



5



7



3



Решение заданий В9 по математике. ЕГЭ 2014

Цивлина Светлана Васильевна
ГБОУ СОШ № 1115 г. Москвы



5



7



3



График функции



5



7



3



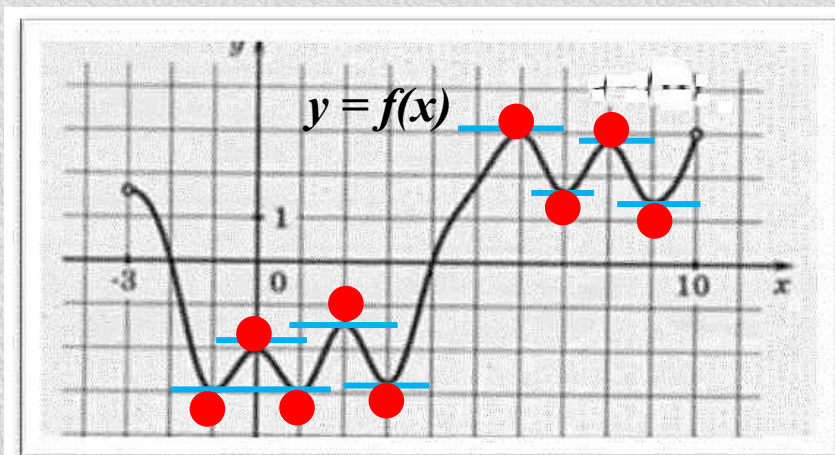
На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3; 10)$. Найдите количество точек, в которых производная $f'(x)$ равна 0.

Решение.

Чтобы производная функции была равна нулю, угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции в этой точке (или тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox) был тоже равен нулю, поэтому касательная к графику функции в этой точке параллельна оси Ox .

Проведём горизонтальные касательные, посчитаем количество точек.

Ответ: 9.





5



7



3



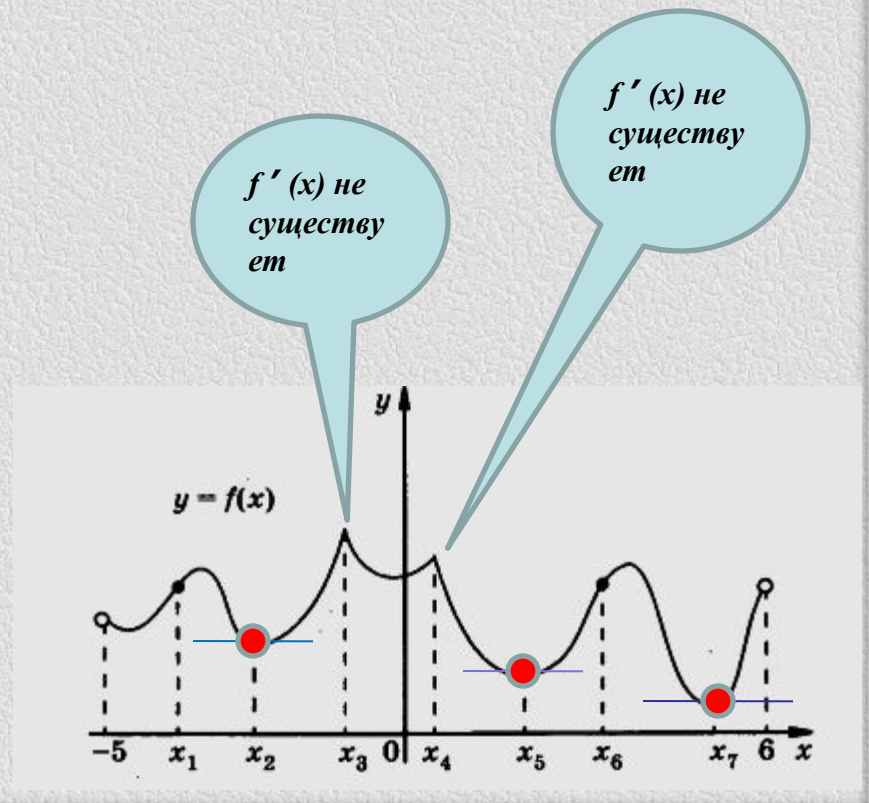
Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-5; 6)$. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек $x_1 - x_7$ те точки, в которых производная $f'(x)$ равна 0. В ответе запишите количество найденных точек.

Решение.

Касательная параллельна оси Ox только в точках x_2, x_5, x_7 .

(В точках x_3, x_4 производная не существует).

Ответ: 3.





5



7



3



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке x_0 .
Уравнение касательной дано на рисунке. Найдите значение производной функции $y = 2f(x) - 1$ в точке x_0 .

Решение.

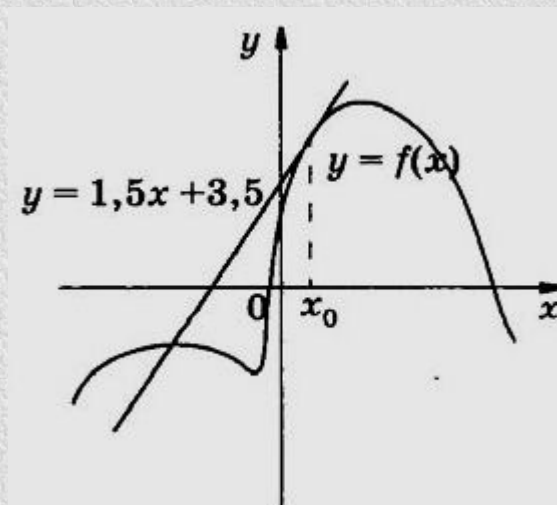
1. Найдем производную функции y , т.е. $y' = (2f(x) - 1)' = 2f'(x)$.

