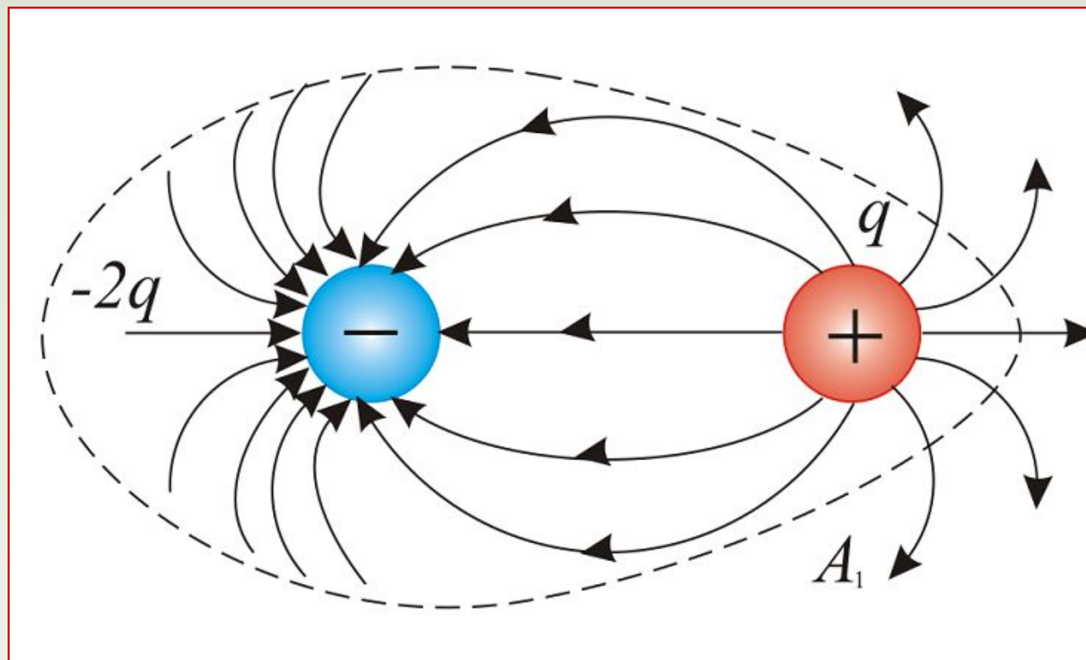
$$\sum q_i = \int_V \rho \mathrm{d}V.$$

Тогда можно получить:

$$\boxed{\Phi_E = \oint_S \vec{\mathrm{E}} \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \mathrm{d}V}$$

– это ещё одна форма записи теоремы Гаусса, **если заряд неравномерно распределен по объему**.


+
−
q
q
A1
A2
A


-2q
−
+
q
A1