

Элементы алгебры логики

Основные понятия

- Высказывание
- Логическая операция
- Конъюнкция
- Дизъюнкция
- Отрицание
- Логическое выражение



Алгебра - наука об общих операциях, аналогичных сложению и умножению, которые могут выполняться над различными математическими объектами (алгебра переменных и функций, алгебра векторов, алгебра множеств и т.д.). Объектами алгебры логики являются высказывания.



Алгебра логики отвлекается от смысловой содержательности высказываний. Ее интересует только один факт — истинно или ложно данное высказывание, что дает возможность определять истинность или ложность составных высказываний алгебраическими методами.

Высказывание

Высказывание - это предложение на любом языке, содержание которого можно однозначно определить как **истинное** или **ложное**.

В русском языке высказывания выражаются повествовательными предложениями:

*Январь – зимний месяц.
Москва – столица России.*

Но не всякое повествовательное предложение является высказыванием:

Это высказывание ложное.

Побудительные и вопросительные предложения высказываниями не являются.

*Как красив закат!
Войдите в класс.
Ты выучил стихотворение?*

Простые высказывания в алгебре логики
обозначаются заглавными латинскими буквами:

$A = \{\text{Аристотель - основоположник логики}\}$

$B = \{\text{На яблонях растут бананы}\}.$

Истинному высказыванию ставится в соответствие 1,
ложному — 0.

Таким образом, $A = 1, B = 0.$

Простые и сложные высказывания

Высказывания бывают простые и сложные.

Высказывание называется *простым*, если никакая его часть сама не является высказыванием.

Сложные (составные) высказывания строятся из простых с помощью логических операций.

Название логической операции	Логическая связка
Конъюнкция	«и»; «а»; «но»; «хотя»
Дизъюнкция	«или»
Инверсия	«не»; «неверно, что»
Импликация	«если..., то...»; «из ... следует ...», «... влечет...»
Эквиваленция	«Тогда и только тогда», «равносильно»



Логические операции задаются таблицами истинности и могут быть графически проиллюстрированы с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Логическая операция **КОНЪЮНКЦИЯ** (логическое умножение):

в естественном языке соответствует союзу **и**;

в алгебре высказываний обозначение **&**;

в языках программирования обозначение **And**.

Конъюнкция - это логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.

- В алгебре множеств конъюнкции соответствует операция *пересечения множеств*, т.е. множеству получившемуся в результате умножения множеств A и B соответствует множество, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно двум множествам.
- Диаграмма Эйлера-Венна:

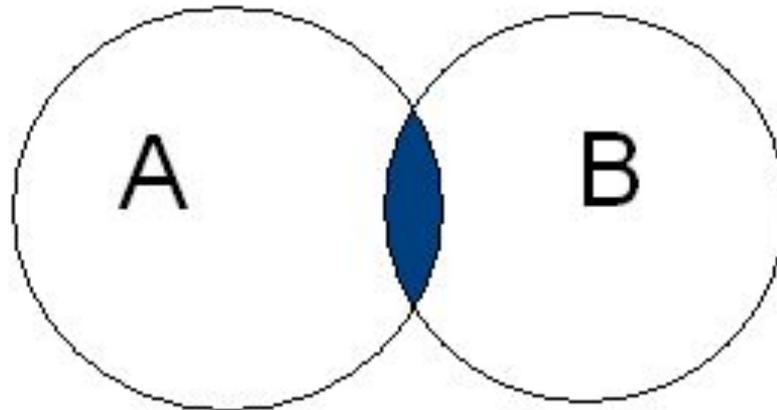


Таблица истинности

A	B	A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Логическая операция **ДИЗЪЮНКЦИЯ** (логическое сложение):

в естественном языке соответствует союзу **или**;
обозначение \vee ;

в языках программирования обозначение **Or**.

Дизъюнкция - это логическая операция, которая каждому двум простым высказываниям ставит в соответствие составное высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны и истинным, когда хотя бы одно из двух образующих его высказываний истинно.

- В алгебре множеств дизъюнкция соответствует операция *объединения множеств*, т.е. множеству получившемуся в результате сложения множеств A и B соответствует множество, состоящее из элементов, принадлежащих либо множеству A , либо множеству B .
- Диаграмма Эйлера-Венна:

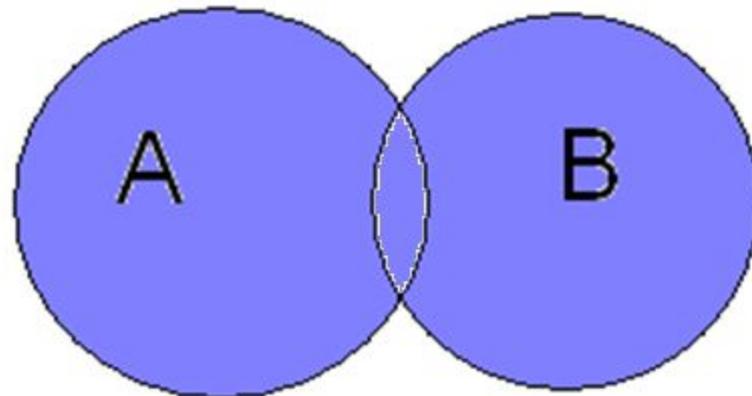


Таблица истинности

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Логическая операция **ИНВЕРСИЯ**

(отрицание):

в естественном языке соответствует словам
неверно, что... и частице **не**;

обозначение A ;

в языках программирования обозначение **Not**;

Отрицание - это логическая операция, которая каждому простому высказыванию ставит в соответствие составное высказывание, заключающееся в том, что исходное высказывание отрицается.