2. Известно, что в уравнении касательной $y = kx + b$ угловой коэффициент $k = f'(x)$.

Поэтому т.к. в нашем случае $y = 1,5x + 3,5$, то $f'(x) = 1,5$.

3. Подставим $f'(x) = 1,5$, получим $y' = 2f'(x) = 2 \cdot 1,5 = 3$ - это и есть искомое значение производной функции $y = 2f(x) - 1$ в точке x_0 .

Ответ: 3.





5



7



3



На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-1; 12)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

Решение.

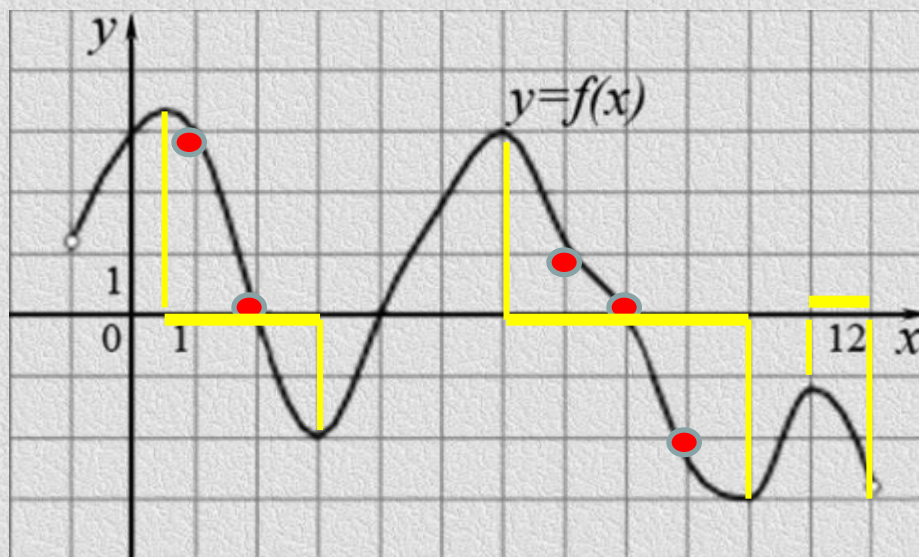
Производная функции отрицательна на интервалах убывания функции,

т. е. на интервалах $(0, 5; 3)$, $(6; 10)$ и $(11; 12)$,

целыми являются точки $x = 1; 2; 7; 8; 9$

(точки $x = 3, 6, 10, 11, 12$ не принадлежат интервалам убывания функции)

Ответ: 5.





5



7



3



Прямая $y=5x+5$ является касательной к графику функции $8x^2+29x+c$. Найдите x .

Решение.

Так как прямая $y = kx+b$ является касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 ,

то одновременно выполняются два

условия:
$$\begin{cases} f'(x) = k; \\ f(x_0) = y(x_0). \end{cases}$$

В нашем случае:

$$\begin{cases} 16x_0 + 29 = 5; \\ 8x_0^2 + 29x_0 + c = 5x_0 + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = -1,5; \\ c = 23. \end{cases}$$

Ответ: 23.



5



7



3



Прямая $y = -9x + 5$ является касательной к графику функции $ax^2 + 15x + 11$. Найдите a .

Решение.

Прямая $y = kx + b$ является касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 , поэтому одновременно выполняются два условия:

$$\begin{cases} f'(x) = k; \\ f(x_0) = y(x_0). \end{cases} \quad \text{Поэтому: } \begin{cases} 2ax_0 + 15 = -9; \\ ax_0^2 + 15x_0 + 11 = -9x_0 + 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax_0 = -12; \\ -12x_0 + 24x_0 = -6; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 24; \\ x_0 = -0,5. \end{cases}$$

Ответ: 24.



5



7



3



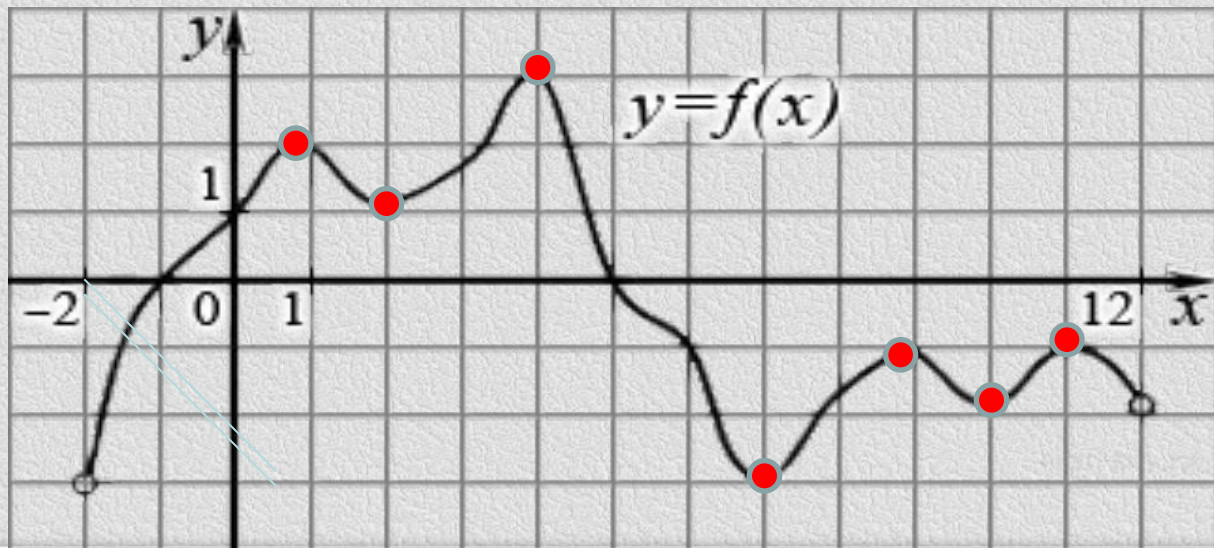
На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-2; 12)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

Решение.

