
Системы счисления

Литература

Острейковский В.А. Информатика: Учеб.
для вузов .-М. : Высш. шк.,2000

Система счисления

Система счисления — это метод записи чисел с помощью набора специальных знаков, которые называются цифрами.

Множество цифр, используемых в системе счисления, называется алфавитом.

Системы счисления бывают позиционными и непозиционными.

Непозиционные системы счисления

Вес цифры (т.е. тот вклад, который она вносит в значение числа) не зависит от ее позиции в записи числа.

Пример. Римская система счисления:

в числе XXXII (тридцать два) вес цифры X в любой позиции равен десяти, вес цифры I в любой позиции равен единице и т.д.

Позиционные системы счисления

В позиционных системах счисления значимость (вес) каждой цифры числа зависит от позиции, которую она занимает в числе.

Пример: в числе $757,7$ первая семерка означает 7 сотен, вторая – 7 единиц, а третья – 7 десятых долей единицы.

Позиционные системы счисления

Сама запись числа 757,7 означает сокращенную запись выражения

$$700+50+7+0,7 = 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} = 757,7$$

Любая позиционная система счисления характеризуется своим основанием.

Позиционные системы счисления

За основание системы счисления можно принять любое натуральное число — 2, 3, 4 и т.д.

Следовательно, возможно бесчисленное множество позиционных систем: двоичная, троичная, четверичная и т.д.

Алфавит позиционной системы счисления

Для записи чисел в позиционной системе с основанием q нужен алфавит из q цифр.

Таким образом, основание позиционной системы счисления — это количество цифр в её алфавите.

Обычно при $q < 10$ используют q первых арабских цифр, а при $n > 10$ к десяти арабским цифрам добавляют латинские буквы.

Алфавит позиционной системы счисления

Примеры алфавитов нескольких систем:

Основание	Название	Алфавит
$n = 2$	Двоичная	01
$n = 3$	Троичная	012
$n = 8$	Восьмеричная	01234567
$n = 16$	Шестнадцатеричная	0123456789ABCDEF

Если требуется указать основание системы, к которой относится число, то основание приписывается нижним индексом к этому числу. Пример:

$$101101_2, 3671_8, 3B8F_{16}$$

Позиционные системы счисления

Запись чисел в каждой из систем счисления с основанием q означает сокращенную запись многочлена:

$$a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \dots + a_1q^1 + a_0q^0 + a_{-1}q^{-1} + \dots + a_{-m}q^{-m},$$

Здесь:

a_i – цифры системы счисления;

n и m – число целых и дробных разрядов, соответственно.

Позиционные системы счисления

Примеры:

Разряды	3	2	1	0	-1
Число	1	0	1	1,	1

$$1011,1_2 = 1*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 + 1*2^{-1};$$

Разряды	2	1	0	-1	-2
Число	2	7	6,	5	2

$$276,52_8 = 2*8^2 + 7*8^1 + 6*8^0 + 5*8^{-1} + 2*8^{-2};$$

Это и есть способ перевода числа из системы счисления с основанием q в 10-ю систему счисления.

Перевод числа из системы счисления с основанием q в 10-ю систему счисления

Пример.

Дано действительное число $101,01_2$.

Записать его в десятичной системе счисления.

Решение.

$$101,01_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 4 + 0 + 1 + 0 + 0,25 = 5,25_{10}$$

Перевод числа из системы счисления с основанием q в 10-ю систему счисления

Пример: перевести число из 16-ой системы счисления в 10-ю.

