СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Лекция № 6

«Методы кодирования»

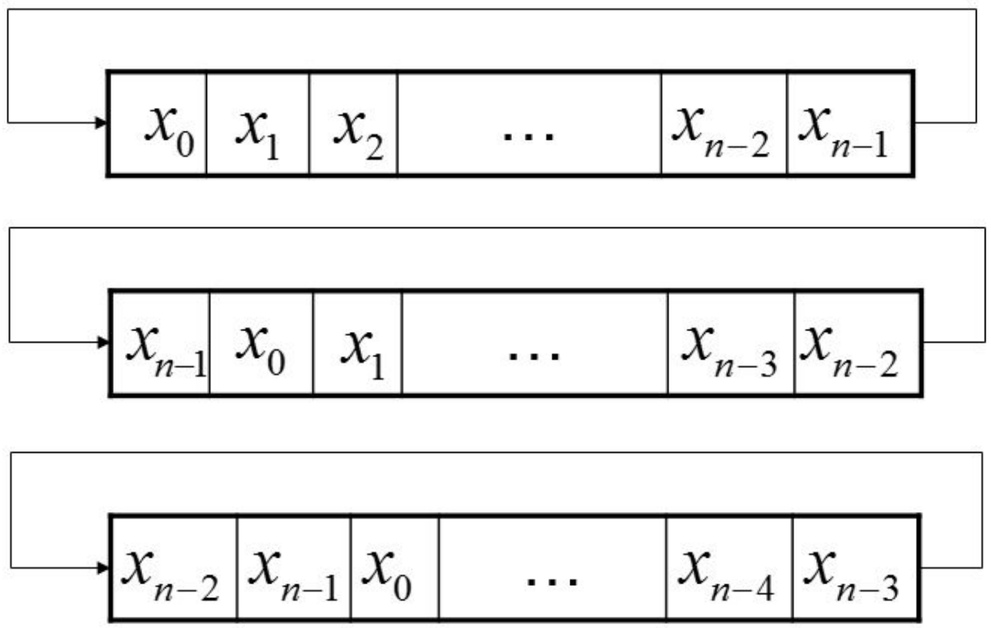
Циклический код.

Ведущий преподаватель: канд. техн. наук, доцент кафедры ИУТС Альчаков Василий Викторович

2 ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОДЫ

Основные свойства циклических кодов

Если некоторая кодовая комбинация принадлежит циклическому коду, то комбинация, полученная циклической перестановкой исходной комбинации (циклическим сдвигом), также принадлежит данному коду



$$(x_0, x_1, x_2, \boxtimes, x_{n-2}, x_{n-1})$$

$$(x_{n-1}, x_0, x_1, x_2, \boxtimes, x_{n-2})$$

$$(x_{n-2}, x_{n-1}, x_0, x_1, x_2, \boxtimes, x_{n-3})$$

Вторым свойством всех разрешенных комбинаций циклических кодов является их делимость без остатка на некоторый выбранный полином, называемый ***производящим*** или ***образующим***.

3 ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОДЫ

Характеристика циклических кодов

Циклический код относится к систематическим блочным **(n, k)** – кодам, в которых **k** первых разрядов представляют собой комбинация первичного кода, а последующие **(n-k)** разрядов являются проверочными.

В основе построения циклических кодов лежит операция деления передаваемой кодовой комбинации на порождающий неприводимый полином степени **r**.

Остаток от деления используется при формировании проверочных разрядов. При этом операции деления предшествует операция умножения, осуществляющая сдвиг влево **k**–разрядной информационной кодовой комбинации на **r** разрядов.

При декодировании принятой **n**–разрядной кодовой комбинации опять производится деление на порождающий (производящий, образующий) полином.

4 ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОДЫ

Способность исправлять ошибки

Пусть общее число бит в блоке равно **n**, из них полезную информацию несут в себе **m** бит, тогда в случае ошибки имеется возможность исправить **s** бит. Зависимость **s** от **m** и **n** для кодов можно представить в виде таблицы.