Точки экстремума – это точки минимума и максимума. Заданная функция имеет максимумы в точках 1, 4, 9, 11 и минимумы в точках 2, 7, 10.

Поэтому сумма точек экстремума равна $1 + 4 + 9 + 11 + 2 + 7 + 10 = 44$.

Ответ: 44.





5



7



3



На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

Решение (первый способ)

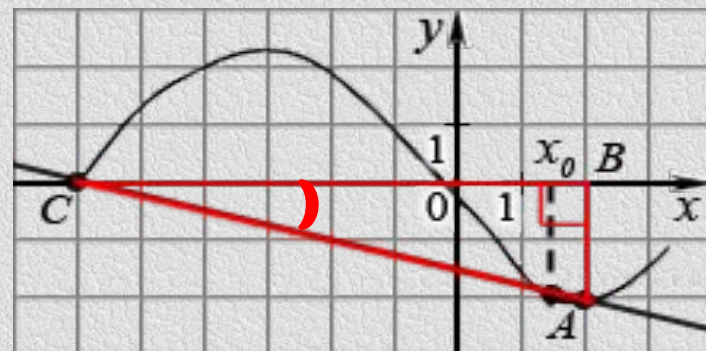
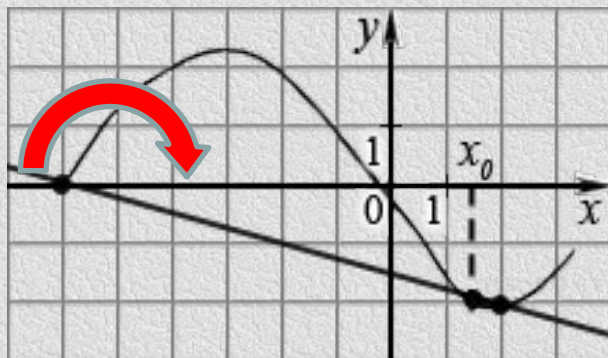
Значение производной в точке касания равно тангенсу угла между данной касательной к положительным направлением оси абсцисс.

Построим треугольник с вершинами в точках $A(2; -2)$, $B(2; 0)$, $C(-6; 0)$.

Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB .

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\operatorname{tg}(\angle ACB) = -\frac{AB}{BC} = -\frac{2}{2 - (-6)} = -0,25.$$

Ответ: - 0,25





5



7



3



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

- Решение (второй способ).

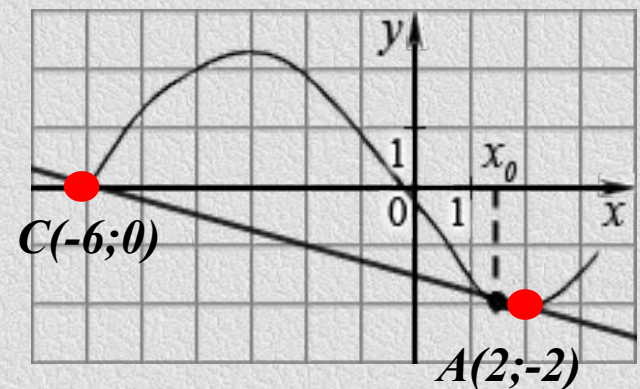
Определим координаты двух точек на графике касательной $C(-6;0)$, $A(2;-2)$ (т.е. слева $(x_1; y_1)$, справа $(x_2; y_2)$).

Воспользуемся формулой углового коэффициента прямой

$$f'(x) = k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

В нашем случае $f'(x) = \frac{-2-0}{2-(-6)} = -0,25$ — значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

Ответ: - 0,25.





5



7



3



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

Решение (третий способ)

Уравнение касательной к функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид $y = f'(x_0) \cdot x + b$.

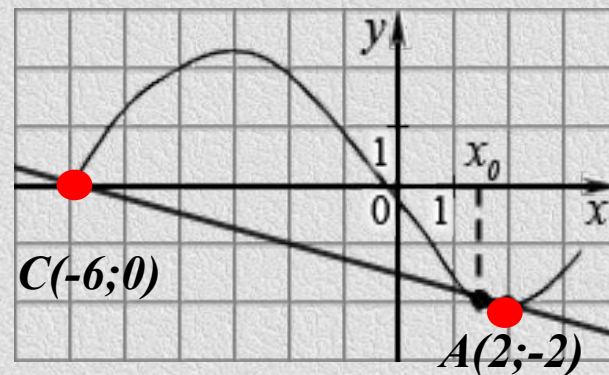
По рисунку определим, что данная касательная проходит через точки $C(-6;0)$, $A(2;-2)$

Составим систему уравнений, подставив координаты каждой точки вместо x и y . Получим

$$\begin{cases} 0 = f'(x_0) \cdot (-6) + b; \\ -2 = f'(x_0) \cdot 2 + b; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -1,5; \\ f'(x_0) = -0,25. \end{cases}$$

Ответ: - 0,25.





5



7



3



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке абсциссой, равной 3. Найдите значение производной этой функции в точке $x = 3$.

Решение.

По условию $x_0 = 3$.