Решение:

$$\begin{aligned} 15FC_{16} &= 1 \cdot 16^3 + 5 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16^1 + 12 = \\ &= 4096 + 1280 + 240 + 12 = 5628_{10}. \end{aligned}$$

Задачи

Перевести данные числа в 10-ю систему счисления:

А) 1000001_2

$$1000001_2 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 64 + 1 = 65_{10}.$$

Б) $1000011111,0101_2$

$$1000011111,0101_2 = 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-4} = \\ = 512 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + 0,25 + 0,0625 = 543,3125_{10}.$$

В) $1216,04_8$

$$1216,04_8 = 1 \cdot 8^3 + 2 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 + 4 \cdot 8^{-2} = 512 + 128 + 8 + 6 + 0,0625 = \\ = 654,0625_{10}.$$

Г) $29A,5_{16}$

$$29A,5_{16} = 2 \cdot 16^2 + 9 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^0 + 5 \cdot 16^{-1} = 512 + 144 + 10 + 0,3125 \\ = 656,3125_{10}.$$

Задачи

Пример. Определить наименьшие основания позиционных систем счисления, при которых $56_x = 63_y$.

Решение. Запишем числа в виде многочленов:

$$56_x = 5 \cdot x^1 + 6 \cdot x^0 \quad \text{и} \quad 63_y = 6 \cdot y^1 + 3 \cdot y^0$$

Получаем равенство: $5x + 6 = 6y + 3$

Преобразуем равенство: $x = (6y - 3)/5$

При этом имеем еще 2 ограничения:

$$x > 6 \quad \text{и} \quad y > 6.$$

Теперь нужно найти значения x и y , удовлетворяющие всем трем условиям.

Пример

Перебирая значения $Y > 6$ по возрастанию, подбираем такое при котором X должно быть целое:

$$Y=7: \quad x = (6 \cdot 7 - 3)/5 = 39 / 5 - \text{не целое}$$

$$Y=8: \quad x = (6 \cdot 8 - 3)/5 = 45 / 5 = 9$$

Ответ: $Y = 8, X = 9.$

Порождение чисел в позиционных системах счисления

В системе счисления цифры упорядочены в соответствии с их значениями: $1 > 0$, $2 > 1$ и т.д.

Порождаются числа в позиционных системах счисления с помощью правила продвижения цифры.

Продвижение цифры – это замена её на следующую по величине.

Продвинуть цифру 1 значит заменить её на 2, продвинуть цифру 2 значит заменить её на 3 и т.д.

Продвинуть старшую цифру (например, 9 в 10-ой системе) значит заменить её на 0.

В двоичной системе, использующей только две цифры – 0 и 1, продвижение 0 означает замену его на 1, а продвижение 1 – замену её на 0.

Порождение чисел в позиционных системах счисления

Целые числа в любой системе счисления порождаются с помощью Правила счета:

Для образования целого числа, следующего за любым данным целым числом, нужно продвинуть самую правую цифру числа; если какая-либо цифра после продвижения стала нулем, то нужно продвинуть цифру, стоящую слева от неё.

Порождение чисел в позиционных системах счисления

Пример. Применяя правило счета, записать первые десять целых чисел в 2-ой, 3-ой, 5-ой, 8-ой системах счисления.

Решение.

2-я: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001;

3-я: 0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100;

5-я: 0, 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14;

8-я: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11.

Перевод целых десятичных чисел в систему счисления с основанием q

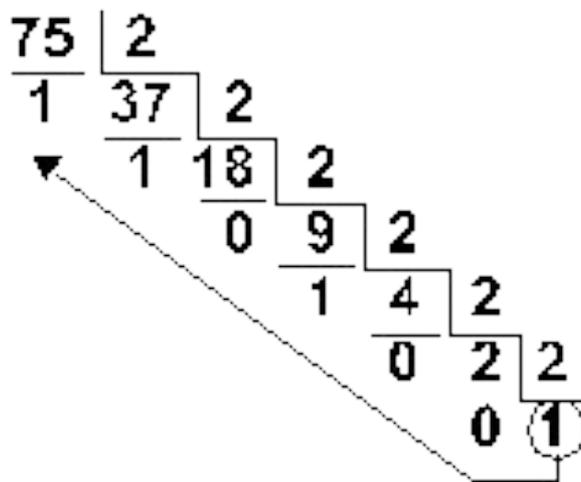
При переводе целого десятичного числа X в систему с основанием q данное число нужно последовательно делить на q до тех пор, пока не будет получен остаток $< q$.

Число в системе с основанием q записывается как последовательность остатков от деления, записанных в обратном порядке, начиная с последнего.