- В алгебре множеств логическому отрицанию соответствует операция *дополнения до универсального множества*, т.е. множеству получившемуся в результате отрицания множества A соответствует множество, дополняющее его до универсального множества.
- Диаграмма Эйлера-Венна:

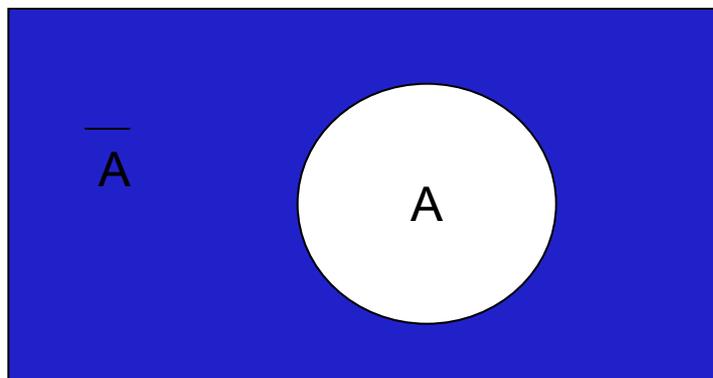


Таблица истинности:

A	\overline{A}
0	1
1	0

Логическая операция **ИМПЛИКАЦИЯ** (логическое следование):

в естественном языке соответствует обороту **если ... , ТО ...**;

обозначение \rightarrow .

Импликация - это логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда условие (первое высказывание) истинно, а следствие (второе высказывание) ложно.

Таблица истинности

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Логическая операция **ЭКВИВАЛЕНЦИЯ** (равнозначность):

В естественном языке соответствует оборотам речи
**тогда и только тогда; в том и только в том
случае;**

обозначения \leftrightarrow , \sim .

Эквиваленция – это логическая операция, ставящая
в соответствие каждым двум простым
высказываниям составное высказывание,
являющееся истинным тогда и только тогда, когда
оба исходных высказывания одновременно
истинны или одновременно ложны.

Таблица истинности

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

**Логические операции имеют
следующий приоритет:**

действия в скобках, инверсия, $\&$, \vee , \rightarrow ,
 \leftrightarrow .

Задание 1. Определите истинность составного высказывания:

$$(\overline{A} \& \overline{B}) \& (C \vee D),$$

состоящего из простых высказываний:

$A = \{\text{Принтер} - \text{устройство вывода информации}\},$

$B = \{\text{Процессор} - \text{устройство хранения информации}\},$

$C = \{\text{Монитор} - \text{устройство вывода информации}\},$

$D = \{\text{Клавиатура} - \text{устройство обработки информации}\}.$

Решение:

$$A = 1, B = 0, C = 1, D = 0.$$


$$(\overline{1} \& \overline{0}) \& (1 \vee 0) = (0 \& 1) \& (1 \vee 0) = 0$$

Задание 2. Выделите в составных высказываниях простые. Обозначьте каждое из них буквой; запишите с помощью логических операций каждое составное высказывание.

- Число 376 четное и трехзначное.
- Неверно, что Солнце движется вокруг Земли.
- Если сумма цифр числа делится на 3, то число делится на 3
- Число 15 делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа 15 делится на 3.

Задание 3. Найдите значения логических выражений

а) $(1 \vee 1) \vee (1 \vee 0)$;

б) $((1 \vee 0) \vee 1) \vee 1$;

в) $(0 \vee 1) \vee (1 \vee 0)$;

г) $(0 \& 1) \& 1$;

д) $1 \& (1 \& 1) \& 1$;

Задание 4. Даны два простых высказывания (устно):

$$A = \{2 * 2 = 4\}, B = \{2 * 2 = 5\}.$$

Какие из составных высказываний ИСТИННЫ:

- а) \overline{A} ;
- б) \overline{B} ;
- в) $A \& B$;
- г) $A \vee B$;
- д) $A \rightarrow B$;
- е) $A \leftrightarrow B$.

Задание 5. Даны простые высказывания:

- $A = \{5 > 3\}$, $B = \{2 = 3\}$ и $C = \{4 < 2\}$.
- Определите истинность составных высказываний:
 - а) $(A \vee B) \& C \rightarrow (A \& C) \vee (B \& C)$;
 - б) $(A \& B) \vee C \leftrightarrow (A \vee C) \& (A \& B)$.