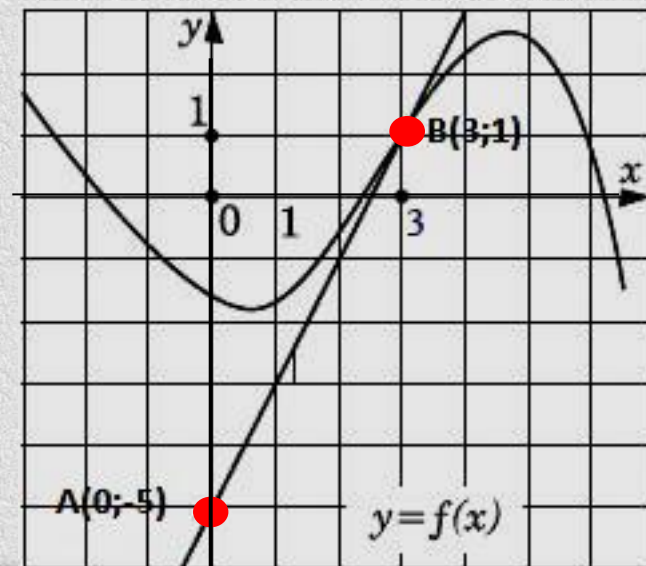
Рассмотрим точки касательной $A(0; -5)$ и $B(3; 1)$.

Воспользуемся формулой углового коэффициента прямой

$$k = f'(x_0) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

тогда $f'(x_0) = \frac{1 - (-5)}{3 - 0} = 2.$

Ответ: 2.





5



7



3



На рисунке изображен график некоторой функции $y=f(x)$.
Функция $F(x)=-x^3-21x^2-144x-\frac{11}{4}$ – одна из первообразных
функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры

Решение.

Площадь закрашенной фигуры вычисляется по формуле

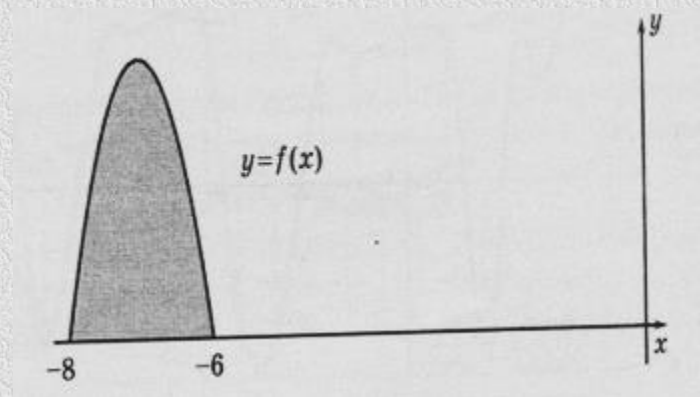
$$s = F(b)-F(a), \quad \text{где } a = -8, \quad b = -6.$$

$$F(b)=F(-6) = -(-6)^3-21\cdot(-6)^2 - 144\cdot(-6) - \frac{11}{4} = 324 - \frac{11}{4};$$

$$F(a)=F(-8) = -(-8)^3-21\cdot(-8)^2 - 144\cdot(-8) - \frac{11}{4} = 320 - \frac{11}{4};$$

$$s = F(-6) - F(-8) = 4.$$

Ответ: 4.





5



7



3



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

Решение.

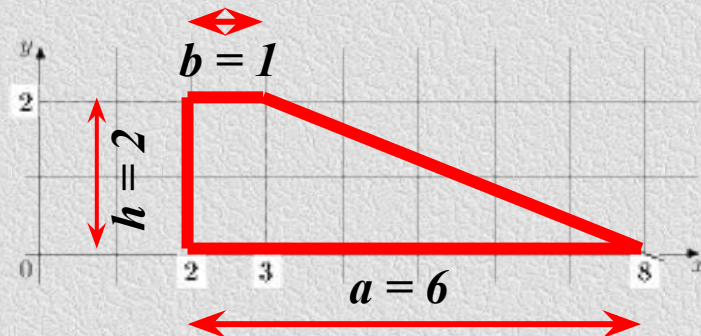
Ответить на вопрос задачи — значит вычислить площадь фигуры, ограниченной функцией $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = 2$ и $x = 8$.

Фигура — это трапеция с основаниями, равными $a = 8 - 2 = 6$, $b = 3 - 2 = 1$ и высотой $h = 2$.

По формуле площади трапеции $S = \frac{1}{2} (a+b) \cdot h$ найдем искомую площадь, т.е. вычислим $F(8) - F(2)$

$$S = \frac{1}{2} (1+6) \cdot 2 = 7.$$

Ответ: 7.





5



7



3



На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$.
Пользуясь графиком, вычислите определённый интеграл

$$\int_1^6 f(x) dx.$$

Решение.

Определенный интеграл равен площади фигуры, ограниченной функцией $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = 1$ и $x = 6$.

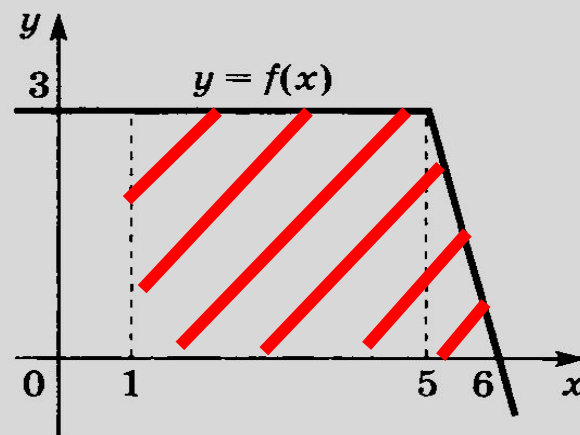
Фигура (это заштрихованная часть на рисунке)

- это трапеция с основаниями, равными $a = 5 - 1 = 4$, $b = 6 - 1 = 5$ и высотой $h = 3$.

По формуле площади трапеции $S = \frac{1}{2} (a+b) \cdot h$ найдем искомую площадь, т.е. данный интеграл

$$S = \frac{1}{2} (4+5) \cdot 3 = 13,5.$$

Ответ: 13,5.