Перевод целых десятичных чисел в систему счисления с основанием q

Пример. Перевести число 75_{10} из 10-й в 2-ю с.с.

Решение.



$1\ 001\ 011_2$

Задача

Перевести число 37_{10} в 2-ю.

Решение.

$$\begin{array}{r} 37 \quad | \quad 2 \\ - 36 \quad | \quad 18 \quad | \quad 2 \\ \hline 1 \quad | \quad 18 \quad | \quad 9 \quad | \quad 2 \\ \quad | \quad 0 \quad | \quad 8 \quad | \quad 4 \quad | \quad 2 \\ \quad \quad | \quad \quad | \quad 1 \quad | \quad 4 \quad | \quad 2 \quad | \quad 2 \\ \quad \quad \quad | \quad \quad \quad | \quad \quad | \quad 0 \quad | \quad 2 \quad | \quad 1 \\ \quad \quad \quad \quad | \quad \quad \quad \quad | \quad \quad \quad \quad | \quad \quad | \quad 0 \quad | \quad 0 \end{array}$$

Ответ: $37_{10} = 100101_2$.

Перевод целых десятичных чисел в систему счисления с основанием q

Пример. Перевести число 315_{10} в 8-ю и 16-ю с.с.

Решение. 8-я с.с.

16-я с.с.

$$\begin{array}{r|l} 315 & 8 \\ - 24 & 39 \\ \hline 75 & 8 \\ - 72 & 32 \\ \hline 3 & 7 \\ & \textcircled{4} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 315 & 16 \\ - 16 & 19 \\ \hline 155 & 16 \\ - 144 & 3 \\ \hline 11 & \textcircled{1} \end{array}$$

Ответ: $315_{10} = 473_8 = 13B_{16}$

Примечание. 11_{10} – это B_{16} .

Задача

Перевести число 75_{10} в восьмеричную и шестнадцатеричную:

$$\begin{array}{r|l} 75 & 8 \\ \hline 72 & 9 \quad 8 \\ \hline 3 & 8 \quad 1 \\ & 1 \end{array}$$

$$113_8$$

$$\begin{array}{r|l} 75 & 16 \\ \hline 64 & 4 \\ \hline 11 & \end{array}$$

$$4(11)_8 = 4B_{16}$$

Ответ: $75_{10} = 113_8 = 4B_{16}$.

Перевод правильной десятичной дроби в систему счисления с основанием q

1. Дробь умножается на q .
 2. Результат умножения разделяется на 2 части - целая часть произведения записывается в результат, а дробная снова умножается.
 3. Умножение производится, пока дробная часть произведения не станет равной нулю (дробь переводится точно), или не выявится период или не будет достигнута заданная точность (например, до 5 знаков после запятой).
-

Перевод правильной десятичной дроби в систему счисления с основанием q

Пример. Перевести десятичную дробь 0,1875 в 2-ю, 8-ю и 16-ю с.с.

Решение.

2-я	8-я	16-я
$\begin{array}{r} 0,1875 \\ \times \quad 2 \\ \hline 0,3750 \\ \times \quad 2 \\ \hline 0,750 \\ \times \quad 2 \\ \hline 1,50 \\ \times \quad 2 \\ \hline 3,00 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0,1875 \\ \times \quad 8 \\ \hline 0,5000 \\ \times \quad 2 \\ \hline 1,00 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0,1875 \\ \times \quad 16 \\ \hline 11350 \\ 1875 \\ \hline 3,0000 \end{array}$
<p>Результат: $0,14_8$</p>	<p>Результат: $0,3_{16}$</p>	

Результат: $0,0011_2$

Здесь в левом столбце находится целая часть чисел, а в правом – дробная. Умножается только дробная.