Зависимость общего числа разрядов комбинаций от количества информационных и исправляемых разрядов

Общее число битов, *n*	Число полезных битов, *m*	Число исправляемых битов, *s*
31	26	1
	21	2
	16	3
63	57	1
	51	2
	45	3
127	120	1
	113	2
	106	3

5 ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОДЫ

Представление в виде многочленов

$$A_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \boxtimes \quad + a_1 x + a_0$$

$$a_{n-1} = \{0, 1\}$$

$$x^5 + x^3 + x^2 + 1 \Leftrightarrow 101101$$

6 ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОДЫ

Операции над полиномами

Сложение по модулю 2

$$G_1(x) = x^5 + x^3 + x^2 + 1 \Leftrightarrow 101101$$

$$\oplus$$

$$G_2(x) = x^5 + x^4 + x^2 + x + 1 \Leftrightarrow 110111$$

$$G_3(x) = x^4 + x^3 + x \Leftrightarrow 11010$$

Деление полинома на полином

$$\begin{array}{l|l} x^6 + x^4 + x^3 & x^3 + x^2 + 1 \\ \oplus \quad x^6 + x^5 + x^3 & \hline \\ \hline x^5 + x^4 & x^3 + x^2 \\ \oplus \quad x^5 + x^4 + x^2 & \hline \\ \hline x^2 & \end{array}.$$

7 ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОДЫ

Неприводимые многочлены

Идея построения циклических кодов базируется на использовании **неприводимых многочленов**.

Неприводимым называется многочлен, который не может быть представлен в виде произведения многочленов низших степеней, т.е. делится только на самого себя или на единицу и не делится ни на какой другой многочлен.

На такой многочлен делится без остатка двучлен $\left(x^n + 1\right)$

Неприводимые многочлены в теории циклических кодов играют роль **порождающих** полиномов.

8 ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОДЫ

Порождающий полином

Требования к порождающим полиномам

1) $P(x)$ должен быть ненулевым;
2) Вес $P(x)$ не должен быть меньше минимального кодового расстояния $V(P(x)) \geq d_{\min}$;
3) $P(x)$ должен иметь максимальную степень k, где k – число избыточных элементов в коде;
4) $P(x)$ должен быть делителем полинома $(x^n + 1)$.

Циклический код – это код, все рабочие комбинации которого делятся на порождающий полином без остатка

$$r \geq \log_2(n+1)$$

9 ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОДЫ

Порождающие полиномы

Примеры порождающих полиномов

Степень полинома r	Порождающий полином $P(x)$
2	111
3	1011
4	10011
5	100101, 111101, 110111
6	1000011, 1100111
7	10001001, 10001111, 10011101
8	111100111, 100011101, 101100011

10 ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОДЫ

Алгоритм кодирования

$$P(x) = a_{r-1}x^{r} + a_{r-2}x^{r-1} + \square \quad + 1$$

$$A_m(x)$$

1. Исходная кодовая комбинация представляется в виде $A_m(x)$

   $1101 \rightarrow A_m(x) = x^3 + x^2 + 1$

2. Многочлен $A_m(x)$ умножают на x^r. Степень порождающего полинома r равна значению старшего разряда исходной кодовой комбинации. $A_m(x) \cdot x^r$