5



7



3



На рисунке изображен график функции и отмечены точки -2 , -1 , 1 , 4 . В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

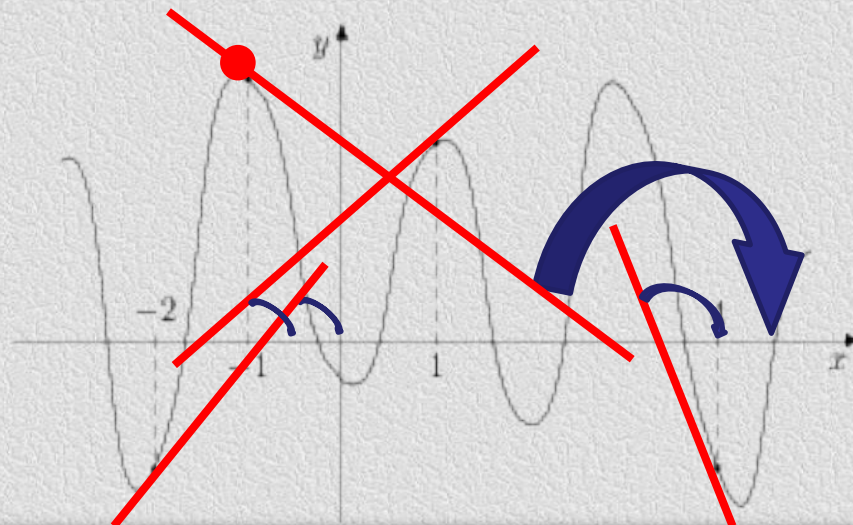
Решение.

В каждой из данных точек проведём касательную к графику функции

и определим, в какой из них будет самый большой угол между касательной и положительным направлением оси Ox .

При $x = -1$ угол самый большой, поэтому значение производной наименьшее.

Ответ: -1 .





5



7



3



График производной функции



5



7



3



На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-9; 6]$.

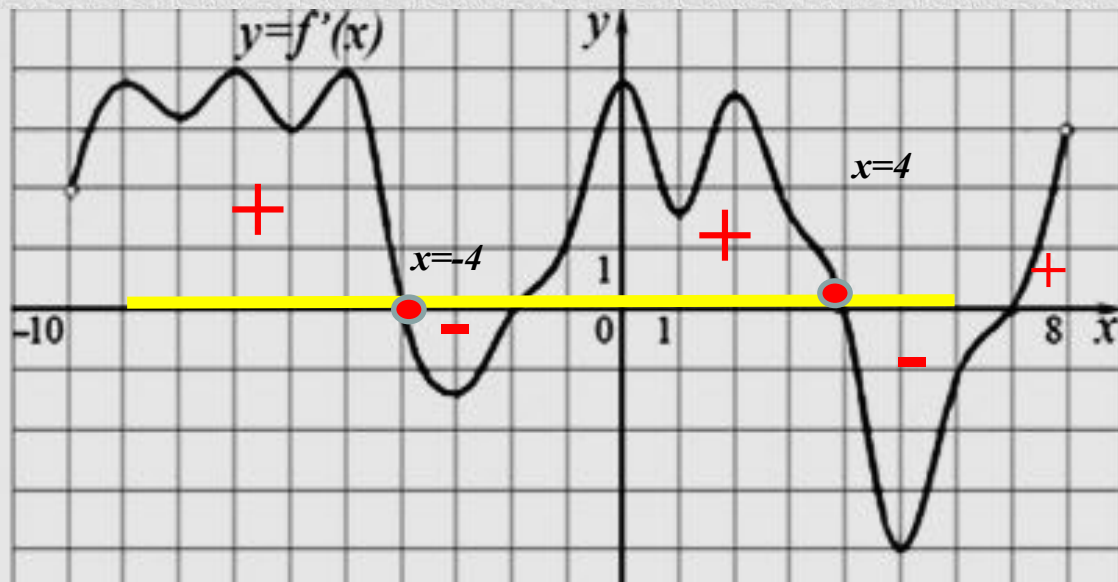
Решение.

Рассмотрим отрезок $[-9; 6]$.

Производная меняет знак с плюса на минус при $x = -4$ и $x = 4$,

Поэтому функция имеет 2 точки максимума.

Ответ: 2.





5



7



3

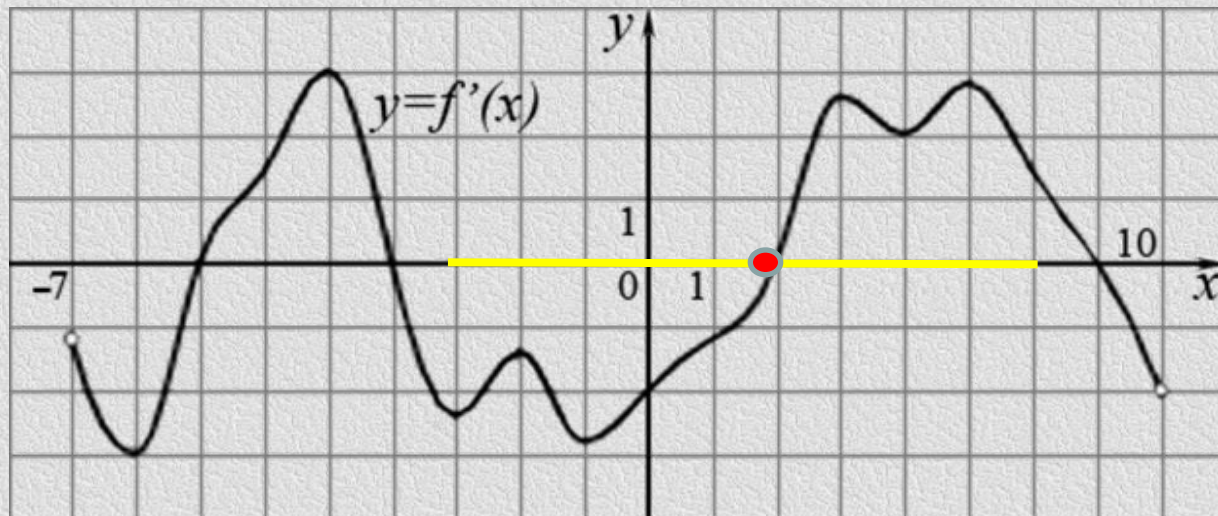


На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 10)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-3; 8]$.