Ответ: $0,1875_{10} = 0,0011_2 = 0,14_8 = 0,3_{16}$

Пример: Перевести число $0,35_{10}$ в 2-ю с.с.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 0,35 & \\ \times 2 & 2 \\ \hline 0,70 & \\ \times 2 & 2 \\ \hline 1,4 & \\ \times 2 & 2 \\ \hline 0,8 & \\ \times 2 & 2 \\ \hline 1,6 & \\ \times 2 & 2 \\ \hline 1,2 & \\ \times 4 & 4 \\ \hline 0,8 & \\ \times 2 & 2 \\ \hline 1,6 & \text{и т.д.} \end{array}$$

Результат: $0,35_{10} = 0,0101101\dots_2 = 0,01(011)_2$

Пример: Перевести число $0,35_{10}$ в 8-ю с.с.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 0,35 & \\ \times 8 & \\ \hline 2,80 & \\ \times 8 & \\ \hline 6,4 & \\ \times 8 & \\ \hline 3,2 & \\ \times 8 & \\ \hline 1,6 & \\ \times 2 & \\ \hline 1,2 & \\ \times 4 & \\ \hline 0,8 & \\ \times 8 & \\ \hline 6,4 \text{ и т.д.} & \end{array}$$

Результат: $0,35_{10} = 0,2631106\dots_8 = 0,2(63110)_8$

Задача

Пример: Перевести число $0,35_{10}$ в 2-ю, 8-ю и 16-ю.
Решение.

$$\begin{array}{r|l} 0, & 35 \\ \times & 16 \\ \hline 5, & 60 \\ \times & 16 \\ \hline 9, & 6 \\ \times & 16 \\ \hline 9, & 6 \text{ и т.д.} \end{array}$$

Результат: $0,35_{10} = 0,5(9)_{16}$

Перевод смешанных десятичных чисел в систему счисления с основанием q

Перевод смешанных чисел, содержащих целую и дробную части:

1. Переводится целая часть по алгоритму перевода целых чисел.
2. Переводится дробная часть по алгоритму перевода правильной десятичной дроби .
3. В итоговой записи числа в новой системе счисления целая часть отделяется от дробной запятой (точкой).

Задачи

1. Перевести число $20,375_{10}$ в 2-ю, 8-ю и 16-ю.

$$\text{Ответ: } 20,375_{10} = 10100,011_2 = 24,3_8 = 14,3_{16}$$

2. Перевести число $44,2890625_{10}$ в 2-ю, 8-ю и 16-ю.

$$\text{Ответ: } 44,2890625_{10} = 101100,0100101_2 = 54,221_8 = 2C,4A_{16}$$

Схема быстрого перевода между системами счисления, основания которых – это степени одного числа

Пример таких оснований - 2, 4, 8, 16.

Перевод осуществляется через систему счисления, основание которой равно возводимому в степень числу. Для примера – это двоичная с.с.

Перевод 8-х чисел в 2-ю с.с.: каждую 8-ю цифру заменяем эквивалентной ей двоичной триадой - тройкой цифр ($2^3 = 8$).

Перевод 16-х чисел в 2-ю с.с.: каждую 16-ю цифру заменяем эквивалентной ей двоичной тетрадой - четверкой цифр ($2^4 = 16$).

Схема быстрого перевода между системами счисления,

основания которых – это степени одного числа

Таблицы перевода:

10 - я	2 - я	4 - я	10 - я	2 - я	8 - я	10 - я	2 - я	16 - я
0	00	0	0	000	0	0	0000	0
1	01	1	1	001	1	1	0001	1
2	10	2	2	010	2	2	0010	2
3	11	3	3	011	3	3	0011	3
			4	100	4	4	0100	4
			5	101	5	5	0101	5
			6	110	6	6	0110	6
			7	111	7	7	0111	7
						8	1000	8
						9	1001	9
						10	1010	A
						11	1011	B
						12	1100	C
						13	1101	D
						14	1110	E
						15	1111	F

Схема быстрого перевода между системами
счисления, основания которых – это степени
одного числа

Пример: Число $1111010101,11_2$ перевести в 16-ю с.с.