   $r = 3$ – число контрольных символов

   $A_m(x) \cdot x^r = (x^3 + x^2 + 1)x^3 = x^6 + x^5 + x^3 \Rightarrow 1101000$

11 ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОДЫ

Алгоритм кодирования

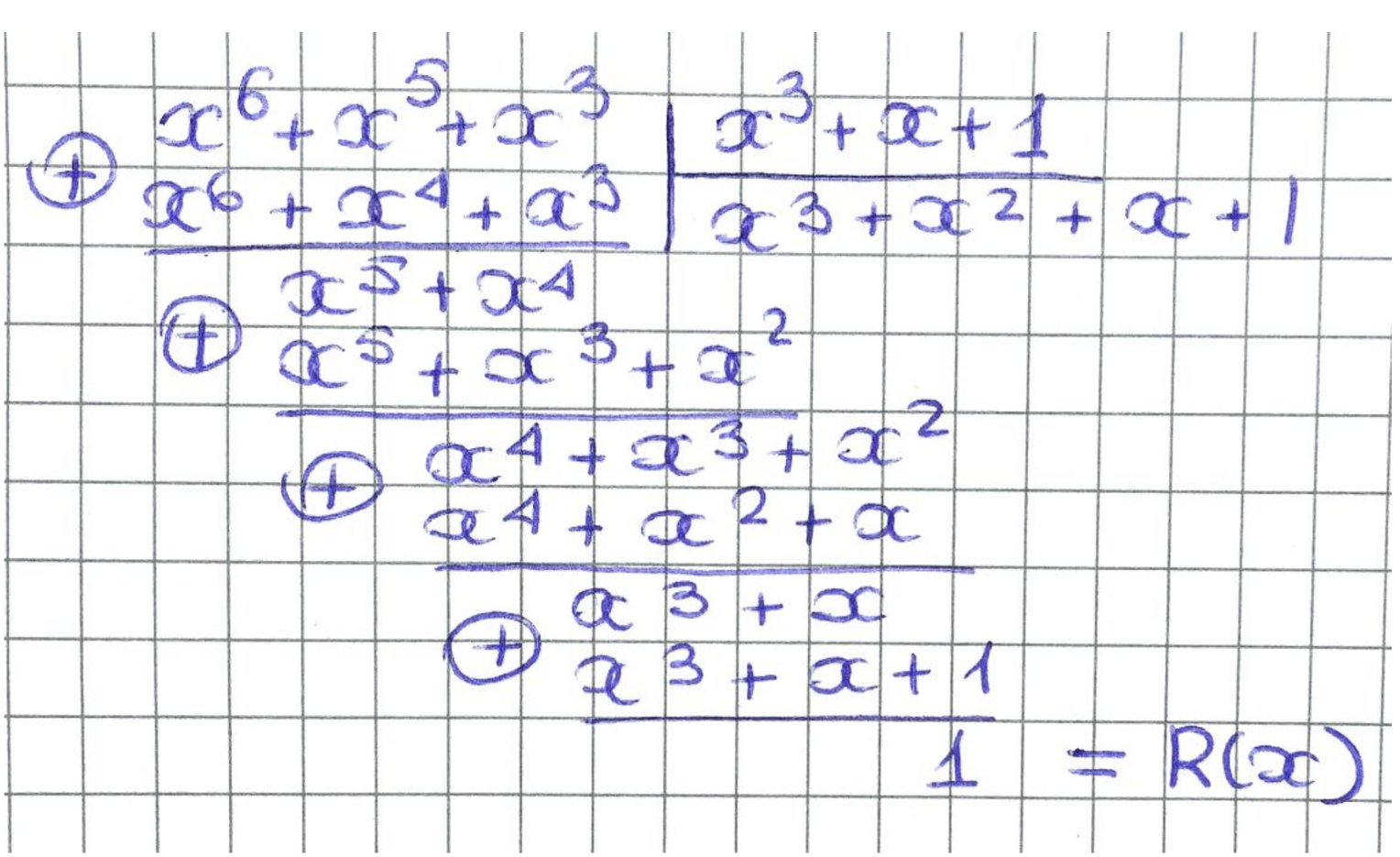
3. Определяют проверочные разряды, дополняющие исходную кодовую комбинацию до разрешенной. как остаток от деления полученного в предыдущем пункте многочлена на образующий полином.

Выбираем образующий полином степени $r = 3$

$$P(x) = x^3 + x + 1$$

Необходимо вычислить

$$\frac{A_m(x) \cdot x^r}{P(x)}$$



12 ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОДЫ

Алгоритм кодирования

4. Окончательно разрешенная кодовая комбинация циклического кода определяется как $A_{n-1}(x) = A_m(x)x^r + R(x)$

$x^6 + x^5 + x^3 + 1 \Rightarrow 1101001$

Если разделить $\frac{A_{n-1}(x)}{P(x)}$ в результате получится нулевой остаток.