Решение.

На отрезке $[-3; 8]$ функция имеет единственную точку минимума $x = 2$, так как в этой точке производная меняет знак с минуса на плюс.

Ответ: 1.





5



7



3



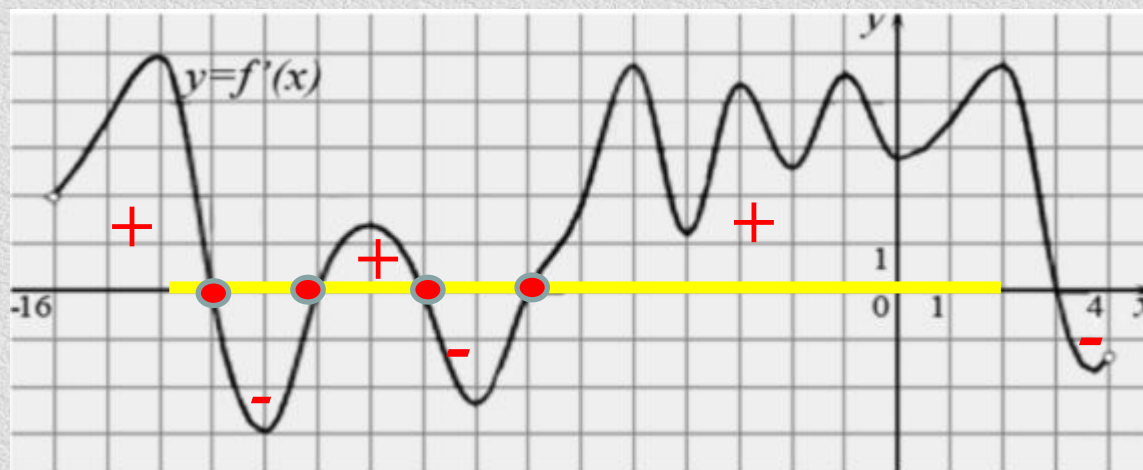
На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-16; 4)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-14; 2]$.

Решение.

Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума.

Производная на отрезке $[-14; 2]$ меняет знак с плюса на минус в точках $x = -13; -9$ (точки максимума);
а с минуса на плюс в точках $x = -11; -7$ (точки минимума),
поэтому функция имеет 4 точки экстремума.

Ответ: 4.





5



7



3



На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 4)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

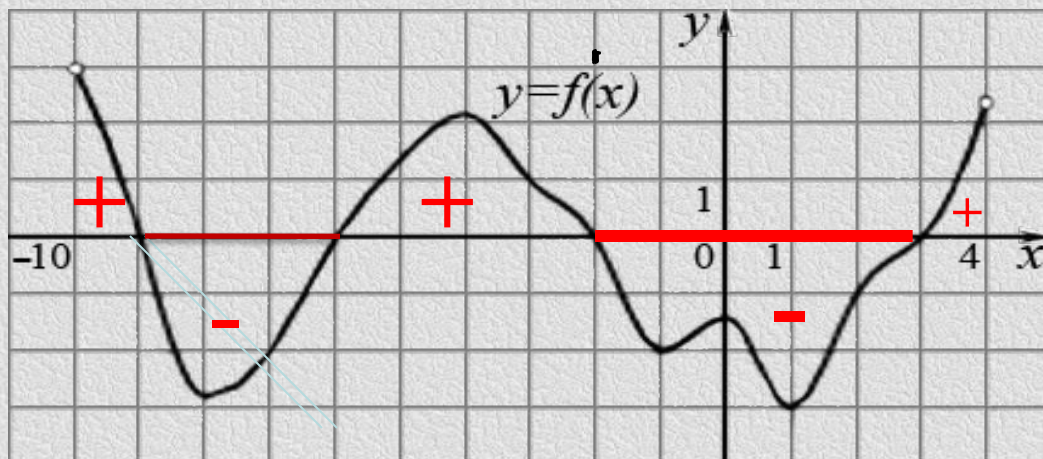
Решение.

При $x \in (-9; -6)$ и $x \in (-2; 3)$

значение производной функции меньше нуля, функция убывает.

Длина наибольшего из этих промежутков равна 5.

Ответ: 5.