Решение:

$$\underline{0011} \ \underline{1101} \ \underline{0101}, \underline{1100}_2 = 3D5, C_{16}$$

Задачи

Перевести число $10101001,10111_2$:

А) в 8-ю

$$10101001,10111_2 = \begin{array}{cccccc} 10 & 101 & 001, & 101 & 110_2 & = 251,56_8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 2 & 5 & 1 & 5 & 6 & \end{array}$$

Б) в 16-ю

$$10101001,10111_2 = \begin{array}{cccc} 1010 & 1001, & 1011 & 1000_2 & = A9,B8_{16} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ A & 9 & B & 8 & \end{array}$$

Арифметические операции в системе счисления с основанием q

Правила выполнения сложения, вычитания, умножения и деления те же, что и в десятичной системе счисления — сложение, вычитание и умножение выполняются столбиком, а деление углом.

Эти правила применимы и ко всем другим позиционным системам счисления

Двоичная система счисления: сложение

Таблица сложения:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Пример: Сложить число 1111_2 и 110_2

$$\begin{array}{r} 111 \\ + 1111 \\ \quad 110 \\ \hline 10101 \end{array}$$

перенос

$1+0=1$

$1+1=2=2+0$

$1+1+1=3=2+1$

$1+1=2=2+0$

Восьмеричная система счисления: сложение

Пример. $7536_8 + 472_8$

Решение. 7536_8

$$\begin{array}{r} 4 \quad 7 \quad 2_8 \\ \hline \end{array}$$

$$7 \quad 9(10)8 \quad -$$

$$\hline 8$$

$$7 \quad 9(11)0 \quad -$$

$$\hline 8$$

$$7(10)3 \quad 0$$

$$\hline 8$$

$$8 \quad 2 \quad 3 \quad 0$$

$$\hline 8$$

$$1 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \quad 0_8 \quad \text{Ответ: } 7536_8 + 472_8 = 10230_8$$

16-я система счисления: сложение

Пример. $7B3E_{16} + 7AD_{16}$

Решение. Сначала заменим буквы числами

$$7B3E_{16} + 7AD_{16} = 7(11)3(14)_{16} + 7(10)(13)_{16}$$

$$\begin{array}{r} 7 \quad (11) \quad 3 \quad (14)_{16} \\ + \quad 7 \quad (10) \quad (13)_{16} \\ \hline 7 \quad (18) \quad (13) \quad (27) \\ \quad \quad \quad 16 \quad \underline{\hspace{1.5cm}} \\ 7 \quad (18) \quad (14) \quad (11)_{-} \\ \quad \quad \quad 16 \quad \underline{\hspace{1.5cm}} \\ 8 \quad 2 \quad (14) \quad (11) \end{array}$$

Заменим числа на буквы : $8 \quad 2 \quad E \quad B_{16}$

Ответ: $7B3E_{16} + 7AD_{16} = 82EB_{16}$

Задачи

1. $215,4_8 + 73,6_8$

Решение:

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1 \\ 2\ 1\ 5,4 \\ + 7\ 3,6 \\ \hline 3\ 1\ 1,2 \end{array}$$

$4+6=10=8+2$
 $5+3+1=9=8+1$
 $1+7+1=9=8+1$

Ответ: $311,2_8$

2. $A8D,8_{16} + 93B,C_{16}$

Ответ: $13C9,4_{16}$

Задача

$$1100000011,011_2 - 101010111,1_{(2)}$$

Решение:

$$\begin{array}{r} 1100000011,011 \\ - 101010111,1 \\ \hline 110101011,111 \end{array}$$

Ответ: $110101011,111_2$

8-я система счисления: вычитание

Выполнить действие: $311,2_8 - 73,6_8$

Решение:

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \quad \text{Заемы} \\ 3 \ 1 \ 1, \ 2 \\ - 7 \ 3, \ 6 \\ \hline 2 \ 1 \ 5, \ 4 \end{array}$$