13 ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОДЫ

Алгоритм декодирования

1. Выявляем факт наличия ошибки
Получаем остаток от деления принятой кодовой комбинации на образующий полином. Остаток от деления обозначаем

$$\frac{A_{n-1}(x)}{P(x)} = R_0(x)$$

1	1	0	1	0	0	1	исходная кодовая комбинация
1	1	0	0	0	0	1	
1	1	0	0	0	0	1	
1	0	1	1				
	1	1	1	0			
	1	0	1	1			
		1	0	1	0		
		1	0	1	1		
				0	1	1	ненулевой остаток

14 ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОДЫ

Алгоритм декодирования

2. Если ошибка содержится в одном из поверочных разрядов, то одночлен одиночной ошибки будет иметь степень, меньшую, чем степень образующего многочлена и совпадет с остатком от деления. При этом номер разряда остатка прямо укажет на номер искаженного поверочного разряда.

1	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	
1	**0**	**1**	**1**				
	1	**1**	**0**	**0**			
	1	**0**	**1**	**1**			
		1	**1**	**1**	**1**		
		1	**0**	**1**	**1**		
			1	**0**	**0**	**1**	
			1	**0**	**1**	**1**	
				0	**1**	**0**	ненулевой остаток ошибка во 2-м контр. разр.

15 ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОДЫ

Алгоритм декодирования

1. Принятая комбинация делится на образующий многочлен **P(x)**. Если остаток **R(x) <> 0**, то определяется вес остатка **w**. Если вес остатка равен или меньше числа исправляемых ошибок **t** (**w <= t**), то принятую комбинацию складывают по модулю 2 с остатком и получают исправленную комбинацию.

2. Если **w > t**, то производится циклический сдвиг принятой кодовой комбинации на один символ влево и полученная после такого сдвига комбинация снова делится на образующий многочлен. Если вес полученного остатка **w <= t**, то циклически сдвинутую комбинацию складывают с остатком и затем после сложения циклически сдвигают в обратную сторону вправо на один символ (возвращают на прежнее место). В результате получаем исправленную комбинацию.

3. Если после циклического сдвига на один символ по прежнему **w > t**, то производят дополнительные циклические сдвиги влево. При этом после каждого сдвига осуществляется деление сдвинутой комбинации на **P(x)** и проверяется вес остатка. При **w <= t** сдвинутую комбинацию складывают с остатком и производят обратных циклических сдвигов вправо столько, сколько было сделано влево.

ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОДЫ

Алгоритм декодирования

```
1 1 1 1 0 0 1
1 0 1 1
---------
  1 0 0 0
  1 0 1 1
  -------
      1 1 0 1
      1 0 1 1
      -------
        1 1 0     ненулевой остаток
                  вес остатка > 1
```

```
1 1 1 0 0 1 1     I сдвиг
1 0 1 1
---------
  1 0 1 0
  1 0 1 1
  -------
      1 1 1       ненулевой остаток
                  вес остатка > 1

1 1 0 0 1 1 1     II сдвиг
1 0 1 1
---------
  1 1 1 1
  1 0 1 1
  -------
    1 0 0 1
    1 0 1 1
    -------
        1 0 1     ненулевой остаток
                  вес остатка > 1
```

17 ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОДЫ

Алгоритм декодирования

1	0	0	1	1	1	1	III сдвиг
1	0	1	1				
		1	0	1	1		
	1	0	1	1			
			0	0	1		ненулевой остаток
							вес остатка = 1

1	0	0	1	1	1	1	
				0	0	1	
1	0	0	1	1	1	0	
0	1	0	0	1	1	1	I сдвиг
1	0	1	0	0	1	1	II сдвиг
1	1	0	1	0	0	1	III сдвиг
1	1	0	1	0	0	1	исходная кодовая комбинация