5



7



3



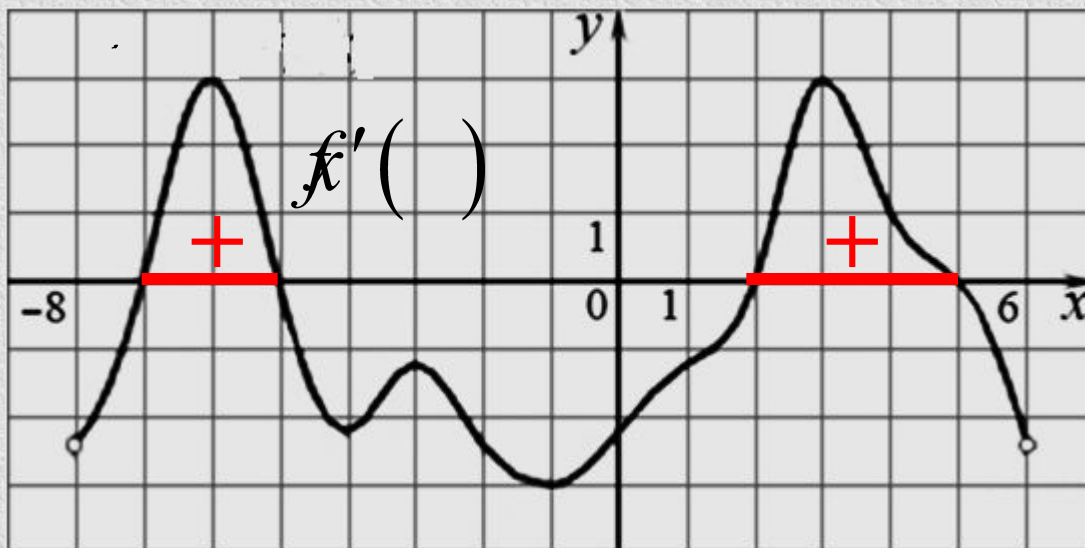
На рисунке изображен график производной функции $f'(x)$, определенной на интервале $(-8; 6)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

Решение.

Промежутки возрастания функции $f(x)$ соответствуют промежуткам, на которых производная функции положительна, то есть интервалам $(-7; -5)$, $(2; 5)$.

Наибольший из них — интервал $(2; 5)$, длина которого 3.

Ответ: 3.





5



7



3



На рисунке изображен график $y=f'(x)$ производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. В какой точке отрезка $[-2; 7]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

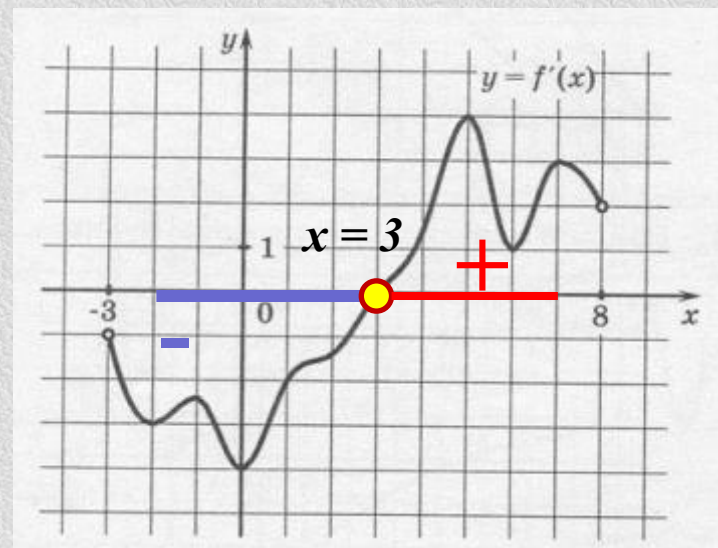
Решение.

На промежутке $[-2; 3)$ производная функции меньше 0, значит функция убывает.

На промежутке $(3; 7]$ производная функции больше 0, значит функция возрастает.

Поэтому $x = 3$ — точка минимума на отрезке $[-2; 7]$,
при $x = 3$ функция принимает
наименьшее значение.

Ответ: 3.





5



7



3



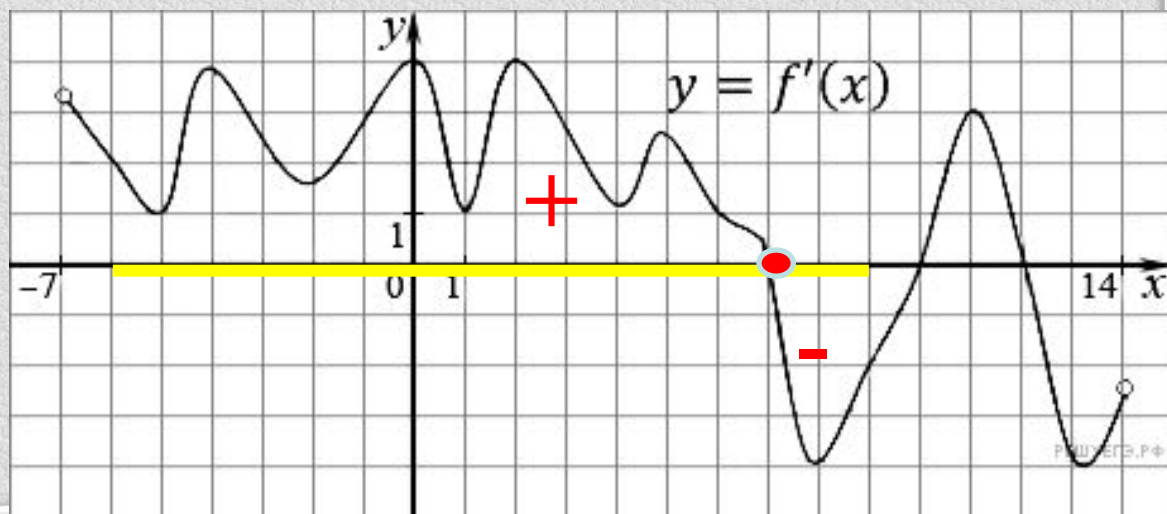
На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 14)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-6; 9]$.

Решение.

На отрезке $[-6; 9]$

функция имеет единственную точку максимума $x = 7$, так как лишь в этой точке производная функции меняет знак с «+» на «-».

Ответ: 1.





5



7



3



Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-3; 5)$. На рисунке изображен график ее производной. Определите, сколько существует касательных к графику функции $y = f(x)$, которые параллельны прямой $y = 3x - 5$ или совпадают с ней.