8-2-6=4
8-3=5
8-7=1

Ответ: $311,2_8 - 73,6_8 = 215,4_8$

Задача

$$1510,2_8 - 1230,54_8$$

Решение:

$$\begin{array}{r} 1510,2 \\ - 1230,54 \\ \hline 257,44 \end{array}$$

Ответ: $257,44_8$

16-я система счисления: вычитание

Выполнить действие: $C9,4_{16} - 3B,C_{16}$

Решение:

$$\begin{array}{r} \text{ Заемы} \\ (12) \ 9, \ 4 \\ \underline{3 \ (11), (12)} \\ 8 \ (13), \ 8 \\ \hline \begin{array}{|l} \hline 16+4-12=8 \\ \hline 16+8-11=13=D_{16} \\ \hline 12-1-3=8 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Ответ: $C9,4_{16} - 3B,C_{16} = 8D,8_{16}$

Задача

Вычислить: $27D, D8_{16} - 191, 2_{16}$

Решение:

	2	7	(13)	(13)	8
	-				
	1	9	1	,	2
<hr/>					
	(14)	(12)	(11)		8

Ответ: $27D, D8_{16} - 191, 2_{16} = EC, B8_{16}$

2-я система счисления: умножение

При умножении в двоичной системе счисления выполняется по правилам умножения в столбик.

Пример: $100111_2 \times 1000111_2$

Решение:

						×		1	0	0	1	1	1
							1	0	0	0	1	1	1
								1	0	0	1	1	1
+							1	0	0	1	1	1	
						1	0	0	1	1	1		
	1	0	0	1	1	1							
	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1

Ответ: $100111_2 \times 1000111_2 = 101011010001_2$

Задача

Выполнить умножение:

$$1110011_2 \cdot 110011_2$$

Ответ: $1110011_2 \cdot 110011_2 = 1011011101001_2$

8-я система счисления: умножение

Пример. Вычислить $163_8 \times 63_8$

Решение.

$$\begin{array}{r} \times 263_8 \\ 53_8 \\ \hline + 6(18)9 \\ \hline 10(30)(15) \\ \hline 10(36)(34)1 \\ \hline 10(40)21 \\ \hline (15)021 \end{array}$$

Умножаем на разряды 2-го сомножителя, пока не учитывая перенос.

Теперь, начиная с младших, последовательно корректируем разряды, значение которых > 7 :
 $9 : 8 =$ частное 1 и остаток 1
Частное – это перенос, остаток – это цифра разряда.

$$34 : 8 = \text{частное } 4 \text{ и остаток } 2$$

$$40 : 8 = \text{частное } 5 \text{ и остаток } 0$$

Заменяем двухразрядные числа на буквы:

Ответ: $163_8 \times 63_8 = F021_8$

Задача

Выполнить умножение: $163_8 \cdot 63_8$

Ответ: $= 13351_8$

16-я система счисления: умножение

Пример. Вычислить $61A_{16} \times 40D_{16}$

Решение. Заменяем буквы числами и перемножаем:

$$\begin{array}{r}
 6 \ 1 \ (10)_{16} \\
 4 \ 0^{\times} \ (13)_{16} \\
 \hline
 (78)(13)(130) \\
 + \\
 (24) \ 4 \ (40) \\
 \hline
 (24) \ 4(118)(13)(130) \\
 \hline
 (24) \ 4(118)(21) \ 2 \\
 \hline
 (24) \ 4(119) \ 5 \ 2 \\
 \hline
 (24)(11) \ 7 \ 5 \ 2 \\
 \hline
 1 \ 8 \ (11) \ 7 \ 5 \ 2 \\
 \hline
 \end{array}$$

Умножаем на разряды 2-го сомножителя, пока не учитывая перенос.

Начиная с младших, корректируем разряды, значение которых > 15 :

$$130 : 16 = \text{частное } 8 \text{ и остаток } 2$$

$$21 : 16 = \text{частое } 1 \text{ и остаток } 5$$

$$119 : 16 = \text{частое } 7 \text{ и остаток } 7$$

$$24 : 16 = \text{частое } 1 \text{ и остаток } 8$$

Заменяем числа > 9 на буквы.

Ответ: $61A_{16} \times 40D_{16} = 18B752_{16}$

Задача

Выполнить умножение: $173C_{16} \times 4FA_{16}$

Ответ: $= 73A098_{16}$