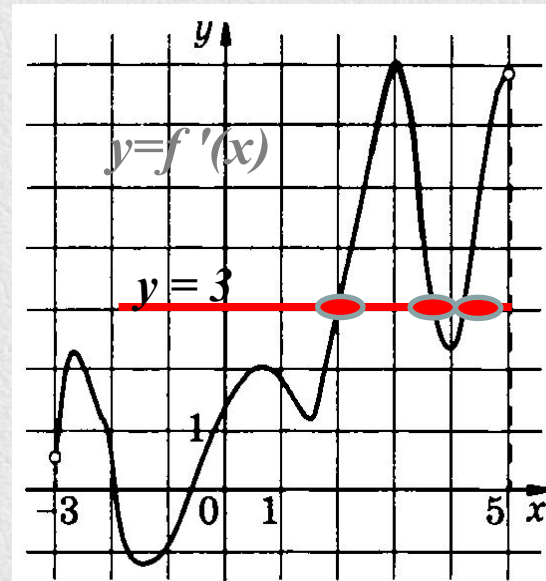
Решение.

Согласно условию параллельности прямых, касательная $y = kx + b$ к графику данной функции параллельна прямой $y = 3x - 5$ или совпадает с ней, если у них будут равные угловые коэффициенты k . В нашем случае $k = 3$.

Так как $k = f'(x_0)$, найдём на графике производной те точки, в которых выполняется это условие.

Проведём прямую $f'(x) = 3$, то есть $y = 3$ получим 3 точки пересечения с графиком $f'(x)$.

Ответ: 3.





5



7



3



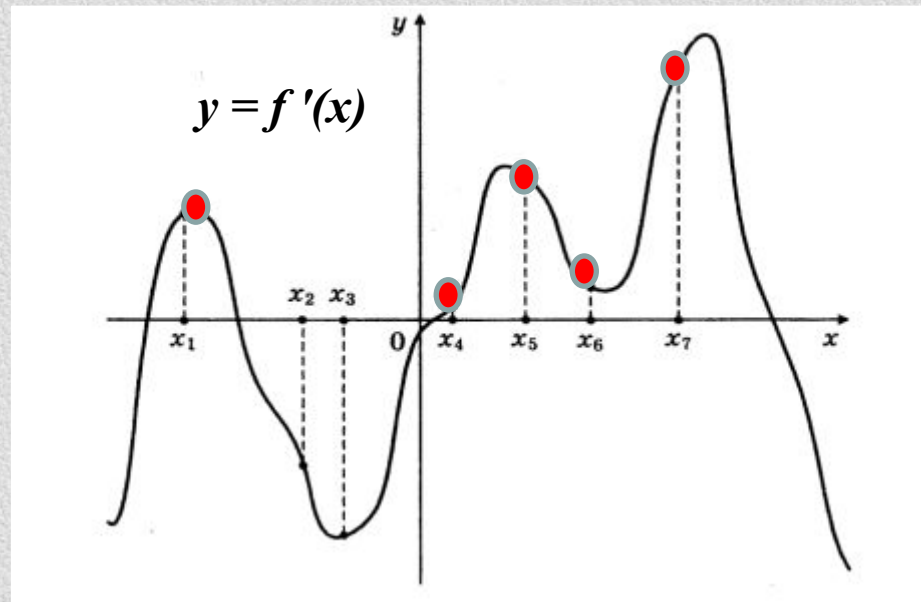
На рисунке изображены график функции $y = f'(x)$. Найдите среди точек x_1 - x_7 те точки, в которых функция $f(x)$ возрастает. В ответе запишите количество найденных точек.

Решение.

Функция возрастает, если её производная больше нуля.

Так как на рисунке показан график производной, то больше нуля она в тех точках, которые выше оси Ox , то есть в пяти точках.

Ответ: 5.





5



7



3



ГРАФИК ПЕРВООБРАЗНОЙ



5



7



3



На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ – одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на некотором интервале $(-16; -2)$. Пользуясь рисунком, определите число корней уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-14; -4]$.

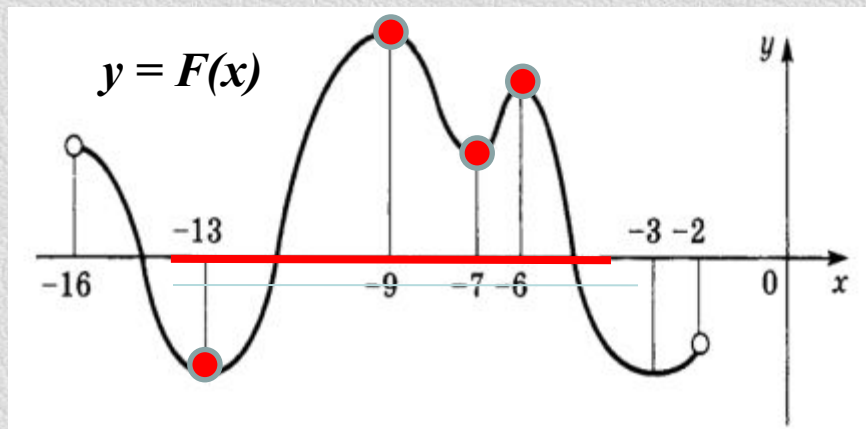
Решение.

Воспользуемся определением первообразной.

Функцию $y = F(x)$ называют первообразной для функции $y = f(x)$ на промежутке X , если для всех x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Производная функции y равна нулю в четырёх точках.

Ответ: 4.





5



7



3



Источники

- <http://213.208.189.17/os11/xmodules/qprint/afrms.php?proj=> ФИПИ. Открытый банк ЕГЭ. Математика
- ЕГЭ-2014: Математика: самое полное издание типовых вариантов заданий; под ред. А.Л.Семёнова, И.В.Ященко. — Москва: АСТ: Астрель, 2014. — 123, [5]с. - (Федеральный институт педагогических измерений).
- <http://pedsovet.su/> шаблон фона